

برقی و مقناطیسیات

خالد خان یوسفزئی

عنوان

ix

دیباچہ

xiii

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

1	سمتیاں	1
1	مقداری اور سمتیہ	1.1
2	سمتی الجبرا	1.2
4	کار تیبی محدود	1.3
8	اکائی سمتیاں	1.4
13	سمتی رقبہ	1.5
14	غیر سمتی ضرب	1.6
20	سمتی ضرب یا صلیبی ضرب	1.7
24	گول تکلی محدود	1.8
28	تکلی اکائی سمتیاں کا کار تیبی اکائی سمتیاں کے ساتھ غیر سمتی ضرب	1.8.1
30	تکلی اور کار تیبی اکائی سمتیاں کا تعلق	1.8.2
37	تکلی لامحدود سطیوں	1.8.3
39	کروی محدود	1.9
57	کولمب کا قانون	2
57	قوت کشش یا دفع	2.1
62	برقی میدان کی شدت	2.2
67	یکساں بار بردار سیدھی لامحدود کثیر کار برقی میدان	2.3
74	یکساں بار بردار ہموار لامحدود سطح	2.4
78	بار بردار حجم	2.5
80	مزید مثال	2.6
90	برقی میدان کے سمت بہا و خط	2.7

97	گاؤس کا قانون اور پھیلاؤ	3
97	ساکن برقی بار	3.1
97	فیراڈے کا تجربہ	3.2
99	گاؤس کا قانون	3.3
101	گاؤس کے قانون کا استعمال	3.4
102	نقطہ بار	3.4.1
104	یکساں بار بردار کروی سطح	3.4.2
105	یکساں بار بردار سیدھی لامحدود لکیر	3.4.3
106	ہم محوری تار	3.5
108	یکساں بار بردار ہموار لامحدود سطح	3.6
109	انتہائی چھوٹی حجم پر گاؤس کے قانون کا اطلاق	3.7
113	پھیلاؤ	3.8
116	تنگی محدود میں پھیلاؤ کی مساوات	3.9
118	پھیلاؤ کی عمومی مساوات	3.10
121	مسئلہ پھیلاؤ	3.11
129	توانائی اور برقی دباؤ	4
129	توانائی اور کام	4.1
131	لکیری تکمیلہ	4.2
138	برقی دباؤ	4.3
139	نقطہ بار کا برقی دباؤ	4.3.1
141	لکیری کشافیت بار سے پیدا برقی دباؤ	4.3.2
142	ہم محوری تار کا برقی دباؤ	4.3.3
142	متعدد نقطہ باروں کی برقی دباؤ	4.4
148	برقی دباؤ کی ڈھلوان	4.5
153	تنگی محدود میں ڈھلوان	4.5.1
154	کروی محدود میں ڈھلوان	4.5.2
156	جفت قطب	4.6
159	جفت قطب کے سمت بہاؤ خط	4.6.1
163	ساکن برقی میدان کی کشافیت توانائی	4.7
175	موصل، ذو برقی اور برقی گیر	5
175	برقی رد اور کشافیت برقی رد	5.1
178	استمراری مساوات	5.2
181	موصل	5.3
188	موصل کے خصوصیات اور سرحدی شرائط	5.4
192	عکس کی ترکیب	5.5
196	نیم موصل	5.6
198	ذو برقی	5.7
205	کامل ذو برقی کے سرحد پر برقی شرائط	5.8

210	موصل اور ڈوبتی کے سرحدی شرائط	5.9
211	برق گیر (کپیسٹر)	5.10
212	متوازی چادر برق گیر	5.10.1
214	ہم محوری برق گیر	5.10.2
215	ہم محوری کرہ برق گیر	5.10.3
217	سلسلہ دار اور متوازی جڑے برق گیر	5.11
219	دو متوازی تاروں کی برقی گنجائش (کپیسٹنس)	5.12
235	پونسن اور لاپلاس مساوات	6
238	مسئلہ یکنائی	6.1
240	لاپلاس مساوات خطی ہے	6.2
241	تکلی اور کروی محدود میں لاپلاس کی مساوات	6.3
242	لاپلاس مساوات کے حل	6.4
252	پونسن مساوات کے حل کی مثال	6.5
255	لاپلاس مساوات کا ضربی حل	6.6
266	عددی دہرانے کا طریقہ	6.7
277	ساکن مقناطیسی میدان	7
277	بابوٹ-سیوارٹ کا قانون	7.1
284	ایمپیر کادوری قانون	7.2
292	گردش	7.3
303	تکلی محدود میں گردش	7.3.1
312	عمومی محدود میں گردش کی مساوات	7.3.2
314	کروی محدود میں گردش کی مساوات	7.3.3
315	مسئلہ سٹوکس	7.4
320	مقناطیسی بہاؤ اور کشاف مقناطیسی بہاؤ	7.5
330	غیر سمی اور سمی مقناطیسی دباؤ	7.6
337	ساکن مقناطیسی میدان کے قوانین کا حصول	7.7
338	سمی مقناطیسی دباؤ	7.7.1
340	ایمپیر کادوری قانون	7.7.2
351	مقناطیسی قوتیں، مقناطیسی مادے اور امالہ	8
351	متحرک بار پر قوت	8.1
353	تفرقی بار پر قوت	8.2
357	برقی رو گزارتے تفرقی تاروں کے مابین قوت	8.3
359	قوت اور مروڑ	8.4
368	فولادی مقناطیسی اشیاء اور مقناطیسی خطے	8.5
370	مقناطیسیت اور مقناطیسی مستقل	8.6

374	متناطیسی سرحدی شرائط	8.7
377	متناطیسی دور	8.8
381	متناطیسی مخفی توانائی	8.9
382	خود امالہ اور مشترکہ امالہ	8.10
390	مشترکہ امالہ	8.11
399	وقت کے ساتھ بدلنے میدان اور میکس ویل کے مساوات	9
399	فیراڈے کا قانون	9.1
409	انتقالی برقی رو	9.2
417	میکس ویل مساوات کی نقطہ شکل	9.3
419	میکس ویل مساوات کی مکمل شکل	9.4
427	تاخیری دباؤ	9.5
439	مستوی امواج	10
440	خالی خلاء میں برقی و متناطیسی مستوی امواج	10.1
441	برقی و متناطیسی مستوی امواج	10.2
451	10.2.1 خالی خلاء میں امواج	
456	10.2.2 خالص یا کامل ذور برقی میں امواج	
459	10.2.3 ناقص یا غیر کامل ذور برقی میں امواج	
464	10.3 پوینٹنگ سمتیہ	
472	10.4 پوینٹنگ سمتیہ اور برقی دور	
474	10.5 موصل میں امواج	
482	10.6 انعکاس مستوی موج	
492	10.7 شرح ساکن موج	
499	10.8 دوسرحدی انعکاس	
506	10.8.1 فیری-جیروٹ ٹیف پیچا	
508	10.8.2 $Z_1 \neq Z_3$ کی صورت میں ہم رکاوٹ صورت کا حصول	
510	10.8.3 متعدد سرحدی مسئلہ	
511	10.9 خطی، بیضوی اور دائری تقطیب	
521	10.10 بیضوی یا دائری قطبی امواج کا پوینٹنگ سمتیہ	
535	11 ترسیلی تار	
536	11.1 ترسیلی تار کے مساوات	
541	11.2 ترسیلی تار کے مستقل	
542	11.2.1 ہم محوری تار کے مستقل	
547	11.2.2 دو متوازی تار کے مستقل	
548	11.2.3 سطح مستوی ترسیلی تار	
550	11.3 ترسیلی تار کے چند مثال	
561	11.4 ترسیلی تجزیہ، سمتہ نقشہ	
570	11.4.1 سمتہ فراوانی نقشہ	

572	11.5	تجرباتی نتائج پر مبنی چند مثال
577	11.6	پہا شرح ساکن موج
578	11.7	تجزیہ عارضی حال
605	12	ترجمی آمد، انعکاس، انعطاف اور انتشار
605	12.1	ترجمی آمد
623	12.2	قطبی موج کی ترجمی آمد
628	12.3	ترسیم ہائی گن
630	12.4	انتشار
643	13	موج اور گھمکیا
644	13.1	برقی دور، تریلی تار اور موج کا موازنہ
645	13.2	دو لامحدود وسعت کے مستوی چادروں کے موج میں عرضی برقی موج
653	13.3	کھوکھلا مستطیل موج
666	13.3.1	مستطیلی موج کے میدان پر تفصیلی غور
674	13.4	مستطیلی موج میں عرضی مقناطیسی TM_{mn} موج
680	13.5	کھوکھلی نالی موج
690	13.6	انقطاع تعدد سے کم تعدد پر تضعیف
692	13.7	انقطاع تعدد سے بلند تعدد پر تضعیف
697	13.8	سطحی موج
703	13.9	ذو برق تختی موج
708	13.10	شیش ریشہ
712	13.11	پردہ بصارت
714	13.12	گھمکی خلاء
720	13.13	میکس ویل مساوات کا عمومی حل
737	14	اینٹینا اور شعاعی اخراج
737	14.1	تعارف
737	14.2	تانیخیری دباؤ
740	14.3	کامل
742	14.4	مختصر جفت قطبی اینٹینا
755	14.5	مختصر جفت قطب کا اخراجی مزاحمت
759	14.6	ٹھوس زاویہ
761	14.7	اخراجی رقبہ، سمتیت اور افزائش
770	14.8	قطاری ترتیب
770	14.8.1	غیر سمتی، دو نقطہ منبع
772	14.8.2	ضرب نقش
772	14.8.3	ثنائی قطار
775	14.8.4	کیساں طاقت کے متعدد رکن پر مبنی قطار

778	یکساں طاقت کے متعدد رکن پر مبنی قطار: چوڑائی جانب اخراجی قطار	14.8.5
779	یکساں طاقت کے متعدد رکن پر مبنی قطار: لمبائی جانب اخراجی قطار	14.8.6
784	یکساں طاقت کے متعدد رکن پر مبنی قطار: بدلنے زاویہ اخراجی اینٹینا	14.8.7
785	تداخل پتیا	14.9
787	مستطیل سطحی اینٹینا	14.10
791	درز کا دور میدان بذریعہ فوریز بدل	14.11
800	خطی اینٹینا	14.12
806	چلتی موج اینٹینا	14.13
809	چھوٹا گھیر اینٹینا	14.14
810	پچ دار اینٹینا	14.15
813	دو طرفہ کردار	14.16
816	جھری اینٹینا	14.17
817	پنپا اینٹینا	14.18
819	فرائس ریڈار مساوات	14.19
824	ریڈیائی دور بین، اینٹینا کی حرارت اور تحلیل کارکردگی	14.20
827	حرارت نظام اور حرارت بعید	14.21

831	ضمیمہ: طبعی مستقل
835	ضمیمہ: ڈھلوان، پھیلاؤ، گردش اور اپلاسی
839	خطی الجبرائی مماثل
841	محدد کے باہمی تعلق
843	فرہنگ

دیباچہ

میں نے تقریباً چودہ برس قبل اس کتاب کو لکھنے کی پہلی مرتبہ ناکام کوشش کی۔ کئی برس گزرنے کے بعد آج میں ایسا کرنے میں کامیاب ہوا ہوں۔ یہ کتاب اس امید کے ساتھ لکھی گئی ہے کہ یہ ایک دن برقی انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر پڑھائی جائے گی۔ امید کی جاتی ہے کہ اب بھی طلبہ و طالبات اس سے استفادہ حاصل کر سکیں گے۔ برقی و مقناطیسیات کا شعبہ انتہائی دلچسپ ہے۔ میں نے پوری کوشش کی ہے کہ یہ کتاب بھی پرکشش ہو۔

اس کتاب میں تقریباً 121 حل شدہ مثال اور 245 اشکال پائے جاتے ہیں۔ اس کے علاوہ 370 سوالات دئے گئے ہیں۔ تمام کے تمام سوالات کے جوابات بھی دئے گئے ہیں۔

برقی و مقناطیسیات کو خطی الجبرا اور سمتیات کی مدد سے سمجھنا زیادہ آسان ثابت ہوتا ہے۔ اس کتاب کے پہلے باب میں درکار خطی الجبرا اور سمتیات پر غور کیا گیا ہے۔ کارتیسی محدود کے علاوہ نکلی محدود اور کروی محدود متعارف کرائے گئے ہیں۔ عمومی محدود پر بھی تبصرہ کیا گیا ہے۔ اس باب کو مکمل طور پر سمجھنا نہایت ضروری ہے۔ دوسرے باب میں کولمب کے قانون پر غور کے بعد تیسرے باب میں پھیلاؤ متعارف کرایا گیا ہے۔ چوتھے باب میں برقی دباؤ اور ڈھلوان پر غور کیا گیا ہے۔ پانچویں باب میں برق گیر جبکہ آٹھویں باب میں امالہ پر غور کیا گیا ہے۔ ساتویں باب میں گردش، مسئلہ سنوکس اور ایمپیر کے دوری قانون پر بحث کی گئی ہے۔

میکس ویل مساوات کے بعد حرکت کرتے میدان پر تبصرہ کیا گیا ہے۔ حرکت کرتا میدان انتہائی دلچسپ موضوع ہے جسے پڑھ کر ایسے حقائق جیسے آئینے میں عکس کیوں بنتا ہے یا پھر شیشے میں آر پار کیوں نظر آتا ہے کی سمجھ پیدا ہوتی ہے۔ اس کے علاوہ خالی خلاء میں برقی و مقناطیسی امواج کی رفتار، خالصاً میکس ویل مساوات سے حاصل کی جاتی ہے۔ خالی خلاء کی قدرتی رکاوٹ بھی انہیں مساوات سے حاصل کی جاتی ہے۔

میکس ویل مساوات کے بعد پوٹینٹنگ سمتیا متعارف کرایا جاتا ہے جو متیق کے بالکل برعکس بتلاتا ہے کہ برقی طاقت، منبع سے برقی بوجھ تک، ہرگز موصل تار کے ذریعہ نہیں پہنچتی بلکہ ایسا تار کے گرد خلاء میں برقی و مقناطیسی میدان کے ذریعہ ہوتا ہے۔ موصل تار صرف اور صرف ان امواج کو منبع سے مزاحمت تک کی راہ دکھلاتی ہے۔ ترسیلی تار کے ذریعہ ساکن موج پر بھرپور تبصرہ کیا گیا ہے جسے آپ ضرور پسند کریں گے۔

برقی ادوار پڑھنے سے ایسا معلوم ہوتا ہے جیسے برقی طاقت کے منتقلی کے لئے دو عدد موصل تاروں کا ہونا ضروری ہے۔ موج کا باب اس حقیقت کے بالکل برعکس ہے جہاں صرف ایک عدد تار ہی برقی و مقناطیسی امواج کو منبع سے بوجھ تک راہ دکھاتی ہے۔

کتاب کے آخر میں اینٹینا پر تبصرہ کیا گیا ہے جہاں منبع سے بوجھ تک طاقت بغیر کسی راہ دکھاتے موصل تار کے پہنچتی ہے۔

مجھے طلباء و طالبات کی طرف سے بھرپور حوصلہ ملا ہے جو آئے دن مجھ تک کتاب کی غلطیاں پہنچاتے ہیں۔ اس سے بھی زیادہ پُر امید میں اس وقت ہوا جب مجھے معلوم ہوا کہ کئی طلباء اور طالبات میری کتاب سے پڑھ رہے ہیں۔ میں امید کرتا ہوں کہ برقی و مقناطیسیات کو بھی درست کرنے میں آپ مدد کریں گے۔

میں یہاں بالخصوص رانا لیاقت، حراخان، اینلا تبسم اور ماجد بلال خان کا شکریہ ادا کرتا ہوں جنہوں نے کتاب کے دیگر حصے پڑھ کر درست کئے۔ میں عابد حسن محنتے کا بھی شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جو XeLatex کے معاملات سنبھالے ہوئے ہیں۔

یہ کتاب Ubuntu استعمال کرتے ہوئے XeLatex میں تشکیل دی گئی جبکہ سوالات کے جوابات کے حصول میں wxMaxima کا سہارا لیا گیا۔ یہ کتاب خطِ جمیل نوری نستعلیق میں لکھی گئی ہے۔

یہ کتاب لکھتے ہوئے مندرجہ ذیل کتابوں سے مدد لی گئی

- Engineering Electromagnetics by William H. Hayt, Jr
- Electromagnetics by John D. Kraus
- Antennas And Radiowave Propagation by R.E. Collin

جبکہ اردو اصطلاحات چننے میں درج ذیل لغت سے استفادہ حاصل کیا گیا۔

• <http://www.urduenglishdictionary.org>

• <http://www.nlpd.gov.pk/lughat/>

آپ سے گزارش ہے کہ اس کتاب کو زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچائیں اور کتاب میں غلطیوں کی نشاندہی میرے برقیاتی پتہ

khalidyoufazai@comsats.edu.pk

پر کریں۔ میری تمام کتابوں کی مکمل XeLatex معلومات

<https://www.github.com/khalidyoufazai>

سے حاصل کی جاسکتی ہیں جنہیں آپ مکمل اختیار کے ساتھ استعمال کر سکتے ہیں۔

خالد خان یوسفزئی

8 جنوری 2017

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ حاصل کر سکتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ حاصل کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ممکن کی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ ممکن کی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہوگی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں الیکٹریکل انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔ میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی ڈلی ہیں البتہ اسے درست بنانے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب 1

سمتیات

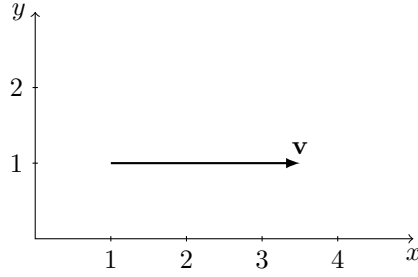
1.1 مقداری اور سمتیہ

وہ طبعی مقدار جس کے مکمل اظہار کے لئے سمت کی ضرورت نہیں ہوتی مقداری¹ کہلاتا ہے۔ کسی چیز کی کمیت m یا اس کا درجہ حرارت T مقداری کی مثالیں ہیں۔ مقداری کی قیمت اٹل یا متغیر ممکن ہے۔ کمیت اٹل مقداری کی مثال ہے۔ متغیر مقداری کی قیمت مختلف اوقات اور نقاط پر مختلف ہو سکتی ہے۔ یوں کسی بھی نقطے پر درجہ حرارت کی قیمت وقت t کے ساتھ تبدیل ہو سکتی ہے۔ اسی طرح کسی بھی وقت مختلف نقاط پر درجہ حرارت کی قیمت مختلف ہو سکتی ہے۔ یوں اگر صبح کے وقت اسلام آباد میں کسی مقام پر درجہ حرارت 12°C ہو تو دوپہر کو اسی مقام پر درجہ حرارت 30°C ہو سکتا ہے۔ درجہ حرارت T ، وقت t ، کارڈینیسی محدود² کے متغیرات x ، y اور z تمام مقداری متغیرات ہیں۔

ایسی طبعی مقدار جسے بیان کرنے کے لئے سمت درکار ہو سمتیہ³ کہلاتا ہے۔ اس کتاب میں سمتیہ کی قیمت (یا طول) کو مثبت تصور کیا جائے گا۔ یوں سمتیہ کی حتمی قیمت ہی اس کی مقدار ہوگی۔ سمتیہ کی مثالیں قوت، سمتی رفتار اور سمتی اسراع ہیں۔

اس کتاب میں مقداری متغیرات کو سادہ طرز کی لکھائی میں انگریزی یا لاطینی زبان کے چھوٹے حروف مثلاً a ، b ، α ، یا بڑے حروف مثلاً A ، B ، Ψ ، سے ظاہر کیا جائے گا۔ سمتیہ متغیرات کو موٹی لکھائی میں انگریزی یا لاطینی

scalar¹
Cartesian coordinates²
vector³



شکل 1.1: سمتیہ

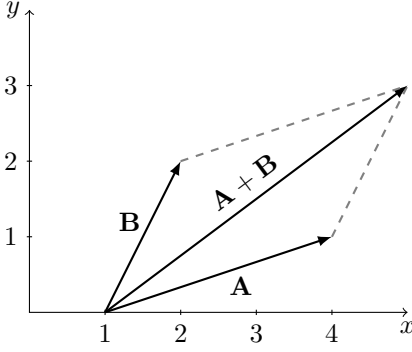
زبان کے چھوٹے یا بڑے حروف سے ظاہر کیا جائے گا۔ یوں قوت کو F جبکہ سمتی رفتار کو v سے ظاہر کیا جائے گا۔ قلم و کاغذ استعمال کرتے ہوئے سمتیہ پر تیر یا آدھے تیر کا نشان بنایا جاتا ہے یوں قوت کو \vec{F} یا \vec{F} لکھا جاتا ہے۔ سمتیہ کو تیر سے ظاہر کیا جاتا ہے جہاں تیر کی لمبائی سمتیہ کی حتمی قیمت $|F|$ ظاہر کرتی ہے جبکہ سمتیہ کی سمت تیر کی سمت سے ظاہر کی جاتی ہے۔ سمتیہ کی حتمی قیمت کو سمتیہ ظاہر کرنے والے حرف کو سادہ لکھائی میں لکھ کر ظاہر کیا جاتا ہے۔ یوں قوت F کی حتمی قیمت کو F لکھا جائے گا۔

شکل 1.1 میں نقطہ $(1, 1)$ پر پانی کی رفتار کو سمتیہ v سے ظاہر کیا گیا ہے۔ اس نقطے پر مثبت افقی محور کی سمت میں پانی کی رفتار $2.5 \frac{m}{s}$ ہے۔ سمتیہ کی ڈم اس مقام پر رکھی جاتی ہے جہاں سمتیہ کی قیمت بیان کی جا رہی ہو۔ یوں شکل میں سمتیہ کی ڈم $(1, 1)$ پر رکھی گئی ہے۔ اس شکل میں 1 cm کی لمبائی $1 \frac{m}{s}$ کی رفتار کو ظاہر کرتی ہے۔

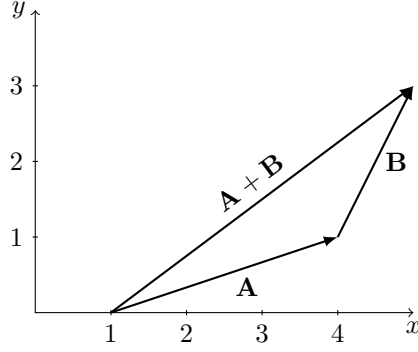
1.2 سمتی الجبرا

دو سمتیوں کا تریبی مجموعہ حاصل کرنے کی خاطر ایک سمتیہ کے سر کو دوسری سمتیہ کے ڈم کے ساتھ ملایا جاتا ہے۔ پہلی سمتیہ کی ڈم سے دوسری سمتیہ کے سر تک سمتیہ حاصل جمع ہو گا۔ اس عمل کو شکل 1.2-الف میں دکھایا گیا ہے۔ شکل میں A کے سر کے ساتھ B کی ڈم ملائی گئی ہے۔ دو سے زیادہ سمتیوں کا مجموعہ بھی اسی عمل کو استعمال کرتے ہوئے حاصل کیا جاتا ہے۔ اس عمل کو سر سے ڈم جوڑنا⁴ کہتے ہیں۔ شکل 1.2-ب میں دو سمتیوں کے ڈم ملا کر سمتیوں کے متوازی الاضلاع⁵ سے ان کا مجموعہ حاصل کرنا دکھایا گیا ہے جسے دیکھ کر صاف ظاہر ہے کہ

head to tail rule⁴
parallelogram law⁵



(ب) متوازی الاضلاع سے بھی مجموعہ حاصل کیا جاتا ہے۔



(ا) سر کے ساتھ دم جوڑ کر مجموعہ حاصل کیا جاتا ہے۔

شکل 1.2: سمتیوں کے مجموعے کا حصول

یعنی سمتیوں کا مجموعہ قانون تبادل⁶ پر پورا اترتا ہے۔ اسی طرح سمتیوں کا مجموعہ قانون تلازمی⁷ $A + B = B + A$ ہے

$$(1.1) \quad A + (B + C) = (A + B) + C$$

پر بھی پورا اترتا ہے۔

سمتیوں کے تفریق کا اصول جمع کے اصول سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ ہم $A - B$ کو $A + (-B)$ لکھ سکتے ہیں جہاں $-B$ سے مراد یہ ہے کہ سمتیہ B کی سمت الٹی کر دی گئی ہے۔ یوں $A - B$ حاصل کرنے کی خاطر B کی سمت الٹی کرتے ہوئے اس نئے سمتیہ کو A کے ساتھ جمع کیا جاتا ہے۔

سمتیہ A کو مثبت مقداری k سے ضرب دینے سے سمتیہ کی سمت پر کوئی اثر نہیں ہوتا جبکہ اس کی لمبائی k گنا ہو جاتی ہے۔ اس کے برعکس سمتیہ A کو منفی مقداری $-k$ سے ضرب دینے سے سمتیہ کی سمت الٹ ہو جاتی ہے اور اس کی لمبائی $|k|$ گنا ہو جاتی ہے۔

دو سمتیے اُس صورت میں برابر ہوتے ہیں جب ان کا تفریق صفر کے برابر ہو یعنی $A = B$ تب ہو گا جب $A - B = 0$ ہو۔

commutative law⁶
associative law⁷

سمتی میدان کے متغیرات کو ہم آپس میں جمع یا منفی صرف اُس صورت کریں گے جب یہ متغیرات ایک ہی نقطے پر بیان کئے گئے ہوں۔ یوں کسی بھی نقطے پر دو یا دو سے زیادہ متناطیسوں کا اجتماعی متناطیسی میدان حاصل کرتے ہوئے اس نقطے پر تمام متناطیسوں کا علیحدہ علیحدہ متناطیسی میدان لیتے ہوئے ان کا مجموعہ لیا جائے گا۔

اگر سمتی میدان کی بات نہ ہو رہی ہو تب مختلف مقامات پر پائے جانے والے سمتیوں کا بھی مجموعہ یا فرق لیا جاسکتا ہے۔ یوں سمندر کے پانی میں ڈوبے آب دوز کی اوپر اور نچلی سطح پر قوت کا مجموعہ حاصل کرتے ہوئے ہم یہ معلوم کر سکتے ہیں کہ آیا یہ مزید ڈوبے گا یا نہیں۔

1.3 کارتیسی محدود

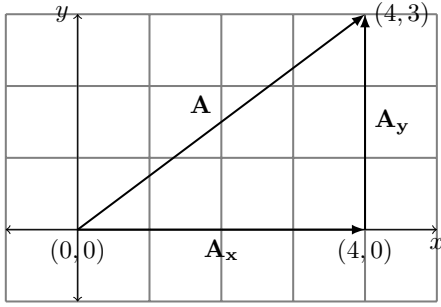
ایسا طریقہ جس سے کسی نقطے کا مقام بیان کیا جائے محدود⁸ کہلاتا ہے۔ سیدھی سطح پر کسی بھی نقطے کو دو محدود سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ خلاء تین طرفہ⁹ ہے لہذا خلاء میں کسی بھی نقطے کو تین محدود سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ شکل 1.3-الف میں دو طرفہ کارتیسی محدود پر اکائی لمبائی کے دو سمتیات a_x اور a_y دکھائے گئے ہیں۔ اکائی سمتیہ a_x کی سمت مثبت x جانب کو ہے جبکہ a_y کی سمت مثبت y جانب کو ہے۔ شکل-ب میں A دکھایا گیا ہے۔ کسی بھی سمتیہ کو دو یا دو سے زیادہ سمتیوں کے مجموعے کی شکل میں لکھا جاسکتا ہے۔ شکل میں A کو A_x اور A_y کے مجموعے کی شکل میں دکھایا گیا ہے یعنی

$$(1.2) \quad A = A_x + A_y$$

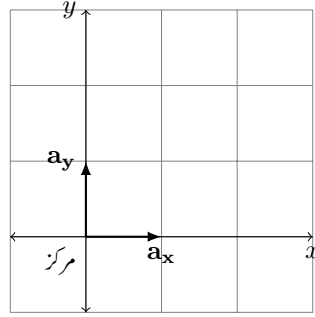
زمین کی سطح کو لامحدود سیدھی سطح تصور کرتے ہوئے، اس کے ہم سطحی¹⁰ دو عمودی لکیریں کھینچتے ہوئے ایک لکیر کو x محدود اور دوسری لکیر کو y محدود تصور کیا جاسکتا ہے۔ زمین کے ہم سطحی لکیر سے مراد ایسی لکیر ہے جس پر ہر نقطہ اس سطح کو چھوتا ہے۔ x محدود کے مثبت حصے سے گھڑی کی الٹ سمت گھومتے ہوئے نوے درجے پر y محدود کا مثبت حصہ رکھتے ہوئے اونچائی کو z محدود کے مثبت حصے سے ظاہر کیا جائے گا۔ اب اگر اونچائی صفر رکھتے ہوئے x اور y کو تبدیل کیا جائے تو ہم زمین کی سطح پر حرکت کریں گے۔ اس طرح ہم دیکھتے ہیں کہ زمین کی سطح پر $z = 0$ جبکہ اس پر x اور y آزاد متغیرات ہیں۔ یوں زمین کی سطح کو $z = 0$ سطح کہتے ہیں جسے

$$z = 0, \quad x \leq |\mp\infty|, \quad y \leq |\mp\infty|$$

coordinates⁸
three dimensional⁹
coplanar¹⁰



(ب) اکائی سمتیات سے عمومی سمتیہ کا اظہار۔



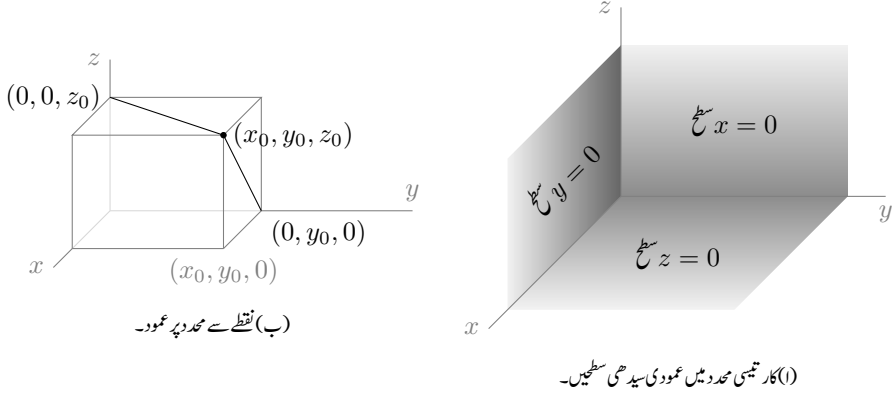
(ا) اکائی سمتیہ

شکل 1.3: اکائی سمتیات اور ان کا استعمال

شکل 1.4- الف میں اس سطح کی نشاندہی کی گئی ہے۔ ہم بالکل اسی طرح $y = 0$ سطح اور $x = 0$ سطح بھی بیان کر سکتے ہیں۔

شکل 1.4- ب کو دیکھتے ہوئے آگے پڑھیں۔ کارتیسی محدود میں کسی بھی نقطے کو (x_0, y_0, z_0) لکھا جاسکتا ہے۔ اس نقطے تک پہنچنے کی خاطر کارتیسی محدود کے مرکز سے پہلے x محدود کے متوازی x_0 فاصلہ طے کرتے ہوئے $(x_0, 0, 0)$ تک پہنچیں۔ اس کے بعد y محدود کے متوازی y_0 فاصلہ طے کرتے ہوئے $(x_0, y_0, 0)$ تک پہنچیں اور آخر کار z محدود کے متوازی z_0 فاصلہ طے کرتے ہوئے درکار نقطہ (x_0, y_0, z_0) تک پہنچیں۔ اس عمل میں یہ ضروری نہیں کہ پہلے x محدود کے متوازی ہی چلا جائے۔ آپ مرکز سے پہلے y محدود کے متوازی y_0 فاصلہ طے کرنے کے بعد z محدود کے متوازی z_0 اور آخر کار x محدود کے متوازی x_0 فاصلہ طے کرتے ہوئے بھی اسی نقطے تک پہنچ سکتے ہیں۔ تینوں فاصلوں کو کسی بھی ترتیب سے طے کیا جاسکتا ہے۔

نقطہ (x_0, y_0, z_0) سے x محدود پر عمود بناتے ہوئے $(x_0, 0, 0)$ حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح اس نقطے سے y محدود پر عمود $(0, y_0, 0)$ اور z محدود پر عمود $(0, 0, z_0)$ دیتا ہے۔ نقطہ (x_0, y_0, z_0) سے y محدود اور z محدود پر عمودی لکیریں گہری سیاہی میں دکھائے گئے ہیں۔ اگر (x_0, y_0, z_0) سے شروع ہوتے ہوئے z محدود کے متوازی یوں چلا جائے کہ آخر کار $z = 0$ ہو جائے تو نقطہ $(x_0, y_0, 0)$ حاصل ہو گا۔ اب اگر یہاں سے x محدود کے متوازی یوں چلا جائے کہ آخر کار $x = 0$ ہو جائے تو نقطہ $(0, y_0, 0)$ حاصل ہو گا۔ یہ وہی نقطہ ہے جو (x_0, y_0, z_0) سے y محدود پر عمودی لکیر بناتے ہوئے حاصل ہوتا ہے۔ اس عمل میں ہم پہلے x محدود کے متوازی چلتے ہوئے $x = 0$ کرنے کے بعد z محدود کے متوازی چلتے ہوئے $z = 0$ کرتے ہوئے بھی نقطہ $(0, y_0, 0)$ تک پہنچ سکتے تھے۔



شکل 1.4: کار تیسری نظام میں نقطہ اور تین عمودی سطحیں۔

نقطہ (x_0, y_0, z_0) تک قدر مختلف انداز سے بھی پہنچا جاسکتا ہے جسے کار تیسری محدود میں سمجھنا زیادہ آسان ہے۔ فرض کریں کہ $x = x_0$ پر لامحدود yz سیدھی سطح بنائی جائے۔ ایسی سطح کو $x = x_0$ سطح کہتے ہیں۔ اس سطح کو

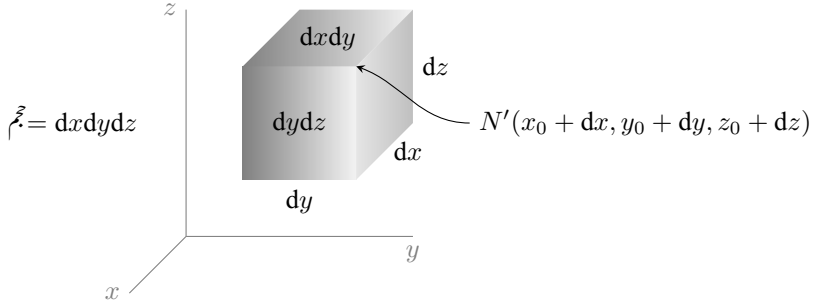
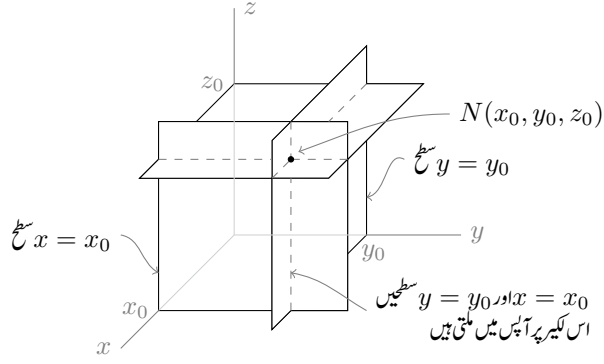
$$x = x_0, \quad y \leq |\mp\infty|, \quad z \leq |\mp\infty|$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس مساوات میں x_0 مقررہ ہے جبکہ y اور z متغیرات ہیں۔ دو متغیرات کی مساوات سطح کو ظاہر کرتی ہے۔ اگر $y = y_0$ پر لامحدود xz سیدھی سطح بنائی جائے تو یہ دو سطحے آپس میں سیدھی لکیر پر ملیں گے۔ یہ لکیر

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad z \leq |\mp\infty|$$

لکھی جاسکتی ہے۔ اس مساوات میں x_0 اور y_0 مقررہ ہیں جبکہ z متغیرہ ہے۔ ایک متغیرہ کی مساوات لکیر کو ظاہر کرتی ہے۔ اب اگر $z = z_0$ پر لامحدود xy سیدھی سطح بھی بنائی جائے تب یہ تینوں سطحے ایک نقطے $N(x_0, y_0, z_0)$ پر آپس کو چھوئیں گے۔ یہ صورت حال شکل 1.5 میں دکھائی گئی ہے جہاں لامحدود سطحوں کے کچھ حصے دکھائے گئے ہیں۔ آپ دیکھیں گے کہ نقطے تک پہنچنے کا یہ طریقہ دیگر محدود میں استعمال کرنا لازمی ثابت ہو گا۔

اگر سطح $x = x_0$ کے متوازی $x = x_0 + dx$ پر اور اسی طرح $y = y_0$ کے متوازی $y = y_0 + dy$ اور $z = z_0$ کے متوازی $z = z_0 + dz$ سطح رکھے جائیں تو یہ چھ سطحے ایک چھوٹی مکعب نما حجم کو گھیریں گی جسے شکل 1.6 میں دکھایا گیا ہے جبکہ یہ تین نئی سطحیں آپس میں نقطہ N' پر ملیں گی۔ اس مکعب نما کے اطراف dx ، dy اور dz ہیں۔ اس کی اوپر والی سطح کا رقبہ $dx dy$ ہے۔ اسی طرح اس کی نچلی سطح کا رقبہ بھی $dx dy$ ہے۔ سامنے سطح اور پچھلی سطح دونوں $dy dz$ رقبہ رکھتے ہیں جبکہ بائیں اور دائیں سطحوں کے رقبے $dx dz$ کے برابر ہیں۔ اس مکعب نما کی حجم $dx dy dz$



ہے۔ نقطہ $N'(x_0 + dx, y_0 + dy, z_0 + dz)$ شکل میں دکھایا گیا ہے جبکہ نقطہ $N(x_0, y_0, z_0)$ ملبع نما کا وہ واحد کونا ہے جسے شکل میں نہیں دکھایا گیا۔ ان دو نقطوں کے درمیان فاصلہ $NN' = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ ہے۔

کار تیزی محدود کے تینوں متغیرات تبدیل کرنے سے ہم N سے N' پہنچتے ہیں۔ N سے N' تک کی سمتیہ

$$(1.3) \quad dL = dx a_x + dy a_y + dz a_z$$

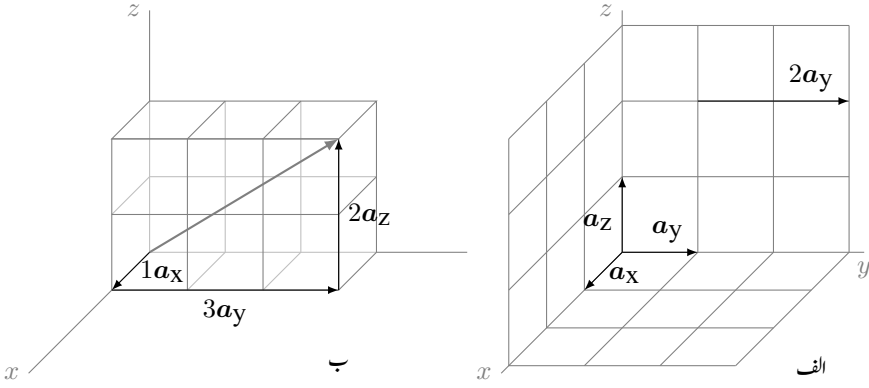
لکھی جاتی ہے۔ یہ مساوات کسی بھی دو قریبی نقطوں کے درمیان سمتیہ لمبائی دیتی ہے۔

1.4 اکائی سمتیات

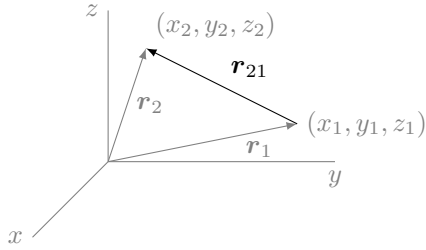
حصہ 1.3 کے شروع میں دو طرفہ کار تیزی نظام میں سیدھی سطح پر کسی بھی سمتیہ کو دو سمتیات کی صورت میں لکھنا دکھایا گیا۔ یہی طریقہ تین طرفہ کار تیزی نظام کے لئے بھی استعمال کیا جاتا ہے۔ تین طرفہ کار تیزی نظام کے تین اکائی سمتیات a_x, a_y, a_z لکھے جاتے ہیں۔ یہ تینوں سمتیات آپس میں عمودی ہیں۔ کسی بھی اکائی سمتیہ کی طرح یہ تین اکائی سمتیات اکائی لمبائی رکھتے ہیں۔ a_x کی سمت x محور کے بڑھتے جانب کو ہے۔ اسی طرح a_y کی سمت y محور کے بڑھتے جانب کو اور a_z کی سمت z محور کے بڑھتے جانب کو ہے۔ شکل 1.7-الف میں یہ تینوں اکائی سمتیات دکھائے گئے ہیں۔ اسی شکل میں نقطہ $(0, 1, 2)$ پر سمتیہ دکھایا گیا ہے جس کی لمبائی دو کے برابر ہے جبکہ یہ اکائی سمتیہ a_y کی سمت میں ہے۔ اس سمتیہ کو $2a_y$ لکھا جاسکتا ہے۔ یاد رہے کہ ایسے دو سمتیات برابر ہوتے ہیں جن کا طول برابر ہو اور جو ایک ہی سمت میں ہوں۔ یوں سمت تبدیل کئے بغیر سمتیہ کو کار تیزی محدود کے مرکز منتقل کرتے ہوئے اس کی قیمت نسبتاً آسانی سے لکھی جاسکتی ہے۔

شکل 1.8 میں مرکز سے (x_1, y_1, z_1) تک سمتیہ $r_1 = x_1 a_x + y_1 a_y + z_1 a_z$ اور مرکز سے (x_2, y_2, z_2) تک سمتیہ $r_2 = x_2 a_x + y_2 a_y + z_2 a_z$ دکھائے گئے ہیں۔ شکل میں سمتیہ r_{21} بھی دکھائی گئی ہے جس کی ڈم (x_1, y_1, z_1) اور نوک (x_2, y_2, z_2) پر ہے۔ سر سے ڈم جوڑنے کے اصول کے استعمال سے $r_2 = r_{21} + r_1$ لکھا جاسکتا ہے جس سے

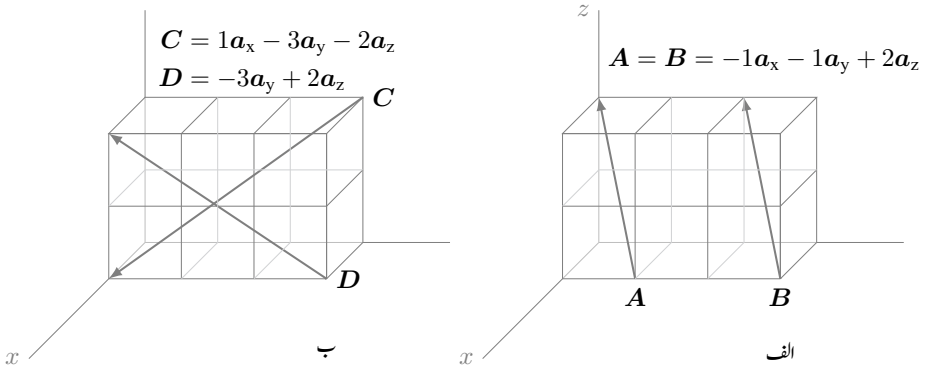
$$(1.4) \quad \begin{aligned} r_{21} &= r_2 - r_1 \\ &= (x_2 - x_1)a_x + (y_2 - y_1)a_y + (z_2 - z_1)a_z \end{aligned}$$



شکل 1.7: کارتیسی نظام کے اکائی سمتیات اور ان کا استعمال



شکل 1.8: کارتیسی نظام میں سمتیہ کی مساوات کا حصول



شکل 1.9: کارتیسی نظام میں چند سمتیات۔

حاصل ہوتا ہے۔ اس مساوات کے استعمال سے سمتیہ کی مساوات باآسانی حاصل ہوتی ہے۔ سمتیہ r_{21} لکھتے ہوئے زیرنوشت میں سمتیہ کی نوک کو 2 اور اس کی ڈم کو 1 سے ظاہر کیا گیا ہے۔ اس کتاب میں سمتیہ لکھتے ہوئے نوک اور ڈم کو اسی ترتیب سے زیرنوشت میں لکھا جائے گا۔ یوں سمتیہ r_{21} کو تین اجزاء $(x_2 - x_1)a_x$ ، $(y_2 - y_1)a_y$ اور $(z_2 - z_1)a_z$ کے مجموعے کی شکل میں لکھا جاسکتا ہے۔

شکل 1.7-ب میں مرکز سے $(1, 3, 2)$ تک سمتیہ دکھایا گیا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اس کو تین سمتیات کا مجموعہ لکھا جاسکتا ہے یعنی $1a_x + 3a_y + 2a_z$ جہاں اکائی سمتیات استعمال کرتے ہوئے تینوں اجزاء کو لکھا گیا ہے۔ سمتیہ کی ڈم $(0, 0, 0)$ اور اس کی نوک $(1, 3, 2)$ پر لیتے ہوئے یہی جواب مساوات 1.4 سے بھی حاصل ہوتا ہے۔

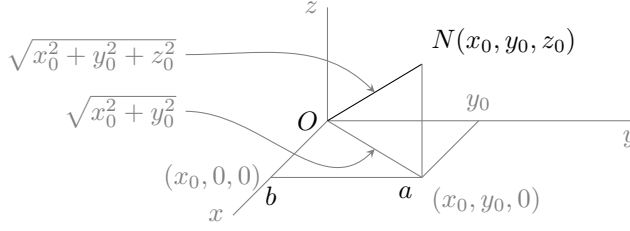
شکل 1.9-الف میں دو متوازی سمتیات A اور B دکھائے ہیں جن کی لمبائی برابر ہے۔ چونکہ ان کی لمبائی برابر ہے اور یہ دونوں ایک ہی سمت میں ہیں لہذا $A = B = -1a_x - 1a_y + 2a_z$ لکھا جائے گا۔ شکل 1.9-ب میں C کی ڈم سے a_x جانب ایک قدم اور یہاں سے $-a_y$ جانب تین قدم اور آخر کار $-a_z$ جانب دو قدم چلنے سے اس کی نوک تک پہنچا جاسکتا ہے لہذا $C = 1a_x - 3a_y - 2a_z$ لکھا جائے گا۔ اسی طرح D کی ڈم سے $-a_y$ جانب تین قدم اور پھر a_z جانب دو قدم چلتے ہوئے سمتیہ کی نوک تک پہنچا جاسکتا ہے لہذا $D = -3a_y + 2a_z$ لکھا جائے گا۔ سمتیہ D کو دو اجزاء کی شکل میں لکھا گیا ہے چونکہ اس کے تیسرے جزو کی لمبائی صفر کے برابر ہے۔

مشق 1.1: مساوات 1.4 کے استعمال سے شکل 1.9 میں تمام سمتیات لکھیں۔

جوابات: تمام جوابات شکل میں دئے گئے ہیں۔

شکل 1.10 میں مرکز سے نقطہ $N(x_0, y_0, z_0)$ تک کا فاصلہ ON مسئلہ فیثاغورث¹¹ سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ اس نقطے سے $z = 0$ سطح پر عمود سے نقطہ a حاصل ہوتا ہے۔ نقطہ a سے x محور پر عمود نقطہ b دیتا ہے۔ تکون Oba میں O سے b کا فاصلہ x_0 ہے جبکہ b سے a کا فاصلہ y_0 ہے۔ یوں فاصلہ Oa مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے $\sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ کے برابر ہو گا۔ تکون OaN میں a پر 90° کا زاویہ پایا جاتا ہے۔ یوں مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے ON کا فاصلہ $\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$ حاصل ہوتا ہے۔

Pythagoras theorem¹¹



شکل 1.10: کار تیسری نظام میں سمتیہ کا طول۔

مساوات 1.4 سمتیہ کی عمومی مساوات ہے۔ اس میں دئے سمتیہ r_{21} کی ڈم محدود کے مرکز پر رکھنے سے صاف ظاہر ہے کہ سمتیہ کی مقدار

$$(1.5) \quad |r_{21}| = r_{21} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

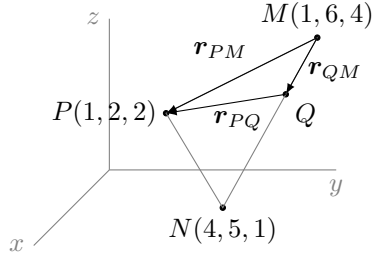
کے برابر ہے۔ اگر سمتیہ کو اس کی مقدار سے تقسیم کیا جائے تو حاصل جواب کی مقدار اکائی ہوگی جبکہ اس کی سمت میں کوئی تبدیلی رونما نہیں ہوگی۔ یوں r_{21} کو $|r_{21}|$ سے تقسیم کرتے ہوئے r_{21} کی سمت میں اکائی سمتیہ $a_{r_{21}}$ حاصل کی جاسکتی ہے۔

$$(1.6) \quad a_{r_{21}} = \frac{r_{21}}{|r_{21}|} = \frac{(x_2 - x_1)a_x + (y_2 - y_1)a_y + (z_2 - z_1)a_z}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}$$

یاد رہے کہ سمتیہ کی سمت اور طول تبدیل کئے بغیر اسے ایک مقام سے دوسری مقام منتقل کیا جاسکتا ہے۔ البتہ وہ سمتیہ جو کسی نقطے کی مقام تعین کرتا ہو کو اگر کہیں اور منتقل کیا جائے تو ایسی صورت میں سمتیہ کی نوک درکار نقطے پر نہیں رہے گی۔ اسی حقیقت کی بنا پر میدان ظاہر کرنے والے سمتیہ کو اپنی جگہ سے نہیں ہٹایا جاسکتا۔ میدانی سمتیہ کی ڈم اس مقام پر پائی جاتی ہے جہاں میدان بیان کی جا رہی ہو۔

سمتیات کے استعمال سے نقطہ (x, y, z) کے مقام کو $r = xa_x + ya_y + za_z$ لکھا جاتا ہے۔ کسی بھی سمتیہ مثلاً قوت F کو بالکل اسی طرح $F = F_x a_x + F_y a_y + F_z a_z$ لکھا جاتا ہے جہاں $F_x a_x$ ، $F_y a_y$ اور $F_z a_z$ اس کے تین اجزاء اور $|F| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$ قوت کی مقدار ہے۔

مثال 1.1: نقطہ $(-5, 2, -1)$ کا مقام ظاہر کرنے والا سمتیہ اور اس سمتیہ کا طول حاصل کریں۔ اسی سمتیہ کی سمت میں اکائی سمتیہ حاصل کریں۔



شکل 1.11: سمتیوں کا استعمال

حل: مرکز سے اس نقطے تک کا سمتیہ

$$\mathbf{r} = -5\mathbf{a}_x + 2\mathbf{a}_y - 1\mathbf{a}_z$$

ہے جبکہ اس سمتیہ کا طول

$$|\mathbf{r}| = \sqrt{5^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{30}$$

ہے۔ یوں اکائی سمتیہ درج ذیل ہو گا۔

$$\mathbf{a}_r = \frac{-5\mathbf{a}_x + 2\mathbf{a}_y - 1\mathbf{a}_z}{\sqrt{30}}$$

مثال 1.2: شکل 1.11 میں تین نقطے $M(1, 6, 4)$ ، $N(4, 5, 1)$ اور $P(1, 2, 2)$ دئے گئے ہیں۔ M اور N کے درمیان سیدھی لکیر پر M سے کل فاصلے کے $\frac{1}{3}$ پر نقطہ Q پایا جاتا ہے۔ P سے Q تک سمتیہ حاصل کرتے ہوئے ان دو نقطوں کے درمیان فاصلہ معلوم کریں۔ حل: M سے N تک سمتیہ

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{NM} &= (4 - 1)\mathbf{a}_x + (5 - 6)\mathbf{a}_y + (1 - 4)\mathbf{a}_z \\ &= 3\mathbf{a}_x - 1\mathbf{a}_y - 3\mathbf{a}_z \end{aligned}$$

ہے۔ M سے Q تک سمتیہ r_{QM} اور r_{NM} ایک ہی سمت میں ہیں جبکہ $|r_{QM}| = \frac{1}{3}|r_{NM}|$ کے برابر ہے۔ یوں

$$\mathbf{r}_{QM} = \frac{1}{3}\mathbf{r}_{NM} = \frac{1}{3}(3\mathbf{a}_x - 1\mathbf{a}_y - 3\mathbf{a}_z) = 1\mathbf{a}_x - \frac{1}{3}\mathbf{a}_y - 1\mathbf{a}_z$$

ہو گا۔ M سے P تک سمتیہ

$$\begin{aligned} r_{PM} &= (1-1)a_x + (2-6)a_y + (2-4)a_z \\ &= -4a_y - 2a_z \end{aligned}$$

ہے۔ شکل کو دیکھتے ہوئے ہم لکھ سکتے ہیں $r_{QM} + r_{PQ} = r_{PM}$ لہذا

$$\begin{aligned} r_{PQ} &= r_{PM} - r_{QM} \\ &= (-4a_y - 2a_z) - (1a_x - \frac{1}{3}a_y - 1a_z) \\ &= -1a_x - \frac{11}{3}a_y - 1a_z \end{aligned}$$

ہو گا۔ Q سے P تک فاصلہ $\sqrt{1^2 + \left(\frac{11}{3}\right)^2 + 1^2} = 3.93$ ہے۔

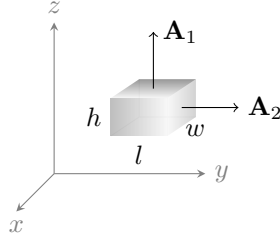
مشق 1.2: مثال 1.2 میں دئے نقطوں کو استعمال کرتے ہوئے M سے P تک سمتیہ حاصل کریں۔ اسی طرح P سے N تک سمتیہ اور M سے N تک سمتیہ حاصل کریں۔ پہلے دو جوابات کو استعمال کرتے ہوئے سرسے ڈم جوڑنے کے اصول سے تیسرا سمتیہ دوبارہ حاصل کریں۔

جوابات: $-5a_x - 4a_y$ ، $-1a_x + 4a_y + 12a_z$ اور $-6a_x + 12a_z$

1.5 سمتی رقبہ

کسی بھی سطح کے دو اطراف ہوتے ہیں۔ یوں سطح کے کسی بھی نقطے پر دو آپس میں الٹ سمتوں میں عمود بنائے جاسکتے ہیں۔ سیدھی سطح جس کا رقبہ S ہو کے ایک طرف پر اکائی عمود a_N اور دوسری طرف پر اکائی عمود $-a_N$ بنائے جاسکتے ہیں۔ اگر ان دو عمودوں میں سے ایک عمود مثلاً a_N کو سطح کی سمت¹² تصور کیا جائے تب اس سطح کا سمتی رقبہ¹³ $S a_N$ ہو گا۔ بند سطح کے بیرونی اکائی عمود کو سطح کی سمت تصور کیا جاتا ہے۔ شکل 1.12 میں سمتی رقبے A_1 اور A_2 دکھائے گئے ہیں جہاں بند سطح کے بیرونی عمود کو ہی سطح کی سمت دکھایا گیا ہے۔

¹² عمود سطح کے ساتھ نوے درجہ زاویہ بناتا ہے۔ a_N کے زیر نوشت میں N ، لفظ نوے کے پہلے حرف کی آواز کو ظاہر کرتا ہے۔
¹³ vector area



$$\mathbf{A}_1 = A_1 \mathbf{a}_{N1} = w l \mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{A}_2 = A_2 \mathbf{a}_{N2} = w h \mathbf{a}_y$$

شکل 1.12: سمتی رقبہ

1.6 غیر سمتی ضرب

دو سمتیات A اور B کے غیر سمتی ضرب¹⁴ سے مراد A کی مقدار ضرب B کی مقدار ضرب سمتیوں کے مابین چھوٹے زاویے کا کوسائن ہے۔

$$(1.7) \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \cos \theta_{AB}$$

اگر دونوں سمتیات کی ڈم ایک ہی جگہ پر نہ ہو تب ان کے مابین زاویہ دریافت کرنے کی خاطر سمتیوں کی سمت تبدیل کئے بغیر انہیں ایک نقطے پر منتقل کیا جاسکتا ہے۔ غیر سمتی ضرب دو سمتیوں کے مابین کیا جاتا ہے جبکہ اس کا حاصل جواب مقداری ہوتا ہے جس کی وجہ سے اسے مقداری ضرب بھی کہا جاتا ہے۔ غیر سمتی ضرب کو سمتیوں کے درمیان نقطے سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ اسی وجہ سے اسے ضرب نقطہ¹⁵ بھی کہا جاتا ہے۔ یوں $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ کو " A نقطہ B " پڑھا جاتا ہے۔ بالکل سادہ ضرب کی طرح $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ کو $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ بھی لکھا جاسکتا ہے یعنی غیر سمتی ضرب میں متغیرات کی ترتیب اہمیت نہیں رکھتی۔

کارٹیزی اکانی سمتیات \mathbf{a}_x ، \mathbf{a}_y اور \mathbf{a}_z آپس میں عمودی ہیں لہذا ان میں کسی بھی دو سمتیات کے درمیان 90 زاویہ پایا جاتا ہے۔ چونکہ $\cos 90 = 0$ کے برابر ہوتا ہے لہذا ان میں کسی بھی دو سمتیوں کا غیر سمتی ضرب صفر کے برابر ہوتا ہے یعنی

$$(1.8) \quad \mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_y = 0, \quad \mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_z = 0, \quad \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_z = 0$$

scalar product¹⁴
dot product¹⁵

ایک ہی سمت میں دو سمتیوں کے درمیان صفر زاویہ ہوتا ہے اور $\cos 0 = 1$ کے برابر ہے۔ اکائی سمتیہ کا طول بھی ایک کے برابر ہے لہذا مساوات 1.7 کے تحت \mathbf{a}_x اور \mathbf{a}_x کا غیر سمتی ضرب

$$\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_x = (|\mathbf{a}_x|)(|\mathbf{a}_x|)(\cos 0) = (1)(1)(1) = 1$$

ہو گا۔ بقایا دو کارٹیزی اکائی سمتیات کا خود غیر سمتی ضرب بھی ایک کے برابر ہے۔

$$(1.9) \quad \mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_x = 1, \quad \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_y = 1, \quad \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_z = 1$$

مساوات 1.8 اور مساوات 1.9 کو کرونیکر ڈیلٹا¹⁶ δ_{ij} کی مدد سے ایک ہی مساوات کی مدد سے یوں لکھا جاسکتا ہے۔

$$(1.10) \quad \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j = \delta_{ij}$$

جہاں

$$(1.11) \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{اگر } i \neq j \\ 1 & \text{اگر } i = j \end{cases}$$

کے برابر ہے یعنی $i = j$ کی صورت میں ہی δ_{ij} کی قیمت ایک جبکہ $i \neq j$ کی صورت میں ہی δ_{ij} کی قیمت صفر کے برابر لی جاتی ہے۔ یوں $\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_y$ کی صورت میں $i = \mathbf{a}_x$ جبکہ $j = \mathbf{a}_y$ کے برابر ہیں۔ یوں i اور j برابر نہیں ہیں لہذا حاصل جواب صفر کے برابر ہو گا۔ اس کے برعکس $\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_z$ کی صورت میں $i = \mathbf{a}_z$ اور $j = \mathbf{a}_z$ ہیں لہذا $i = j$ ہے اور یوں حاصل جواب ایک کے برابر ہے۔

کارٹیزی تین عمودی اکائیوں کی مدد سے سمتیات کا غیر سمتی ضرب نہایت آسانی سے حاصل ہوتا ہے۔ یوں اگر $\mathbf{A} = A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z$ اور $\mathbf{B} = B_x \mathbf{a}_x + B_y \mathbf{a}_y + B_z \mathbf{a}_z$ دو سمتیات ہوں تب ان کا غیر سمتی ضرب

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= (A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z) \cdot (B_x \mathbf{a}_x + B_y \mathbf{a}_y + B_z \mathbf{a}_z) \\ &= A_x B_x \mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_x + A_x B_y \mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_y + A_x B_z \mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_z \\ &\quad + A_y B_x \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_x + A_y B_y \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_y + A_y B_z \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_z \\ &\quad + A_z B_x \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_x + A_z B_y \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_y + A_z B_z \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_z \end{aligned}$$

ہو گا۔ مساوات 1.8 اور مساوات 1.9 کا سہارا لیتے ہوئے یوں

$$(1.12) \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

¹⁶ یہ ڈیولڈ کروئیکر کے نام سے منسوب ہے۔

حاصل ہوتا ہے۔ اس مساوات سے ہم دیکھتے ہیں کہ سمتیہ A کا خود غیر سمتی ضرب

$$(1.13) \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 = |\mathbf{A}|^2$$

اس کے طول کے مربع کے برابر ہے۔ یہ انتہائی اہم نتیجہ ہے جسے عموماً استعمال کرتے ہوئے سمتیہ کا طول حاصل کیا جاتا ہے۔

مساوات 1.7 اور مساوات 1.12 کی مدد سے دو سمتیوں کے مابین زاویہ معلوم کیا جاسکتا ہے یعنی

$$(1.14) \quad \theta_{AB} = \cos^{-1} \left(\frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{B})} \right) = \cos^{-1} \left(\frac{A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}} \right)$$

مثال 1.3: شکل 1.11 میں تھکون دکھایا گیا ہے جس کے نوک $M(1, 6, 4)$ ، $N(4, 5, 1)$ اور $P(1, 2, 2)$ ہیں۔ M پر زاویہ حاصل کریں۔

حل: مثال 1.2 میں $\mathbf{r}_{NM} = 3\mathbf{a}_x - 1\mathbf{a}_y - 3\mathbf{a}_z$ اور $\mathbf{r}_{PM} = 0\mathbf{a}_x - 4\mathbf{a}_y - 2\mathbf{a}_z$ حاصل کئے گئے۔ $|\mathbf{r}_{NM}| = \sqrt{3^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{19}$ اور $|\mathbf{r}_{PM}| = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20}$ ہیں جبکہ

$$\mathbf{r}_{NM} \cdot \mathbf{r}_{PM} = 0 + 4 + 6 = 10$$

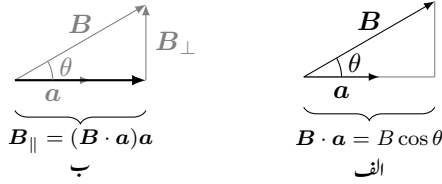
کے برابر ہے۔ یوں ان سمتیوں کے مابین زاویہ

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{10}{\sqrt{19}\sqrt{20}} \right) = 1.0321 \text{ rad}$$

یا 59.137° ہے۔

شکل 1.13-الف میں سمتیہ B اور اکائی سمتیہ \mathbf{a} دکھائے گئے ہیں۔ ان کا غیر سمتی ضرب

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{B}| |\mathbf{a}| \cos \theta = B \cos \theta$$



شکل 1.13: کسی بھی سمت میں سمتیہ کے جزو کا حصول۔

کے برابر ہے۔ شکل سے واضح ہے کہ یہی a کی سمت میں B کے جزو کا طول B_{\parallel} ¹⁷ ہے۔ یوں کسی بھی سمت میں B کے جزو کا طول حاصل کرنے کی خاطر B اور اس سمت کی اکائی سمتیہ کا غیر سمتی ضرب حاصل کریں۔ یوں حاصل طول کا اکائی سمتیہ کے ساتھ ضرب یعنی $a(B \cdot a)$ سے اکائی سمتیہ کی سمت میں B کا سمتی جزو حاصل ہوتا ہے۔ شکل 1.13-ب میں a کی سمت میں B کا سمتی جزو B_{\parallel} دکھایا گیا ہے۔ شکل سے واضح ہے کہ B سے $B_{\parallel} a$ منفی کرنے سے B_{\perp} حاصل ہوتا ہے جو B کا وہ جزو ہے جو a کے عمودی ہے۔

غیر سمتی ضرب کا حاصل جواب دو صورتوں میں صفر کے برابر ہوتا ہے۔ پہلی صورت وہ ہے جب دونوں سمتیوں میں سے کم از کم ایک سمتیہ کا طول صفر کے برابر ہو۔ دوسری صورت وہ ہے جب دونوں سمتیات آپس میں عمودی ہوں۔ عمودی ہونے کی صورت میں ان کے مابین نوے درجے کا زاویہ ہو گا اور $\cos 90 = 0$ کے برابر ہوتا ہے۔ یوں دو سمتیوں کے نقطہ ضرب صفر کے برابر ہونے سے اخذ کیا جاتا ہے کہ یہ آپس میں عمودی ہیں۔

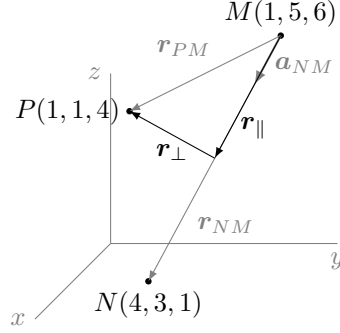
مثال 1.4: شکل 1.14 میں تین نقطے $M(1, 5, 6)$ ، $N(4, 3, 1)$ اور $P(1, 1, 4)$ دئے گئے ہیں۔ M اور N سے گزرتی سیدھی لکیر سے P کا عمودی فاصلہ حاصل کریں۔

حل: M سے N تک سمتیہ $r_{NM} = 3a_x - 2a_y - 5a_z$ ہے جس کا طول $|r_{NM}| = \sqrt{38}$ ہے۔ یوں اس سمت میں اکائی سمتیہ $a_{NM} = \frac{3a_x - 2a_y - 5a_z}{\sqrt{38}}$ ہو گا۔ اسی طرح M سے P تک سمتیہ $r_{PM} = -4a_y - 2a_z$ ہے۔ a_{NM} کی سمت میں r_{PM} کا طول

$$r_{\parallel} = r_{PM} \cdot a_{NM} = (-4a_y - 2a_z) \cdot \left(\frac{3a_x - 2a_y - 5a_z}{\sqrt{38}} \right)$$

$$= \frac{0 + 8 + 10}{\sqrt{38}} = \frac{18}{\sqrt{38}}$$

¹⁷ B_{\parallel} لکھے ہوئے زیر نوشت میں دو متوازی لکیریں یہ بتاتی ہیں کہ B کا یہ وہ حصہ ہے جو a کے متوازی ہے۔ اسی طرح عمودی مقدار کو عموداً \perp کی علامت سے ظاہر کیا جاتا ہے۔



شکل 1.14: متوازی اور عمودی اجزاء۔

ہے یوں a_{NM} سمت میں r_{PM} کا سمتی جزو

$$r_{\parallel} = r_{\parallel} a_{NM} = \frac{18}{\sqrt{38}} \left(\frac{3a_x - 2a_y - 5a_z}{\sqrt{38}} \right) = \frac{18}{38} (3a_x - 2a_y - 5a_z)$$

ہے۔ r_{PM} سے r_{\parallel} منفی کرنے سے لکیر سے P تک عمودی سمتیہ r_{\perp} حاصل ہوتا ہے

$$\begin{aligned} r_{\perp} &= r_{PM} - r_{\parallel} = (-4a_y - 2a_z) - \frac{18}{38} (3a_x - 2a_y - 5a_z) \\ &= \frac{-27a_x - 58a_y + 7a_z}{19} \end{aligned}$$

جس کا طول $\frac{\sqrt{27^2 + 58^2 + 7^2}}{19} = 3.3873$ ہے۔ یوں P کا لکیر سے عمودی فاصلہ 3.3873 ہے۔

r_{\parallel} اور r_{\perp} آپس میں عمودی ہیں لہذا ان کا نقطہ ضرب

$$\begin{aligned} r_{\parallel} \cdot r_{\perp} &= \frac{18}{38} (3a_x - 2a_y - 5a_z) \cdot \left(\frac{-27a_x - 58a_y + 7a_z}{19} \right) \\ &= \frac{18}{722} (-81 + 116 - 35) \\ &= 0 \end{aligned}$$

صفر کے برابر ہے۔

شکل 1.14 میں اگر M پر r_{NM} کی ڈم رکھی جائے تب r_{NM} کی نوک N کا مقام تعین کرتا ہے۔ عموماً کسی بھی نقطے کا مقام محدود کے مرکز $(0,0,0)$ کی نسبت سے طے کیا جاتا ہے۔ ایسا سمتیہ جس کی ڈم مرکز پر رکھتے ہوئے اس کی نوک نقطے کا مقام طے کرے مقام تعین کنندہ سمتیہ¹⁸ کہلاتا ہے۔ اگر تعین کنندہ سمتیہ کو مرکز سے ہٹایا جائے تب ظاہر ہے اس کی نوک اصل مقام طے کرنے سے قاصر ہوگی۔

مثال 1.5: شکل 1.14 میں M سے شروع ہوتے اور N جانب بڑھتی سیدھی لکیر پر کسی بھی نقطے کا مقام تعین کرتے تعین کنندہ سمتیہ حاصل کریں۔

حل: مرکز $(0,0,0)$ سے نقطہ M تک کا سمتیہ $r_M = 1a_x + 5a_y + 6a_z$ ہے جبکہ M سے N جانب اکائی سمتیہ a_{NM} گزشتہ مثال میں حاصل کیا گیا۔ اکائی سمتیہ a_{NM} کی سمت میں M سے s فاصلے پر نقطہ Q تک کا سمتیہ sa_{NM} ہے۔ یوں مرکز سے Q تک سمتیہ $r_Q = r_M + sa_{NM}$ ہوگا۔

$$r_Q = (1a_x + 5a_y + 6a_z) + s \left(\frac{3a_x - 2a_y - 5a_z}{\sqrt{38}} \right)$$

اس مساوات میں s متغیر ہے جسے تبدیل کرتے ہوئے سیدھی لکیر پر کسی بھی نقطہ Q تک پہنچا جاسکتا ہے۔

مثال 1.6: $z = z_0$ پر $1a_z$ کے عمودی سیدھی سطح کی مساوات حاصل کریں جہاں z_0 مستقل ہے۔

حل: نقطہ $N_1(0,0,z_0)$ سے کسی بھی نقطہ $N_2(x,y,z)$ تک کا سمتیہ $r_{21} = xa_x + ya_y + (z - z_0)a_z$ ہے۔ سطح پر کسی بھی سمتیہ اور سطح کے عمودی سمتیہ آپس میں نوے درجے زاویہ پر پائے جاتے ہیں لہذا ان کا غیر سمتی ضرب صفر کے برابر ہوگا۔ یوں اگر N_2 اسی عمودی سطح پر پایا جائے تب

$$1a_z \cdot [xa_x + ya_y + (z - z_0)a_z] = z - z_0 = 0$$

ہو گا جس سے اس سطح کی مساوات $z = z_0$ حاصل ہوتی ہے۔

اس قیمت کو r_{21} میں پُر کرتے ہوئے $r_{21} = xa_x + ya_y$ حاصل ہوتا ہے جہاں x اور y آزاد متغیرات ہیں۔ چونکہ مرکز سے N_1 کا تعین کنندہ سمتیہ $r_{10} = z_0a_z$ ہے لہذا $z = z_0$ سطح پر کسی بھی نقطہ N_2 کا تعین کنندہ سمتیہ یعنی سطح کی سمتی مساوات $r_{20} = xa_x + ya_y + z_0a_z$ ہوگی۔

مشق 1.3: مرکز سے $(2, 1, 3)$ تک کی سمتیہ ایک سیدھی سطح کی عمودی سمتیہ ہے۔ اس سطح کی مساوات حاصل کریں۔

جواب: $2x + y + 3z = 14$

1.7 سمتی ضرب یا صلیبی ضرب

دو سمتیات A اور B کے سمتی ضرب¹⁹ کا حاصل جو اب سمتیہ ہوتا ہے جس کا طول A کی مقدار ضرب B کی مقدار ضرب سمتیوں کے مابین چھوٹے زاویے کے سائن کے برابر ہے۔ حاصل سمتیہ A اور B سمتیات کی عمودی سمت میں ہوتا ہے جسے اکائی عمودی سمتیہ a_N سے ظاہر کیا جائیگا۔

$$(1.15) \quad A \times B = |A||B| \sin \theta_{AB} a_N$$

جس سیدھی سطح پر A اور B دونوں پائے جائیں، اس سطح کے دو عمودی سمتیات میں سے ایک ہے۔ a_N کو دائیں ہاتھ کے قانون²⁰ سے یوں حاصل کیا جاسکتا ہے۔

vector product¹⁹
right hand rule²⁰

دائیں ہاتھ کی ہتھیلی سیدھی اور انگوٹھے کو بقایا چار انگلیوں کے عمود میں رکھتے ہوئے پہلی انگلی کو A اور دوسری انگلی کو B کی سمت میں رکھیں۔ اس صورت میں انگوٹھا a_N کی سمت میں ہو گا۔

اگر دونوں سمتیات کی دُم ایک ہی جگہ پر نہ ہو تب ان کے مابین زاویہ دریافت کرنے کی خاطر سمتیوں کی سمت تبدیل کئے بغیر انہیں ایک نقطے پر منتقل کیا جاسکتا ہے۔ سمتی ضرب کو سمتیوں کے درمیان صلیبی نشان \times سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ اسی وجہ سے اسے صلیبی ضرب²¹ بھی کہا جاتا ہے اور $A \times B$ کو " A صلیب B " پڑھا جاتا ہے۔ سمتی ضرب میں سمتیوں کی ترتیب نہایت اہم ہے اور انہیں الٹانے سے حاصل جواب کی سمت الٹی ہو جاتی ہے۔

$$(1.16) \quad A \times B = -B \times A$$

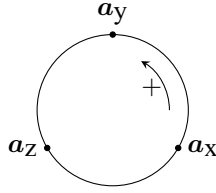
اکائی سمتیات a_x اور a_y کے مابین نوے درجے کا زاویہ ہے اور $\sin 90 = 1$ کے برابر ہے جبکہ دائیں ہاتھ کے قانون سے ان کے صلیبی ضرب کی سمت a_z حاصل ہوتی ہے۔ یوں $a_x \times a_y = a_z$ کے برابر ہے۔ اسی طرح $a_y \times a_z = a_x$ اور $a_z \times a_x = a_y$ کے برابر حاصل ہوتے ہیں۔ مساوات 1.16 کے تحت یوں $a_x \times a_x = -a_x$ ، $a_y \times a_x = -a_z$ اور $a_z \times a_y = -a_x$ لکھے جاسکتے ہیں۔ دو متوازی سمتیوں کے درمیان صفر درجے کا زاویہ ہوتا ہے اور $\sin 0 = 0$ کے برابر ہے لہذا $a_x \times a_x = 0$ کے برابر ہے۔ اسی طرح $a_y \times a_y = 0$ اور $a_z \times a_z = 0$ کے برابر ہیں۔ ان تمام جوابات کو ایک جگہ لکھتے ہیں۔

$$(1.17) \quad \begin{aligned} a_x \times a_y &= a_z & a_y \times a_z &= a_x & a_z \times a_x &= a_y \\ a_x \times a_x &= 0 & a_y \times a_y &= 0 & a_z \times a_z &= 0 \end{aligned}$$

یہی جوابات شکل 1.15 کی مدد سے حاصل کئے جاسکتے ہیں۔ اس شکل میں گھڑی کی الٹ سمت مثبت سمت ہے۔ یوں اگر $a_x \times a_y$ حاصل کرنا ہو تو شکل میں a_x سے شروع ہو کر a_y کی جانب کم راستے پر چلتے ہوئے a_z حاصل ہوتا ہے۔ ساتھ ہی ساتھ a_x سے a_y جانے کی خاطر مثبت راستہ اختیار کیا گیا لہذا جواب مثبت یعنی $a_z +$ ہو گا۔ اس کے برعکس $a_z \times a_y$ حاصل کرنے کی خاطر a_z سے a_y جانب کم راستے پر چلتے ہوئے a_x حاصل ہوتا ہے البتہ یہ راستہ گھڑی کے الٹ سمت یعنی منفی سمت میں ہے لہذا جواب $-a_x$ ہو گا۔

مساوات 1.17 کی مدد سے $A = A_x a_x + A_y a_y + A_z a_z$ اور $B = B_x a_x + B_y a_y + B_z a_z$ کی صلیبی ضرب

$$\begin{aligned} A \times B &= (A_x a_x + A_y a_y + A_z a_z) \times (B_x a_x + B_y a_y + B_z a_z) \\ &= A_x B_x a_x \times a_x + A_x B_y a_x \times a_y + A_x B_z a_x \times a_z \\ &\quad + A_y B_x a_y \times a_x + A_y B_y a_y \times a_y + A_y B_z a_y \times a_z \\ &\quad + A_z B_x a_z \times a_x + A_z B_y a_z \times a_y + A_z B_z a_z \times a_z \end{aligned}$$



شکل 1.15: صلیبی ضرب کا حصول۔

کو

$$(1.18) \quad \mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_y B_z - A_z B_y)\mathbf{a}_x + (A_z B_x - A_x B_z)\mathbf{a}_y + (A_x B_y - A_y B_x)\mathbf{a}_z$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اس جواب کو قالب کے حتمی قیمت کی شکل میں یوں لکھا جا سکتا ہے۔

$$(1.19) \quad \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

مندرجہ بالا قالب کو کتاب کے آخر میں صفحہ 839 پر ضمیمے میں آپ کے آسانی کے لئے دوبارہ پیش کیا گیا ہے۔ اس ضمیمے کو ایک مرتبہ دیکھ لیں۔ یوں اگر $\mathbf{A} = 2\mathbf{a}_x - 3\mathbf{a}_y + 1\mathbf{a}_z$ اور $\mathbf{B} = 6\mathbf{a}_x + 5\mathbf{a}_y - 4\mathbf{a}_z$ ہوں تب

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ 2 & -3 & 1 \\ 6 & 5 & -4 \end{vmatrix} \\ &= [(-3)(-4) - (1)(5)]\mathbf{a}_x - [(2)(-4) - (1)(6)]\mathbf{a}_y + [(2)(5) - (-3)(6)]\mathbf{a}_z \\ &= 7\mathbf{a}_x + 14\mathbf{a}_y + 28\mathbf{a}_z \end{aligned}$$

ہو گا۔

مثال 1.7: $N_1(2, 3, 1)$ ، $N_2(1, 6, 5)$ اور $N_3(-2, -3, 2)$ سیدھی سطح پر پائے جاتے ہیں۔ اس سطح کی مساوات حاصل کریں۔

حل:

$$\begin{aligned} r_{21} &= (1 - 2)\mathbf{a}_x + (6 - 3)\mathbf{a}_y + (5 - 1)\mathbf{a}_z = -1\mathbf{a}_x + 3\mathbf{a}_y + 4\mathbf{a}_z \\ r_{31} &= (-2 - 2)\mathbf{a}_x + (-3 - 3)\mathbf{a}_y + (2 - 1)\mathbf{a}_z = -4\mathbf{a}_x - 6\mathbf{a}_y + 1\mathbf{a}_z \end{aligned}$$

کے سمتی ضرب سے ان کا عمودی سمتیہ حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned} r_N &= (-1a_x + 3a_y + 4a_z) \times (-4a_x - 6a_y + 1a_z) \\ &= 6a_z + 1a_y + 12a_z + 3a_x - 16a_y + 24a_x \\ &= 27a_x - 15a_y + 18a_z \end{aligned}$$

سطح پر دئے گئے تین نقطوں سے سطح پر کسی بھی نقطہ $N_4(x, y, z)$ تک کا سمتیہ اس عمودی سمتیہ کے نوے درجے زاویہ پر ہو گا اور یوں ان کا غیر سمتی ضرب صفر کے برابر ہو گا۔ N_1 سے N_4 تک سمتیہ $r_{41} = (x-2)a_x + (y-3)a_y + (z-1)a_z$ کے استعمال سے

$$r_{41} \cdot r_N = [(x-2)a_x + (y-3)a_y + (z-1)a_z] \cdot (27a_x - 15a_y + 18a_z) = 0$$

لکھ کر

$$27(x-2) - 15(y-3) + 18(z-1) = 0$$

سے

$$27x - 15y + 18z = 27$$

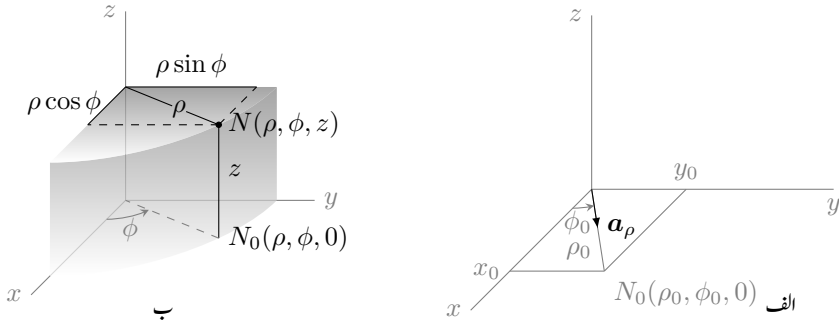
سیدھی سطح کی مساوات حاصل ہوتی ہے۔ ایسی مساوات میں x ، y اور z کے مختلف عمودی سمتیہ میں a_x ، a_y اور a_z کے مختلف 27، 15 اور 18 ہوتے ہیں۔

سطح کی مساوات سے $z = \frac{9-9x+5y}{6}$ لکھا جا سکتا ہے۔ سطح پر N_4 کی تعین کنندہ مساوات $r = xa_x + ya_y + za_z$ میں z کی قیمت پُر کرتے ہوئے سطح کی سمتی مساوات

$$r = xa_x + ya_y + \left(\frac{9-9x+5y}{6} \right) a_z$$

لکھی جا سکتی ہے جہاں x اور y آزاد متغیرات ہیں جبکہ z کو بطور تابع متغیرہ لکھا گیا ہے۔

مشق 1.4: $A = 1a_x + 3a_y - 2a_z$ اور $B = 5a_x - 2a_y - 3a_z$ کی صورت میں $A \times B$ ، $B \times A$ ، $A \times A$ اور $B \times B$ حاصل کریں۔



شکل 1.16: نلکی محدد

خلاء میں کسی بھی نقطے کا مقام کارٹیسسی محدد کے علاوہ دیگر طرز کے محدد سے بھی تعین کیا جاسکتا ہے۔ ماہرین طبیعیات تقریباً ایک درجن اقسام کے محددی نظام استعمال کرتے ہیں۔ ہم اس کتاب میں کارٹیسسی نظام کے علاوہ دو مزید اقسام کے محددی نظام استعمال کریں گے۔ آئیں انہیں پر غور کریں۔

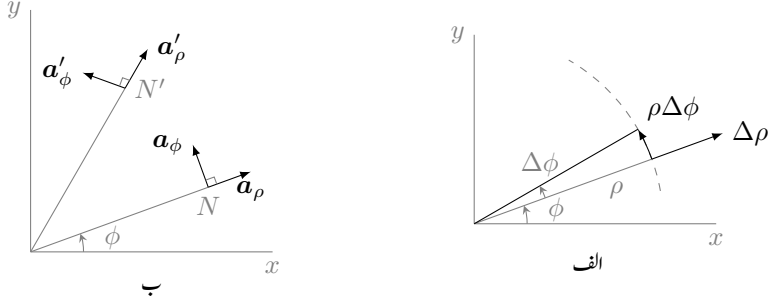
1.8 گول نلکی محدد

کارٹیسسی نظام میں کسی بھی نقطے کا مقام مرکز سے x ، y اور z سمتوں میں فاصلوں سے طے کیا جاتا ہے۔ آئیں اب ایسا نظام دیکھیں جس میں ایک عدد زاویہ اور دو عدد فاصلے استعمال کرتے ہوئے کسی بھی نقطے کا مقام طے ہو۔

شکل 1.16-الف میں $z = 0$ سطح پر نقطہ N_0 دکھایا گیا ہے جسے کارٹیسسی محدد میں $N_0(x_0, y_0, 0)$ لکھا جائے گا۔ اگر مرکز سے N_0 تک سیدھی لکیر کی لمبائی ρ_0 اور x محدد سے اس لکیر کا زاویہ ϕ_0 ہو تب اسی نقطے کو گول نلکی محدد²² کے نظام میں $N_0(\rho_0, \phi_0, 0)$ لکھا جاتا ہے۔ اس کتاب میں گول نلکی محدد کا نام چھوٹا کر کے اسے نلکی محدد پکارا جائے گا۔ اگر $z = 0$ سطح پر مرکز سے نقطے کی جانب اکائی سمتیہ a_ρ ہو تب مرکز سے نقطے تک سمتیہ کو

$$(1.20) \quad \rho = \rho_0 a_\rho \quad (\phi = \phi_0, \quad z = 0)$$

cylindrical coordinate system²²



شکل 1.17: ٹکلی محدد میں متغیرات کے تبدیلی سے فاصلے کا حصول اور اکائی سمتیات۔

لکھا جاسکتا ہے۔ ٹکلی اور کارٹیسسی نظام میں z محدد یکساں ہیں۔

شکل 1.16 سے کارٹیسسی اور ٹکلی محدد کے تعلق اخذ کئے جاسکتے ہیں۔ یوں ٹکلی محدد کے متغیرات (ρ, ϕ, z) سے کارٹیسسی متغیرات (x, y, z) یوں حاصل ہوتے ہیں۔

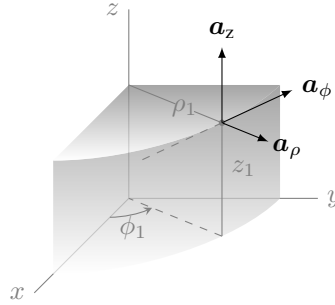
$$(1.21) \quad \begin{aligned} x &= \rho \cos \phi \\ y &= \rho \sin \phi \\ z &= z \end{aligned}$$

اسی طرح (x, y, z) سے (ρ, ϕ, z) یوں حاصل کئے جاتے ہیں۔

$$(1.22) \quad \begin{aligned} \rho &= \sqrt{x^2 + y^2} \quad (\rho \geq 0) \\ \phi &= \tan^{-1} \frac{y}{x} \\ z &= z \end{aligned}$$

درج بالا دونوں تعلقات کو کتاب کے آخر میں صفحہ 841 پر ضمیمے میں دوبارہ پیش کیا گیا ہے۔ مندرجہ بالا مساوات میں z کی صرف مثبت قیمت لی گئی۔ ہم z کی قیمت مثبت ہی لیتے ہیں۔

شکل 1.17-الف میں ϕ زاویہ پر ρ رداں کا ہلکی سیاہی میں دکھایا سمتیہ نقطہ N ہے۔ اس شکل میں ϕ اور z تبدیل کئے بغیر ρ کو $\Delta \rho$ بڑھتا دکھایا گیا ہے۔ اس صورت میں سمتیہ کی نوک $\Delta \rho$ فاصلہ طے کرتی ہے۔ نقطہ N سے $\Delta \rho$ کی سمت میں اکائی سمتیہ جسے a_ρ لکھا جاتا ہے، ٹکلی محدد کی بنیادی اکائی سمتیہ ہے۔ اس سمتیہ کو شکل 1.17-ب میں دکھایا گیا ہے۔



شکل 1.18: نکلے محدود کے اکائی سمتیات۔

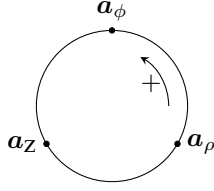
شکل 1.17-الف میں ρ اور z تبدیل کئے بغیر ϕ کو $\Delta\phi$ بڑھا کر اسی سمتیہ کو گاڑھی سیاہی میں دوبارہ دکھایا گیا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ سمتیہ کی نوک نے ρ رداس کے گول دائرے پر حرکت کرتے ہوئے $\rho\Delta\phi$ فاصلہ طے کیا۔ یوں اگر زاویہ کو 2π یا 0 ریڈین تبدیل کیا جائے تو سمتیہ کی نوک گول دائرے پر ایک مکمل چکر کاٹے گی۔ جیسے جیسے $\Delta\phi$ کو کم سے کم کیا جائے ویسے ویسے $\rho\Delta\phi$ گول دائرے کے مماس کی صورت اختیار کرے گی حتیٰ کہ $d\phi$ کی صورت میں $\rho d\phi$ گول دائرے کا مماس ہو گا۔ نقطہ N پر بڑھتے ϕ جانب مماس کی سمت میں اکائی سمتیہ کو a_ϕ لکھا جاتا ہے۔ اس سمتیہ کو شکل 1.17-ب میں دکھایا گیا ہے۔

اسی طرح اگر نقطہ N پر صرف z کو Δz تبدیل کیا جائے تب سمتیہ کی نوک Δz فاصلہ طے کرے گی۔ Δz کی سمت میں اکائی سمتیہ جسے a_z لکھا جاتا ہے، نکلے محدود کی تیسری اور آخری بنیادی اکائی سمتیہ ہے۔ نکلے محدود کے تین اکائی سمتیات a_ρ ، a_ϕ اور a_z مل کر دائیں ہاتھ کا عمودی نظام دیتے ہیں۔ نقطہ (ρ_1, ϕ_1, z_1) پر نکلے محدود کے اکائی سمتیات کو شکل 1.18 میں دکھایا گیا ہے۔ a_ρ گول سطح $\rho = \rho_1$ کے عمودی ہے۔ یہ $\phi = \phi_1$ اور $z = z_1$ سطحوں پر پایا جاتا ہے۔ اسی طرح a_ϕ سیدھی سطح $\phi = \phi_1$ کے عمودی ہے۔ یہ $z = z_1$ سطح پر پایا جاتا ہے اور $\rho = \rho_1$ نکلے سطح کا مماس ہے۔ a_z اکائی سمتیہ $z = z_1$ سطح کے عمودی ہے۔ یہ $\rho = \rho_1$ اور $\phi = \phi_1$ سطحوں پر پایا جاتا ہے۔

دائیں ہاتھ کے عمودی نظام میں سمتی ضرب کا حاصل جواب صفحہ 20 پر دئے گئے دائیں ہاتھ کے قانون کی مدد سے حاصل کیا جاتا ہے۔ یوں

$$(1.23) \quad \mathbf{a}_\rho \times \mathbf{a}_\phi = \mathbf{a}_z, \quad \mathbf{a}_\phi \times \mathbf{a}_z = \mathbf{a}_\rho, \quad \mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_\rho = \mathbf{a}_\phi$$

لکھا جاسکتا ہے۔ یہی جوابات شکل 1.19 سے بھی اخذ کئے جاسکتے ہیں۔



شکل 1.19: صلیبی ضرب کی حاصل اکائی سمتیہ۔

کسی سمتیہ کا خود سمتی ضرب صفر کے برابر ہوتا ہے لہذا

$$(1.24) \quad \mathbf{a}_\rho \times \mathbf{a}_\rho = 0, \quad \mathbf{a}_\phi \times \mathbf{a}_\phi = 0, \quad \mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_z = 0$$

لکھا جا سکتا ہے جبکہ کسی بھی اکائی سمتیہ کا خود غیر سمتی ضرب ایک کے برابر ہوتا ہے لہذا

$$(1.25) \quad \mathbf{a}_\rho \cdot \mathbf{a}_\rho = 1, \quad \mathbf{a}_\phi \cdot \mathbf{a}_\phi = 1, \quad \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_z = 1$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اسی طرح کسی بھی دو عمودی سمتیات کا غیر سمتی ضرب صفر کے برابر ہوتا ہے یعنی

$$(1.26) \quad \mathbf{a}_\rho \cdot \mathbf{a}_\phi = 0, \quad \mathbf{a}_\phi \cdot \mathbf{a}_z = 0, \quad \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_\rho = 0$$

غیر سمتی ضرب کو کرونیٹر ڈیلٹا کی مدد سے یوں لکھا جا سکتا ہے۔

$$(1.27) \quad \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j = \delta_{ij}$$

جہاں

$$(1.28) \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{اگر } i \neq j \\ 1 & \text{اگر } i = j \end{cases}$$

کے برابر ہے۔

آپ دیکھتے ہیں کہ کسی بھی نقطہ $N(\rho, \phi, z)$ پر اکائی سمتیات حاصل کرنے کی خاطر محدد کے متغیرات ρ , ϕ اور z کو باری باری انتہائی کم بڑھایا جاتا ہے۔ جس سمت میں نقطہ حرکت کرے، اسی سمت میں اکائی سمتیہ ہوگی۔ شکل 1.17-ب میں دو مختلف نقاط N اور N' پر تکی محدد کے عمودی اکائی سمتیات دکھائے گئے ہیں۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ تکی محدد کے عمودی اکائی سمتیات کی سمت کا دارومدار اس نقطے پر ہے جہاں انہیں حاصل کیا جائے۔ آپ جانتے

ہیں کہ کار تیبسی نظام میں نقطے کا مقام تبدیل کرنے سے کار تیبسی اکائی سمتیات تبدیل نہیں ہوتے۔ یوں نکلے محدد کے اکائی سمتیات اٹل نہیں ہیں۔ یہ ایک انتہائی اہم حقیقت ہے جو مکمل لیتے وقت پیچیدگیاں پیدا کرتا ہے۔ مکمل لیتے وقت کار تیبسی اکائی سمتیات اٹل ہونے کی بنا پر مکمل کے باہر لے جائے جاسکتے ہیں جبکہ نکلے محدد کے a_ρ اور a_ϕ اکائی سمتیات کو مکمل کے باہر نہیں لے جایا جاسکتا۔ یاد رہے کہ کسی بھی نقطہ N پر حاصل کئے گئے a_ϕ ، a_ρ اور a_z آپس میں عمودی ہوں گے جبکہ کسی اور نقطہ N' پر حاصل کئے گئے a'_ϕ ، a'_ρ اور a_z آپس میں عمودی ہوں گے۔

1.8.1 نکلے اکائی سمتیات کا کار تیبسی اکائی سمتیات کے ساتھ غیر سمتی ضرب

شکل 1.20-الف میں نقطہ N پر اکائی سمتیات a_x ، a_y اور a_ρ دکھائے گئے ہیں۔ a_x اور a_ρ کے مابین زاویہ ϕ ہے جبکہ اکائی سمتیات کی لمبائی ایک ہوتی ہے لہذا

$$(1.29) \quad a_\rho \cdot a_x = (1)(1)(\cos \phi) = \cos \phi$$

ہے۔ a_ρ اور a_y کے مابین زاویہ $(90^\circ - \phi)$ ہے لہذا

$$(1.30) \quad a_\rho \cdot a_y = (1)(1)[\cos(90^\circ - \phi)] = \sin \phi$$

کے برابر ہے۔ اس مساوات میں

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

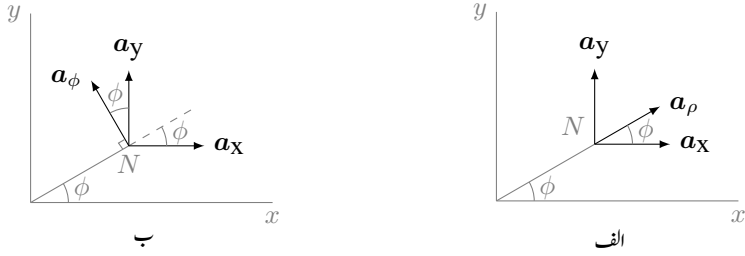
کو استعمال کرتے ہوئے $\cos(90^\circ - \phi) = \sin \phi$ لکھا گیا ہے۔ شکل 1.20-ب میں نقطہ N پر اکائی سمتیات a_ϕ ، a_x اور a_y دکھائے گئے ہیں۔ a_ϕ اور a_x کے مابین زاویہ $(90^\circ + \phi)$ ہے لہذا

$$(1.31) \quad a_\phi \cdot a_x = (1)(1)[\cos(90^\circ + \phi)] = -\sin \phi$$

ہے۔ a_ϕ اور a_y کے مابین زاویہ ϕ ہے لہذا

$$(1.32) \quad a_\phi \cdot a_y = (1)(1)(\cos \phi) = \cos \phi$$

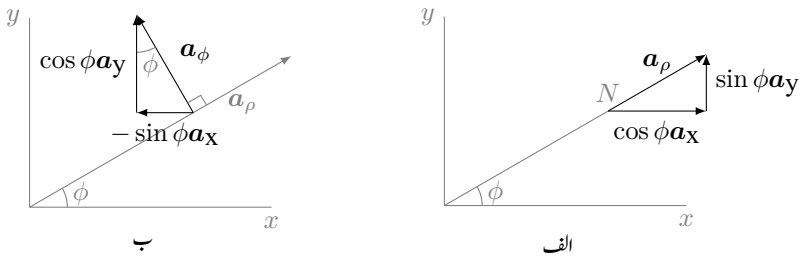
کے برابر ہے۔ a_z کا a_x اور a_y کے ساتھ غیر سمتی ضرب صفر کے برابر ہے۔ اس کی وجہ ان کے مابین نوے درجے کا زاویہ ہے۔ ان تمام غیر سمتی ضرب کو جدول 1.1 میں کیجا کیا گیا ہے۔



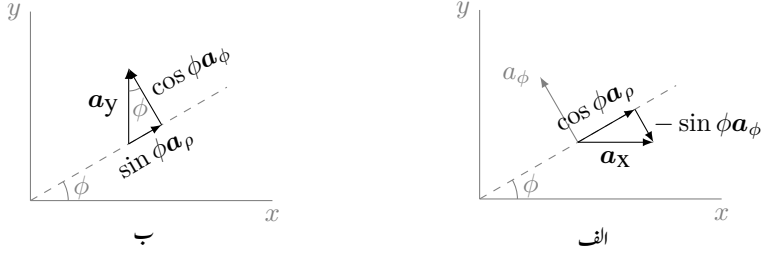
شکل 1.20: تکی اکائی سمتیات کا کار تیبسی اکائی سمتیات کے ساتھ غیر سمتی ضرب۔

جدول 1.1: تکی اکائی سمتیات کا کار تیبسی اکائی سمتیات کے ساتھ غیر سمتی ضرب۔

a_z	a_y	a_x	
0	$\sin \phi$	$\cos \phi$	a_ρ
0	$\cos \phi$	$-\sin \phi$	a_ϕ
1	0	0	a_z



شکل 1.21: a_ρ اور a_ϕ کا کار تیبسی نظام میں تبادلہ۔



شکل 1.22: a_x اور a_y کا نکیلے محدود میں تبادلہ۔

1.8.2 نکیلے اور کارٹیزیائی سمتیات کا تعلق

شکل 1.21- الف میں نقطہ N پر اکائی سمتیہ a_ρ دکھایا گیا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کارٹیزیائی محدود میں اسی اکائی سمتیہ کو دو عدد سمتیات کی مدد سے لکھا جاسکتا ہے۔ a_ρ کی لمبائی ایک کے برابر ہے۔ یوں مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے

$$(1.33) \quad \begin{aligned} a_\rho &= \cos \phi a_x + \sin \phi a_y \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} a_x + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} a_y \end{aligned}$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں دوسرے قدم پر تمام نکیلے محدود کے متغیرات کو کارٹیزیائی متغیرات کی شکل میں لکھا گیا ہے۔ شکل 1.21- ب میں نقطہ N پر اکائی سمتیہ a_ϕ دکھایا گیا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کارٹیزیائی محدود میں اسی اکائی سمتیہ کو دو عدد سمتیات کی مدد سے یوں لکھا جاسکتا ہے

$$(1.34) \quad \begin{aligned} a_\phi &= -\sin \phi a_x + \cos \phi a_y \\ &= -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} a_x + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} a_y \end{aligned}$$

جہاں دوسرے قدم پر تمام نکیلے محدود کے متغیرات کو کارٹیزیائی متغیرات کی شکل میں لکھا گیا ہے۔

شکل 1.22- الف میں a_x کا نکیلے محدود میں تبادلہ دکھایا گیا ہے۔ جس نقطے پر ایسا درکار ہو، اس نقطے پر a_x کی دُم رکھیں۔ مرکز سے نقطے تک نقطہ دار سیدھی لکیر کھینچتے ہوئے اسے مزید آگے بڑھائیں۔ اس نقطے پر a_ρ اسی لکیر کی سمت میں ہو گا جبکہ a_ϕ لکیر کے ساتھ نوے درجے کا زاویہ بنائے گا۔ شکل میں a_ϕ دکھایا گیا ہے۔ جیسا شکل میں دکھایا گیا ہے، a_x کی نوک سے نقطہ دار لکیر پر عمود بنائیں۔ صاف ظاہر ہے کہ a_x کو دو عدد سمتیات کی مدد سے لکھا جاسکتا

ہے۔ ان میں سے ایک سمتیہ a_ρ کی سمت میں اور دوسرا سمتیہ a_ϕ کی الٹ جانب کو ہو گا۔ یوں

$$(1.35) \quad a_x = \cos \phi a_\rho - \sin \phi a_\phi$$

لکھا جا سکتا ہے۔ شکل 1.22-ب میں a_y کا تکی محدود میں تبادلہ دکھایا گیا ہے۔ یہاں نقطہ پر a_y کی ڈم رکھتے ہوئے اس کی نوک سے نقطہ دار لکیر پر عمود کھینچا گیا ہے۔ یوں

$$(1.36) \quad a_y = \sin \phi a_\rho + \cos \phi a_\phi$$

لکھا جا سکتا ہے۔

آئیں مساوات 1.33 تا مساوات 1.36 کو جدول 1.1 کی مدد سے حاصل کریں۔ کسی بھی سمتیہ A کو کار تیبسی یا تکی محدود میں لکھا جا سکتا ہے۔ یوں

$$(1.37) \quad \begin{aligned} A &= A_x a_x + A_y a_y + A_z a_z \\ &= A_\rho a_\rho + A_\phi a_\phi + A_z a_z \end{aligned}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ ان میں پہلی مساوات کا باری باری a_x ، a_y اور a_z کے ساتھ غیر سمتی ضرب لیتے ہوئے

$$(1.38) \quad \begin{aligned} a_x \cdot A &= A_x a_x \cdot a_x + A_y a_x \cdot a_y + A_z a_x \cdot a_z = A_x \\ a_y \cdot A &= A_x a_y \cdot a_x + A_y a_y \cdot a_y + A_z a_y \cdot a_z = A_y \\ a_z \cdot A &= A_x a_z \cdot a_x + A_y a_z \cdot a_y + A_z a_z \cdot a_z = A_z \end{aligned}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ A کو کار تیبسی نظام میں لکھنے کی خاطر A_x ، A_y اور A_z درکار ہوتے ہیں جنہیں مندرجہ بالا مساوات سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ اسی طرح مساوات 1.37 کے نچلے حصے کا باری باری a_ρ ، a_ϕ اور a_z کے ساتھ غیر سمتی ضرب لیتے ہوئے

$$(1.39) \quad \begin{aligned} a_\rho \cdot A &= A_\rho a_\rho \cdot a_\rho + A_\phi a_\rho \cdot a_\phi + A_z a_\rho \cdot a_z = A_\rho \\ a_\phi \cdot A &= A_\rho a_\phi \cdot a_\rho + A_\phi a_\phi \cdot a_\phi + A_z a_\phi \cdot a_z = A_\phi \\ a_z \cdot A &= A_\rho a_z \cdot a_\rho + A_\phi a_z \cdot a_\phi + A_z a_z \cdot a_z = A_z \end{aligned}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ یوں A کو تکی نظام میں لکھنے کی خاطر A_ρ ، A_ϕ اور A_z کو مندرجہ بالا مساوات کی مدد سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

آئیں a_ρ کو کار تیبسی نظام میں لکھیں۔ یوں $A = a_\rho$ کو کار تیبسی نظام میں لکھنا مطلوب ہے۔ مساوات 1.38 کے مطابق A_x حاصل کرنے کی خاطر $a_x \cdot A$ لینا ہو گا۔ جدول 1.1 کے استعمال سے

$$A_x = a_x \cdot A = a_x \cdot a_\rho = \cos \phi$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح جدول کو استعمال کرتے ہوئے

$$A_y = \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{A} = \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_\rho = \sin \phi$$

اور

$$A_z = \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{A} = \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_\rho = 0$$

حاصل کرتے ہیں۔ یوں کارٹیزیسی نظام میں $\mathbf{A} = A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z$ لکھتے ہوئے

$$\mathbf{a}_\rho = \cos \phi \mathbf{a}_x + \sin \phi \mathbf{a}_y$$

لکھا جائے گا۔ یہی جواب مساوات 1.33 میں بھی حاصل کیا گیا تھا۔

\mathbf{a}_ϕ کو بھی اسی طرح کارٹیزیسی نظام میں لکھا جاسکتا ہے۔ ایسا کرنے کی خاطر جدول 1.1 کی مدد سے اس سمتیہ کا باری باری \mathbf{a}_x ، \mathbf{a}_y اور \mathbf{a}_z کے ساتھ غیر سمتی ضرب لیتے ہیں۔

$$A_x = \mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_\phi = -\sin \phi$$

$$A_y = \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_\phi = \cos \phi$$

$$A_z = \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_\phi = 0$$

یوں

$$\mathbf{a}_\phi = A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z = -\sin \phi \mathbf{a}_x + \cos \phi \mathbf{a}_y$$

حاصل ہوتا ہے۔ یہی جواب مساوات 1.34 بھی دیتا ہے۔

آپ سے گزارش ہے کہ جدول 1.34 کو یاد کرنے کی کوشش نہ کریں۔ اپنے آپ میں یہ صلاحیت پیدا کریں کہ ان جوابات کو آپ جلد اخذ کر سکیں۔

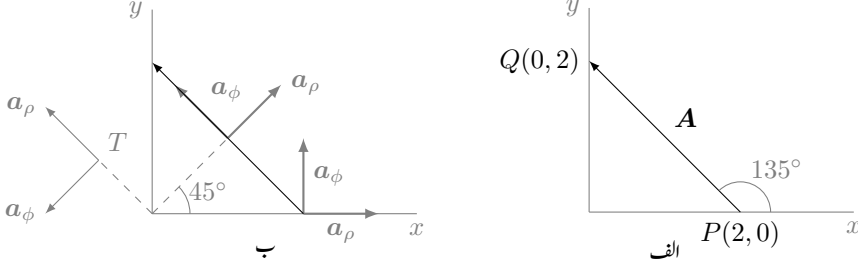
مشق 1.5: \mathbf{a}_x ، \mathbf{a}_y اور \mathbf{a}_z کو جدول 1.1 کی مدد سے نکلے محدد میں لکھیں۔

جوابات:

$$\mathbf{a}_x = \cos \phi \mathbf{a}_\rho - \sin \phi \mathbf{a}_\phi$$

$$\mathbf{a}_y = \sin \phi \mathbf{a}_\rho + \cos \phi \mathbf{a}_\phi$$

$$\mathbf{a}_z = \mathbf{a}_z$$



شکل 1.23: کار تیبسی اور تکلی محدود میں سمتیہ۔

شکل 1.23 میں $P(2,0)$ سے $Q(0,2)$ تک سمتیہ A دکھایا گیا ہے۔ کار تیبسی نظام میں

$$(1.40) \quad A = -2a_x + 2a_y$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس سمتیہ کی حتمی قیمت

$$|A| = \sqrt{A \cdot A} = \sqrt{(-2a_x + 2a_y) \cdot (-2a_x + 2a_y)} = \sqrt{8}$$

ہے۔ آئیں اسی سمتیہ کو تکلی محدود میں لکھیں۔ ایسا کرنے کی خاطر A_ρ اور A_ϕ درکار ہوں گے جنہیں حاصل کرنے کی خاطر جدول 1.1 کی مدد سے $a_\phi \cdot A$ اور $a_\rho \cdot A$ حاصل کرتے ہیں۔

$$A_\rho = a_\rho \cdot (-2a_x + 2a_y) = -2 \cos \phi + 2 \sin \phi$$

$$A_\phi = a_\phi \cdot (-2a_x + 2a_y) = 2 \sin \phi + 2 \cos \phi$$

یوں

$$(1.41) \quad A = 2(-\cos \phi + \sin \phi)a_\rho + 2(\sin \phi + \cos \phi)a_\phi$$

لکھا جاسکتا ہے۔ آئیں دیکھیں کہ اس کی حتمی قیمت کیا حاصل ہوتی ہے۔ اکائی سمتیات کا غیر سمتی ضرب $a_\rho \cdot a_\rho =$

1، $\mathbf{a}_\phi \cdot \mathbf{a}_\phi = 1$ اور $\mathbf{a}_\rho \cdot \mathbf{a}_\phi = 0$ استعمال کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}| &= \sqrt{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}} \\ &= \sqrt{2^2(-\cos \phi + \sin \phi)^2 + 2^2(\sin \phi + \cos \phi)^2} \\ &= \sqrt{4(\cos^2 \phi + \sin^2 \phi - 2 \cos \phi \sin \phi) + 4(\cos^2 \phi + \sin^2 \phi + 2 \cos \phi \sin \phi)} \\ &= \sqrt{8(\cos^2 \phi + \sin^2 \phi)} \\ &= \sqrt{8} \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں آخری قدم پر $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ کا استعمال کیا گیا ہے۔ یقیناً سمتیہ کی حتمی قیمت محدود کے نظام پر منحصر نہیں۔

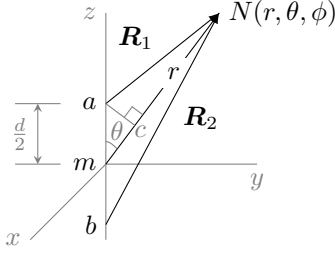
مساوات 1.40 اور مساوات 1.41 ایک ہی سمتیہ کو لکھنے کے دو طریقے ہیں۔ یہاں کارتیسی نظام کا استعمال نہایت آسان ثابت ہوا۔ آگے چل کر آپ دیکھیں گے کہ کہیں مسئلوں میں ٹنگی محدود کا استعمال زیادہ آسان ہو گا۔ آئیں مساوات 1.40 پر مزید غور کریں۔ اس مساوات میں اکائی سمتیات از خود اٹل نہیں ہیں۔ ان کی سمتوں کا دارومدار زاویہ ϕ پر ہے۔ شکل 1.23-ب میں $\phi = 0^\circ$ ، $\phi = 45^\circ$ اور $\phi = 135^\circ$ پر \mathbf{a}_ρ اور \mathbf{a}_ϕ دکھائے گئے ہیں۔ نقطہ P یعنی $\phi = 0^\circ$ پر مساوات 1.41

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\phi=0^\circ} &= 2(-\cos 0^\circ + \sin 0^\circ)\mathbf{a}_\rho + 2(\sin 0^\circ + \cos 0^\circ)\mathbf{a}_\phi \\ &= -2\mathbf{a}_\rho + 2\mathbf{a}_\phi \end{aligned}$$

صورت اختیار کر لیتی ہے۔ اس مساوات کے مطابق $\phi = 0^\circ$ پر \mathbf{A} کو دو عدد سمتیات کے مجموعہ کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے جن میں پہلی سمتیہ \mathbf{a}_ρ کے الٹ سمت میں ہے اور اس کی لمبائی دو کے برابر ہے جبکہ دوسری سمتیہ کی مقدار دو اور اس کی سمت \mathbf{a}_ϕ کی سمت میں ہی ہے۔ 1.23-ب میں نقطہ P پر \mathbf{A} کی سمت واقع بڑھتی \mathbf{a}_ϕ اور ٹھٹھتی \mathbf{a}_ρ کی سمت میں ہے۔ یاد رہے کہ اس مساوات میں \mathbf{a}_ρ اور \mathbf{a}_ϕ کو $\phi = 0^\circ$ پر حاصل کیا گیا ہے۔ $\phi = 0^\circ$ پر \mathbf{a}_ρ اور \mathbf{a}_x برابر ہوتے ہیں اور اسی طرح \mathbf{a}_ϕ اور \mathbf{a}_y برابر ہوتے ہیں۔ یہی وجہ ہے کہ مساوات 1.40 میں \mathbf{a}_x کی جگہ \mathbf{a}_ρ اور \mathbf{a}_y کی جگہ \mathbf{a}_ϕ پُر کرنے سے مندرجہ بالا مساوات لکھی جا سکتی ہے۔

$\phi = 45^\circ$ پر مساوات 1.41

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\phi=45^\circ} &= 2(-\cos 45^\circ + \sin 45^\circ)\mathbf{a}_\rho + 2(\sin 45^\circ + \cos 45^\circ)\mathbf{a}_\phi \\ &= 2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\mathbf{a}_\rho + 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\mathbf{a}_\phi \\ &= \sqrt{8}\mathbf{a}_\phi \end{aligned}$$



شکل 1.24: جفت قطب کے برقی بار سے دور نقطے تک فاصلے۔

صورت اختیار کر لیتی ہے۔ اس مساوات کے مطابق $\phi = 45^\circ$ پر A صرف اور صرف a_ϕ کی سمت میں ہے اور اس کی لمبائی $\sqrt{8}$ ہے۔ شکل 1.23-ب میں یہ حقیقت واضح ہے کہ $\phi = 45^\circ$ پر A کی سمت a_ϕ ہی ہے۔ یاد رہے کہ اس مساوات میں a_ρ اور a_ϕ کو $\phi = 45^\circ$ پر حاصل کیا گیا ہے۔ شکل میں اکائی سمتیات کو عین A کے اوپر کھینچا گیا ہے تاکہ سمتیات کی سمتوں کا موازنہ آسانی سے کیا جاسکے۔

آپ نے دیکھا کہ نئی محدود میں سمتیہ کی مساوات کا دار و مدار اس نقطے پر ہے جس نقطے کے اکائی سمتیات استعمال کئے جائیں۔ آئیں دیکھیں کہ $\phi = 135^\circ$ پر پائے جانے والے نقطے T کے اکائی سمتیات استعمال کرتے ہوئے A کیسا لکھا جائے گا۔ مساوات 1.41 میں $\phi = 135^\circ$ پڑ کرنے سے

$$\begin{aligned} A_{\phi=135^\circ} &= 2(-\cos 135^\circ + \sin 135^\circ)a_\rho + 2(\sin 135^\circ + \cos 135^\circ)a_\phi \\ &= 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)a_\rho + 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)a_\phi \\ &= \sqrt{8}a_\rho \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس مساوات کے مطابق $\phi = 135^\circ$ کے اکائی سمتیات استعمال کرتے ہوئے A کو a_ρ کی سمت میں $\sqrt{8}$ لمبائی کا سمتیہ لکھا جاسکتا ہے۔ شکل سے یہ حقیقت واضح ہے۔

مثال 1.8: شکل 1.24 میں z محدود پر نقطہ $a(0,0,\frac{d}{2})$ پر مثبت برقی بار $+Q$ اور نقطہ $b(0,0,-\frac{d}{2})$ پر منفی برقی بار $-Q$ پائے جاتے ہیں۔ ایسے دو برابر لیکن الٹ علامت کے دو قریب قریب پائے جانے والے برقی باروں کے جوڑی کو جفت قطب²⁴ کہتے ہیں۔ دکھائے گئے سمتیہ فاصلوں R_1 اور R_2 کو کروئی محدود میں لکھیں۔

electric charge²³
dipole²⁴

حل: m سے N تک فاصلہ r ہے اور اس سمت میں اکائی سمتیہ \mathbf{a}_r ہے۔ نقطہ a سے r پر عمودی لکیر لگائی گئی ہے جو a سے c پر ملتی ہے۔ یوں ac کی سمت کروئی محدود کے اکائی سمتیہ \mathbf{a}_θ کی سمت میں ہے۔ شکل کو دیکھتے ہوئے $mc = \frac{d}{2} \cos \theta$ اور $ac = \frac{d}{2} \sin \theta$ لکھے جاسکتے ہیں۔ یوں \mathbf{R}_1 کو ہم a سے c تک سمتیہ $\frac{d}{2} \sin \theta \mathbf{a}_\theta$ اور c سے N تک سمتیہ $(r - \frac{d}{2} \cos \theta) \mathbf{a}_r$ کے مجموعے کی شکل میں

$$(1.42) \quad \mathbf{R}_1 = \frac{d}{2} \sin \theta \mathbf{a}_\theta + (r - \frac{d}{2} \cos \theta) \mathbf{a}_r$$

لکھ سکتے ہیں۔ ہم اسی طرح شکل 1.24 میں N سے m تک لکیر کو m سے آگے بڑھا کر b سے اس پر عمودی لکیر کھینچ کر شکل کو دیکھتے ہوئے \mathbf{R}_2 کی مساوات بھی لکھ سکتے ہیں البتہ ایسا کرنے کی بجائے آئیں \mathbf{R}_2 کی مساوات تحلیلی طریقے سے حاصل کریں۔ شکل کو دیکھتے ہوئے

$$\mathbf{R}_2 = \frac{d}{2} \mathbf{a}_z + r \mathbf{a}_r$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں کارٹیسی محدود کی اکائی سمتیہ \mathbf{a}_z اور کروئی محدود کی اکائی سمتیہ \mathbf{a}_r استعمال کئے گئے۔ کروئی محدود میں کسی بھی لکیر کی طرح

$$\mathbf{R}_2 = A_r \mathbf{a}_r + A_\theta \mathbf{a}_\theta + A_\phi \mathbf{a}_\phi$$

لکھا جاسکتا ہے۔ آئیں $A_r = \mathbf{R}_2 \cdot \mathbf{a}_r$ سے حاصل کریں۔

$$A_r = \left(\frac{d}{2} \mathbf{a}_z + r \mathbf{a}_r \right) \cdot \mathbf{a}_r = \frac{d}{2} \cos \theta + r$$

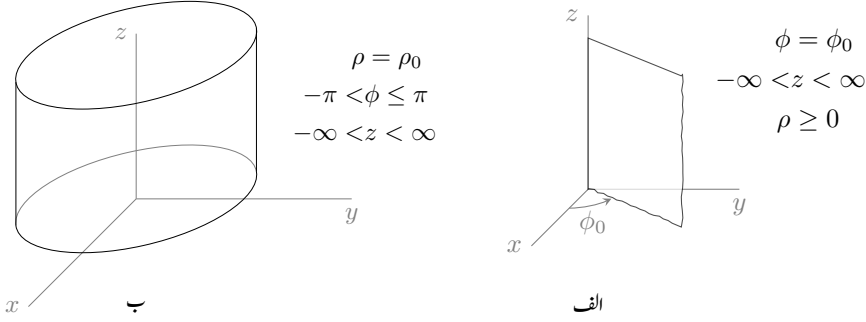
اسی طرح $A_\theta = \mathbf{R}_2 \cdot \mathbf{a}_\theta$ سے حاصل کرتے ہیں۔

$$A_\theta = \left(\frac{d}{2} \mathbf{a}_z + r \mathbf{a}_r \right) \cdot \mathbf{a}_\theta = -\frac{d}{2} \sin \theta$$

اسی طرح $A_\phi = \mathbf{R}_2 \cdot \mathbf{a}_\phi$ لکھتے ہوئے $A_\phi = 0$ حاصل ہوتا ہے۔ یوں

$$(1.43) \quad \mathbf{R}_2 = \left(\frac{d}{2} \cos \theta + r \right) \mathbf{a}_r - \frac{d}{2} \sin \theta \mathbf{a}_\theta$$

لکھا جاسکتا ہے۔

شکل 1.25: $\phi = \phi_0$ اور $\rho = \rho_0$ سطحیں۔

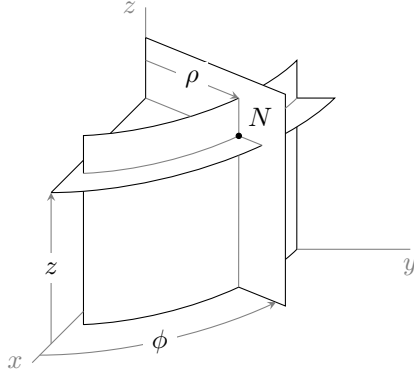
1.8.3 نگی لامحدود سطحیں

شکل 1.25-الف میں ϕ تبدیل کئے بغیر ρ اور z کی قیمتیں تبدیل کرتے ہوئے $\phi = \phi_0$ سطح کا حصول دکھایا گیا ہے۔ یہ سطح نگی شکل رکھتی ہے جس کا اوپر والا منہ اور نچلا منہ کھلے ہیں یعنی ان پر ڈھکن نہیں۔ شکل-ب میں ρ تبدیل کئے بغیر ϕ اور z کو تبدیل کرتے ہوئے $\rho = \rho_0$ سطح کا حصول دکھایا گیا ہے۔ ان دونوں لامحدود سطحوں کے کچھ حصے ان اشکال میں دکھائے گئے ہیں۔ شکل-الف میں ρ کی قیمت ثابت جبکہ z کی قیمت مثبت یا منفی ممکن ہے۔ شکل-ب میں زاویہ کل 2π ریڈیئن تبدیل ہو سکتا ہے۔ یوں زاویے کا مثبت حد π ریڈیئن یعنی 180 درجہ ہے جبکہ اس کا منفی 25 حد $-\pi$ یعنی -180 درجہ ہے۔ نگی محدود اور کارٹیسسی نظام دونوں میں $z = z_0$ سطح یکساں بنتی ہے۔

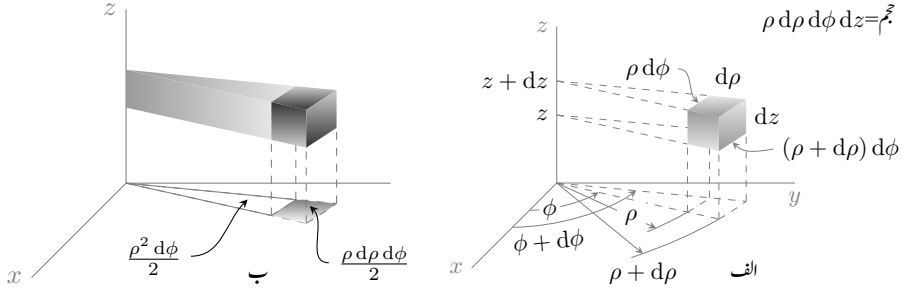
جیسے شکل 1.26 میں دکھایا گیا ہے، $\rho = \rho_1$ اور $\phi = \phi_1$ سطحیں a_z کی سیدھ میں سیدھی لکیر پر ملتے ہیں۔ اسی طرح $\rho = \rho_1$ اور $z = z_1$ سطحیں ایک گول دائرے پر ملتے ہیں جبکہ $\phi = \phi_1$ اور $z = z_1$ سطحیں a_ρ کی سیدھ میں سیدھی لکیر پر ملتے ہیں۔ $\rho = \rho_1$ اور $\phi = \phi_1$ اور $z = z_1$ سطحیں صرف اور صرف ایک ہی نقطہ N پر اکٹھے ملتے ہیں۔ نگی محدود میں کسی بھی نقطے کا مقام اسی طرح تین سطحوں کے تقاطع نقطہ سے حاصل کیا جاتا ہے البتہ $(0, 0, z)$ تک پہنچنے کی خاطر ایسا کرنے کی ضرورت نہیں ہوتی۔

کسی بھی نقطہ $N(\rho_1, \phi_1, z_1)$ پر $\rho = \rho_1$ اور $\phi = \phi_1$ اور $z = z_1$ سطحیں بنانے کے بعد اگر نگی محدود کے متغیرات کو $d\rho$ ، $d\phi$ اور dz بڑھا کر مزید تین سطحیں کھینچے جائیں تو یہ چھ سطحیں مل کر منحرف مکعب کو گھیریں گے جسے شکل

²⁵حقیقت میں منفی حد 180° کو نہیں چھوٹا۔ اگر منفی حد 180° کو چھوئے تب منفی x محدود مرتبہ شامل ہوتا ہے۔



شکل 1.26: تکلی محدود کے تین سطیوں۔



شکل 1.27: تکلی محدود میں انتہائی چھوٹی حجم۔

1.27-الف میں دکھایا گیا ہے۔ رداسی سمت میں اس منحرف مکعب کے اطراف کی لمبائی $d\rho$ جبکہ dz سمت کے اطراف کی لمبائی dz ہے۔ a_ϕ سمت میں z محدود کے قریبی گول طرف کی لمبائی $\rho d\phi$ جبکہ محدود سے دور طرف کی گول لمبائی $(\rho + d\rho) d\phi$ ہے۔ جیسے جیسے اس منحرف مکعب کو چھوٹا کیا جائے ویسے ویسے یہ ایک درست مکعب کی صورت اختیار کرتا ہے لہذا نہایت چھوٹے حجم کو مکعب تصور کرتے ہوئے اس کا حجم $\rho d\rho d\phi dz$ لکھا جاسکتا ہے۔

شکل 1.27-ب میں چھوٹے منحرف مکعب کو رداسی سمت میں z محدود تک بڑھا کر پیچر یا فانہ کی شکل میں دکھایا گیا ہے۔ $z = 0$ سطح پر اس کا عمودی سایہ بھی دکھایا گیا ہے۔ ρ رداس کے گول دائرے کے مرکز سے $d\phi$ زاویے پر دو لکیریں دائرے تک کھینچنے سے $\frac{\rho^2 d\phi}{2}$ رقبہ گھیرا جاتا ہے۔ اگر رداس $\rho + d\rho$ ہو تب رقبہ $\frac{(\rho + d\rho)^2 d\phi}{2}$ ہو گا۔ یوں

شکل-ب میں چھوٹے مکعب کے سایہ کا رقبہ dS

$$\begin{aligned} dS &= \frac{(\rho + d\rho)^2 d\phi}{2} - \frac{\rho^2 d\phi}{2} \\ &= \frac{\rho^2 d\phi + 2\rho d\rho d\phi + (d\rho)^2 d\phi}{2} - \frac{\rho^2 d\phi}{2} \\ &= \rho d\rho d\phi + \frac{(d\rho)^2 d\phi}{2} \\ &\approx \rho d\rho d\phi \end{aligned}$$

ہو گا۔ یہاں آخری قدم پر d کی علامت، مجموعہ کے پہلے رکن میں دو مرتبہ جبکہ دوسرے رکن میں تین مرتبہ ہے۔ یوں دوسرے اور پہلے رکن کی نسبت $\frac{d\rho}{2\rho} = \frac{0.5(d\rho)^2 d\phi}{\rho d\rho d\phi}$ ہو گی۔ $d\rho$ کو کم سے کم 26 کرتے ہوئے دوسرے رکن کو قابل نظر انداز بناتے ہوئے نظر انداز کیا گیا ہے۔ یوں $\rho d\rho d\phi$ رقبہ اور dz بلندی کے مکعب کا حجم $\rho d\rho d\phi dz$ ہو گا۔

شکل 1.27 کو درست مکعب تصور کرتے ہوئے، اس کے اطراف کی لمبائی $\rho d\phi$ ، $d\rho$ اور dz لی جاتی ہے۔ یوں مکعب کے چٹائی اور اوپر سطح کا رقبہ مستطیل کے اطراف کو ضرب دیتے ہوئے $\rho d\rho d\phi$ لکھا جا سکتا ہے۔ اسی طرح سامنے اور پیچھے سطحوں کا رقبہ $d\rho dz$ جبکہ بائیں اور دائیں سطحوں کا رقبہ $\rho d\phi dz$ لکھا جا سکتا ہے۔

شکل 1.27-الف میں ٹکلی محدود کے تینوں متغیرات تبدیل کرتے ہوئے ہم چھوٹے مکعب کے $N(\rho, \phi, z)$ کونے سے $N'(\rho + d\rho, \phi + d\phi, z + dz)$ کونے پہنچتے ہیں۔ N سے N' تک سمتیہ کو

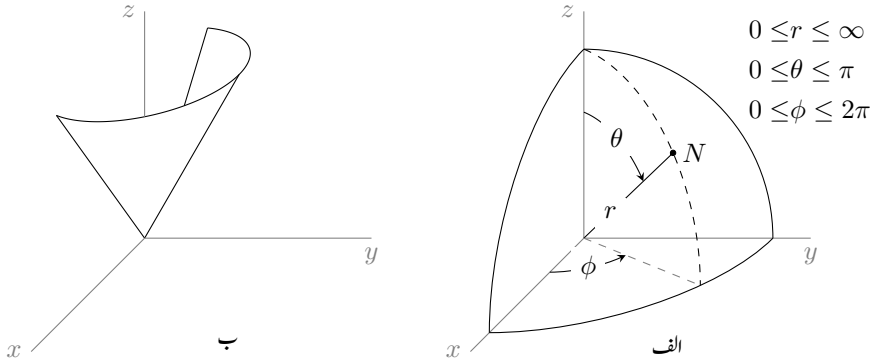
$$(1.44) \quad dL = d\rho a_\rho + \rho d\phi a_\phi + dz a_z$$

لکھا جاتا ہے۔ یہ مساوات کسی بھی دو قریبی نقطوں کے مابین سمتیہ فاصلے کو ظاہر کرتی ہے۔

1.9 کروئی محدود

سیدھی لکیروں اور سیدھی سطحوں کو کارٹیسی محدود میں زیادہ آسانی سے ظاہر کیا جا سکتا ہے جبکہ ٹکلی سطحوں کو ظاہر کرنے کے لئے ٹکلی محدود بہتر ثابت ہوتا ہے۔ اسی طرح کرہ اشکال کے سطحوں کو کروئی محدود میں باآسانی لکھا جا سکتا ہے۔ آئیں کروئی نظام پر غور کریں۔

²⁶ کسی بھی متغیر ρ میں چھوٹی سی تبدیلی $\Delta\rho$ لکھا جاتا ہے جبکہ اس میں کم سے کم تبدیلی $d\rho$ لکھا جاتا ہے۔ $d\rho$ کو تقریباً صفر سمجھا جا سکتا ہے یعنی $0 \rightarrow d\rho$ ہے۔



شکل 1.28: (الف) کروی محدود کے متغیرات۔ (ب) $\theta = \theta_0$ سطح کا کچھ حصہ۔

شکل 1.28-الف میں کروی محدود کے متغیرات r ، θ اور ϕ دکھائے گئے ہیں۔ محدود کے مرکز سے نقطہ N تک کے فاصلے r کو کروی رداس پکارا جاتا ہے جبکہ z محدود سے کروی رداس تک زاویے کو θ لکھا جاتا ہے۔ x محدود سے رداس کے عمودی سائے تک زاویہ ϕ ہے۔ کروی اور نگلی نظام میں ϕ یکساں بیان کیا جاتا ہے۔ رداس کی قیمت مثبت لی جاتی ہے۔ یوں $r \geq 0$ ممکن ہے۔ θ کی کم سے کم قیمت 0° اور زیادہ سے زیادہ قیمت 180° ہے جبکہ ϕ کی کم سے کم قیمت 0° اور زیادہ سے زیادہ قیمت 360° ہے۔

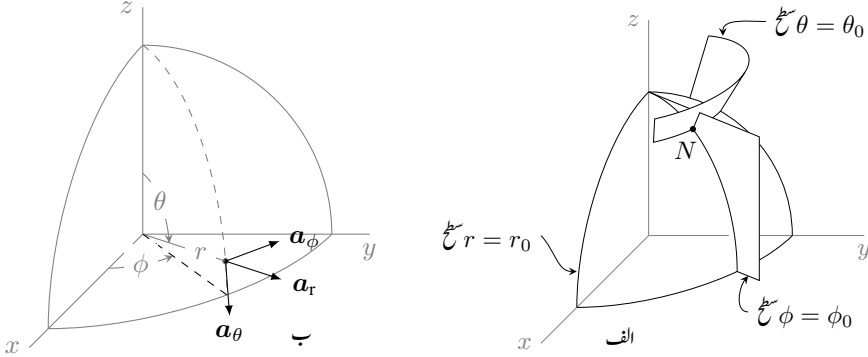
r اور ϕ تبدیل کئے بغیر θ کو 0 سے بڑھاتے ہوئے π ریڈینز کرنے سے نقطہ N شکل 1.28-الف میں نقطہ دار لکیر پر چلتے ہوئے مثبت z محدود سے شروع ہو کر منفی z محدود پر پہنچتا ہے۔ اسے نقطہ دار لکیر کو کرہ ارض کے خط طول بلد²⁷ تصور کیا جا سکتا ہے۔ شکل-الف میں θ کا 0° تا 90° تبدیل ہوتا دکھایا گیا ہے۔ اسی طرح r اور θ تبدیل کئے بغیر ϕ کو 0° تا 360° تبدیل کرنے سے نقطہ N گول دائرے پر z محدود کے گرد ایک چکر کاٹے گا۔ یہ حرکت کرہ ارض کے خط عرض بلد²⁸ پر چلنے کے مانند ہے۔ θ اور ϕ تبدیل کئے بغیر r کو تبدیل کرنے سے نقطہ N مرکز سے سیدھی باہر نکلتی لکیر پر حرکت کرتا ہے۔

r تبدیل کئے بغیر θ کو 0° تا 180° اور ϕ کو 0° تا 360° تبدیل کرنے سے نقطہ N کروی $r = r_0$ سطح پر حرکت کرے گا۔ اس کروی سطح کا رداس r ہو گا۔ شکل 1.28-الف میں θ کو 0° تا 90° اور ϕ کو 0° تا 90° تبدیل کرنے سے حاصل سطح دکھائی گئی ہے۔ شکل 1.28-ب میں θ تبدیل کئے بغیر r اور ϕ تبدیل کرنے سے پیدا مخروط²⁹ $\theta = \theta_0$ کروی سطح دکھائی گئی ہے۔ ϕ تبدیل کئے بغیر r اور θ تبدیل کرنے سے نگلی محدود کی طرح $\phi = \phi_0$ سطح حاصل

longitude²⁷

latitude²⁸

cone²⁹



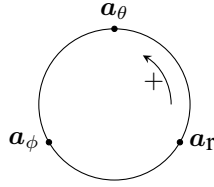
شکل 1.29: (الف) تین عمودی سطحوں کے ملاپ سے نقطہ N کا حصول۔ (ب) کروئی محدد کے تین عمودی اکائی سمتیات۔

ہوتی ہے۔ شکل 1.29-الف میں ان تینوں سطحوں کو دکھایا گیا ہے۔ بالکل کار تیبی اور نکلی محدد کی طرح، کسی بھی نقطہ $N(r_0, \theta_0, \phi_0)$ کا مقام ان تین سطحوں کے نقطہ ملاپ سے اخذ کیا جاتا ہے۔ کسی بھی نقطہ $N(r_0, \theta_0, \phi_0)$ پر $r = r_0$ ، $\theta = \theta_0$ اور $\phi = \phi_0$ سطحیں آپس میں عمودی ہوتی ہے اور یہ صرف اور صرف اسی نقطے پر اکٹھے ملتی ہیں۔

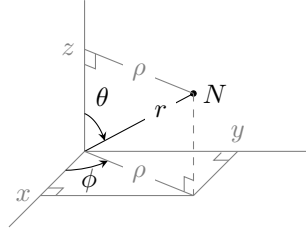
شکل 1.29-ب میں کروئی نظام کے تین عمودی اکائی سمتیات a_r ، a_θ اور a_ϕ دکھائے گئے ہیں۔ نکلی محدد کی طرح کروئی محدد کے عمودی اکائی سمتیات بھی مقام تبدیل کرنے سے تبدیل ہوتے ہیں۔ کسی بھی نقطہ $N(r_0, \theta_0, \phi_0)$ پر θ اور ϕ تبدیل کئے بغیر r کے بڑھتے جانب اکائی سمتیہ a_r ہوگی۔ اسی طرح θ بڑھانے سے نقطہ N اکائی سمتیہ a_θ کی جانب حرکت کرے گا جبکہ ϕ بڑھانے سے نقطہ a_ϕ کی جانب حرکت کرے گا۔ کار تیبی اور نکلی محدد کی طرح کروئی محدد کے اکائی سمتیات کو بھی محددی نظام کے متغیرات کو کم سے کم بڑھاتے ہوئے نقطے کی حرکت کی جانب اکائی سمتیہ کھینچنے سے حاصل کیا جاتا ہے۔

شکل 1.29-الف سے واضح ہے کہ a_r سمتیہ $r = r_0$ سطح کے عمودی جبکہ $\theta = \theta_0$ اور $\phi = \phi_0$ سطحوں کے متوازی ہے۔ اسی طرح a_θ سمتیہ $\theta = \theta_0$ سطح کے عمودی اور $\phi = \phi_0$ سطح کے متوازی پایا جاتا ہے جبکہ $r = r_0$ سطح کے ساتھ مماس بناتا ہے۔ a_ϕ سمتیہ $\phi = \phi_0$ سطح کے عمودی جبکہ $r = r_0$ اور $\theta = \theta_0$ سطحوں کے ساتھ مماس بناتا ہے۔

a_θ اور a_ϕ کروئی نظام کے اکائی سمتیات ہیں۔ $a_r \times a_\theta = a_\phi$ لکھنے سے دائیں ہاتھ کا کروئی نظام حاصل ہوتا ہے۔ دائیں ہاتھ کے قانون میں دائیں ہاتھ کا انگوٹھا r جبکہ پہلی انگلی θ اور دوسری انگلی ϕ بڑھانے سے پیدا حرکت کی



شکل 1.30: کروی نظام میں اکائی سمتیات کی صلیبی ضرب۔



شکل 1.31: کروی، ٹکلی اور کار تیبی متغیرات کا تبادلہ۔

سمتوں کو ظاہر کرتے ہیں۔ ٹکلی محدد میں یہ انگلیاں ρ ، ϕ اور z جبکہ کار تیبی محدد میں x ، y اور z بڑھانے سے پیدا حرکت کی سمتوں کو ظاہر کرتی ہیں۔

دائیں ہاتھ کے قانون یا شکل 1.30 کی مدد سے یوں اکائی سمتیات کے صلیبی ضرب

$$(1.45) \quad \mathbf{a}_r \times \mathbf{a}_\theta = \mathbf{a}_\phi, \quad \mathbf{a}_\theta \times \mathbf{a}_\phi = \mathbf{a}_r, \quad \mathbf{a}_\phi \times \mathbf{a}_r = \mathbf{a}_\theta$$

لکھے جاسکتے ہیں۔ اسی طرح

$$(1.46) \quad \mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}_r = 1, \quad \mathbf{a}_\theta \cdot \mathbf{a}_\theta = 1, \quad \mathbf{a}_\phi \cdot \mathbf{a}_\phi = 1$$

اور

$$(1.47) \quad \mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}_\theta = 0, \quad \mathbf{a}_\theta \cdot \mathbf{a}_\phi = 0, \quad \mathbf{a}_\phi \cdot \mathbf{a}_r = 0$$

بھی لکھے جاسکتے ہیں۔

نقطہ N کا z محدد سے فاصلہ ρ ہے جو ٹکلی محدد کا رداس ہے۔ اسے شکل 1.31 میں دکھایا گیا ہے جہاں سے واضح ہے کہ $\rho = r \sin \theta$ کے برابر ہے۔ اسی طرح $z = 0$ سطح سے N کی اونچائی z ہے جو شکل کو دیکھتے ہوئے $z = r \cos \theta$ اور لکھی جاسکتی ہے۔ نقطہ N کا عمودی سایہ $z = 0$ سطح پر دکھایا گیا ہے جہاں سے واضح ہے کہ $x = \rho \cos \phi$ اور $y = \rho \sin \phi$ لکھے جاسکتے ہیں۔ $\rho = r \sin \theta$ پُر کرنے سے درج ذیل لکھے جاسکتے ہیں

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \phi \\ y &= r \sin \theta \sin \phi \\ z &= r \cos \theta \end{aligned} \quad (1.48)$$

جہاں z کی مساوات بھی ساتھ ہی لکھی گئی ہے۔ مساوات 1.48 کروی سے کارٹیس میٹریات دیتا ہے۔ اسی شکل کو دیکھتے ہوئے مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے

$$\begin{aligned} r^2 &= \rho^2 + z^2 \\ \rho^2 &= x^2 + y^2 \end{aligned} \quad (1.49)$$

لکھتے ہوئے

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad (1.50)$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 1.48 میں z کی مساوات سے

$$\theta = \cos^{-1} \frac{z}{r} = \cos^{-1} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (1.51)$$

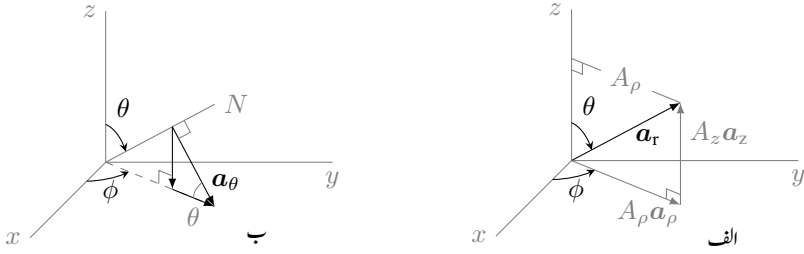
لکھا جاسکتا ہے۔ اسی طرح مساوات 1.48 کے y کو x سے تقسیم کرتے ہوئے

$$\phi = \tan^{-1} \frac{y}{x} \quad (1.52)$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 1.50، مساوات 1.51 اور مساوات 1.52 کارٹیس میٹری سے کروی متغیرات دیتے ہیں۔

شکل 1.29-ب میں نقطہ N پر اکائی سمتیات دکھائے گئے ہیں۔ \mathbf{a}_r کی سمت تبدیل کئے بغیر اسے محدد کے مرکز پر منتقل کرتے ہوئے شکل 1.32-الف میں دکھایا گیا ہے جہاں سے ظاہر ہے کہ اسے ٹکلی محدد کے اکائی سمتیات کی مدد سے

$$\mathbf{a}_r = A_\rho \mathbf{a}_\rho + A_z \mathbf{a}_z \quad (1.53)$$



شکل 1.32: کروی اکائی سمتیات کا کارتیسی نظام میں تبادلہ۔

لکھا جا سکتا ہے۔ شکل 1.32-الف میں \mathbf{a}_r کی لمبائی ایک لیتے ہوئے $A_\rho = \sin \theta$ اور $A_z = \cos \theta$ لکھا جا سکتا ہے۔ یوں

$$(1.54) \quad \mathbf{a}_r = \sin \theta \mathbf{a}_\rho + \cos \theta \mathbf{a}_z$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس مساوات کا باری باری \mathbf{a}_ρ ، \mathbf{a}_ϕ اور \mathbf{a}_z کے ساتھ غیر سمتی ضرب لیتے ہوئے

$$(1.55) \quad \begin{aligned} \mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}_\rho &= (\sin \theta \mathbf{a}_\rho + \cos \theta \mathbf{a}_z) \cdot \mathbf{a}_\rho = \sin \theta \\ \mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}_\phi &= (\sin \theta \mathbf{a}_\rho + \cos \theta \mathbf{a}_z) \cdot \mathbf{a}_\phi = 0 \\ \mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}_z &= (\sin \theta \mathbf{a}_\rho + \cos \theta \mathbf{a}_z) \cdot \mathbf{a}_z = \cos \theta \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں $\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_\rho = 0$ ، $\mathbf{a}_\rho \cdot \mathbf{a}_\rho = 1$ وغیرہ کا استعمال کیا گیا۔ یہ مساوات کروی رداسی اکائی سمتیے اور نکلی نظام کے اکائی سمتیات کے تمام ممکنہ غیر سمتی ضرب دیتا ہے۔ اسی طرح جدول 1.1 استعمال کرتے ہوئے مساوات 1.54 کا باری باری \mathbf{a}_x اور \mathbf{a}_y کے ساتھ غیر سمتی ضرب لیتے ہوئے

$$(1.56) \quad \begin{aligned} \mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}_x &= (\sin \theta \mathbf{a}_\rho + \cos \theta \mathbf{a}_z) \cdot \mathbf{a}_x = \sin \theta \cos \phi \\ \mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}_y &= (\sin \theta \mathbf{a}_\rho + \cos \theta \mathbf{a}_z) \cdot \mathbf{a}_y = \sin \theta \sin \phi \\ \mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}_z &= (\sin \theta \mathbf{a}_\rho + \cos \theta \mathbf{a}_z) \cdot \mathbf{a}_z = \cos \theta \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے۔ مکمل نتائج ایک جگہ لکھنے کی خاطر مندرجہ بالا مساوات میں $\mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}_z$ کو بھی شامل کیا گیا ہے۔ یہ مساوات کروی رداسی سمتیے اور کارتیسی اکائی سمتیات کے تمام ممکنہ غیر سمتی ضرب دیتا ہے۔

\mathbf{a}_r کو کارتیسی نظام میں لکھنے کی خاطر $\mathbf{a}_r = \mathbf{A} = A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z$ لکھتے ہیں۔ مساوات 1.38 کے مطابق $A_x = \mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_r$ جبکہ $A_y = \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_r$ اور $A_z = \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_r$ ہوں گے۔ یہ تمام مساوات 1.56 میں دئے گئے ہیں۔ یوں

$$(1.57) \quad \mathbf{a}_r = \sin \theta \cos \phi \mathbf{a}_x + \sin \theta \sin \phi \mathbf{a}_y + \cos \theta \mathbf{a}_z$$

لکھا جا سکتا ہے۔

شکل 1.29-ب میں دکھائے a_θ کو $\phi = \phi_0$ سطح پر حرکت دیتے ہوئے مرکز کے اتنے قریب لا کر شکل 1.32-ب میں دکھایا گیا ہے کہ اس کی نوک $x = 0$ سطح کو چھوتی ہے۔ جیسا شکل 1.29-الف سے واضح ہے، $\phi = \phi_0$ سطح پر $a_\theta = B_\rho a_\rho - B_z a_z$ کو حرکت دینے سے اس سمتیہ کی سمت تبدیل نہیں ہوتی۔ شکل 1.32-ب کو دیکھتے ہوئے $a_\theta = B_\rho a_\rho - B_z a_z$ مل کر نکالنا بنا تے ہیں جسے دیکھتے ہوئے مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے

$$B_\rho = \cos \theta$$

$$B_z = \sin \theta$$

لکھا جا سکتا ہے۔ یوں

$$(1.58) \quad a_\theta = \cos \theta a_\rho - \sin \theta a_z$$

کے برابر ہے۔ اس مساوات کا باری باری a_ρ ، a_ϕ اور a_z کے ساتھ غیر سمتی ضرب لینے سے

$$a_\theta \cdot a_\rho = (\cos \theta a_\rho - \sin \theta a_z) \cdot a_\rho = \cos \theta$$

$$(1.59) \quad a_\theta \cdot a_\phi = (\cos \theta a_\rho - \sin \theta a_z) \cdot a_\phi = 0$$

$$a_\theta \cdot a_z = (\cos \theta a_\rho - \sin \theta a_z) \cdot a_z = -\sin \theta$$

a_θ اور نکلی اکائی سمتیات کے تمام غیر سمتی ضرب حاصل ہوتے ہیں۔ اسی طرح مساوات 1.58 کا باری باری a_x ، a_y اور a_z کے ساتھ غیر سمتی ضرب لینے سے

$$a_\theta \cdot a_x = (\cos \theta a_\rho - \sin \theta a_z) \cdot a_x = \cos \theta a_\rho \cdot a_x = \cos \theta \cos \phi$$

$$(1.60) \quad a_\theta \cdot a_y = (\cos \theta a_\rho - \sin \theta a_z) \cdot a_y = \cos \theta a_\rho \cdot a_y = \cos \theta \sin \phi$$

$$a_\theta \cdot a_z = (\cos \theta a_\rho - \sin \theta a_z) \cdot a_z = -\sin \theta a_z \cdot a_z = -\sin \theta$$

حاصل ہوتے ہیں۔ یہ مساوات a_θ اور کارٹیسائی اکائی سمتیات کے تمام غیر سمتی ضرب دیتا ہے۔

a_θ کو کارٹیسائی نظام میں لکھنے کی خاطر $a_\theta = A = A_x a_x + A_y a_y + A_z a_z$ لکھتے ہیں۔ مساوات 1.38 کے مطابق $A_x = a_x \cdot a_\theta$ جبکہ $A_y = a_y \cdot a_\theta$ اور $A_z = a_z \cdot a_\theta$ ہوں گے۔ یہ تمام مساوات 1.60 میں دئے گئے ہیں۔ یوں

$$(1.61) \quad a_\theta = \cos \theta \cos \phi a_x + \cos \theta \sin \phi a_y - \sin \theta a_z$$

جدول 1.2: کروی اکائی سمتیات کا نکلے اکائی سمتیات کے ساتھ غیر سمتی ضرب۔

a_z	a_ϕ	a_ρ	
$\cos \theta$	0	$\sin \theta$	a_r
$-\sin \theta$	0	$\cos \theta$	a_θ
0	1	0	a_ϕ

جدول 1.3: کروی اکائی سمتیات کا کارٹیزیائی اکائی سمتیات کے ساتھ غیر سمتی ضرب۔

a_z	a_y	a_x	
$\cos \theta$	$\sin \theta \sin \phi$	$\sin \theta \cos \phi$	a_r
$-\sin \theta$	$\cos \theta \sin \phi$	$\cos \theta \cos \phi$	a_θ
0	$\cos \phi$	$-\sin \phi$	a_ϕ

لکھا جا سکتا ہے۔

کروی محدود کا a_ϕ اور نکلے محدود کا a_ϕ یکساں ہیں۔ اسے کارٹیزیائی نظام میں

$$(1.62) \quad a_\phi = -\sin \phi a_x + \cos \phi a_y$$

لکھا جاتا ہے۔ اس مساوات کا a_x ، a_y اور a_z کے ساتھ غیر سمتی ضرب لیتے ہوئے

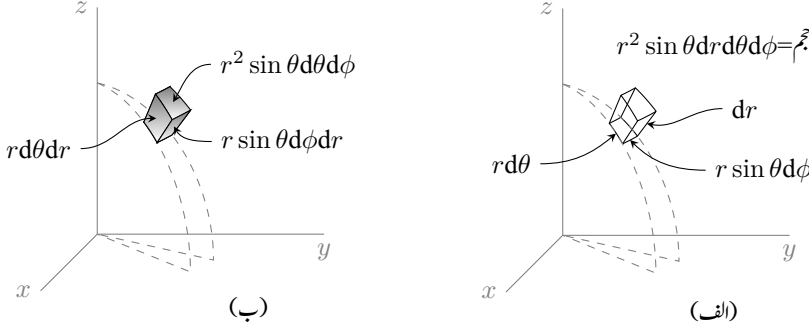
$$(1.63) \quad \begin{aligned} a_\phi \cdot a_x &= -\sin \phi \\ a_\phi \cdot a_y &= \cos \phi \\ a_\phi \cdot a_z &= 0 \end{aligned}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

مساوات 1.55 اور مساوات 1.59 کے نتائج کے ساتھ a_ϕ کے مختلف غیر سمتی ضربوں کو جدول 1.2 میں یکجا کیا گیا ہے۔

مساوات 1.56 اور مساوات 1.60 کے نتائج جدول 1.3 میں یکجا کئے گئے ہیں۔

شکل 1.29 میں $N(r, \theta, \phi)$ پر تین عمودی سطحیں دکھائی گئی ہیں۔ اگر کروی محدود کے متغیرات dr ، $d\theta$ اور $d\phi$ بڑھا کر دوبارہ تین عمودی سطحیں کھینچی جائیں تو یہ چھ سطحیں مل کر چھوٹا منحنی ملبع نما حجم گھیریں گی جسے شکل 1.33 میں دکھایا گیا ہے۔ a_r سمت میں ملبع کے چار اطراف کی لمبائیاں dr ہے۔ a_θ سمت میں z محدود کے قریبی دو اطراف کی



شکل 1.33: (الف) کروی نظام میں چھوٹی لمبائیاں اور چھوٹی حجم۔ (ب) کروی محدد میں چھوٹی سطحیں۔

لمبائیاں $r d\theta$ جبکہ دو دور اطراف کی لمبائیاں $(r + dr) d\theta$ ہے جسے دو اجزاء کی صورت میں یوں $r d\theta + dr d\theta$ لکھا جاسکتا ہے۔ دور اطراف کے لمبائی کا پہلا جزو ہو بہو قریبی اطراف کی لمبائی ہے جبکہ اس کا دوسرا جزو دور اور قریبی اطراف کے لمبائیوں میں فرق کو ظاہر کرتی ہے۔ ان دو اجزاء کی نسبت $\frac{dr d\theta}{r d\theta} = \frac{dr}{r}$ کے برابر ہے۔ dr کو کم سے کم 30 کرتے ہوئے اس نسبت کو کم سے کم کیا جاسکتا ہے۔ ایسا ہی کرتے ہوئے ہم $dr d\theta$ کو رد کرتے ہوئے ان چاروں اطراف کی لمبائیاں $r d\theta$ ہی لیتے ہیں۔ اسی طریقہ کار سے a_ϕ اطراف کی لمبائیاں $r \sin \theta d\phi$ لکھی جاسکتی ہے۔ منحرف مکعب نما کے اطراف میں معمولی فرق کو نظر انداز کرتے ہوئے اسے مکعب نما تصور کیا جاسکتا ہے جس کے $r = r_0$ سطحوں کا رقبہ $r^2 \sin \theta d\theta d\phi$ جبکہ $\theta = \theta_0$ سطحوں کا رقبہ $r \sin \theta dr d\phi$ اور $\phi = \phi_0$ سطحوں کا رقبہ $r dr d\theta$ ہو گا۔ اس مکعب کا حجم $r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$ ہو گا۔

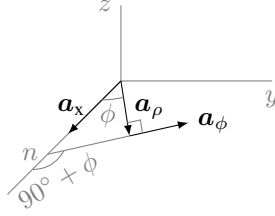
شکل 1.33 میں کروی محدد کے تینوں متغیرات تبدیل کرتے ہوئے ہم چھوٹے مکعب کے $N(r, \theta, \phi)$ کونے سے $N'(r + dr, \theta + d\theta, \phi + d\phi)$ کونے پہنچتے ہیں۔ N سے N' تک سمتیہ کو

$$(1.64) \quad dL = dr a_r + r d\theta a_\theta + r \sin \theta d\phi a_\phi$$

لکھا جاتا ہے۔ یہ مساوات کسی بھی دو قریبی نقطوں کے درمیان سمتی فاصلہ دیتا ہے۔

کسی بھی مکمل بند سطح کی سمت، سطح کے عمودی باہر جانب لی جاتی ہے۔ شکل 1.33 میں $r = r_0$ سطح مرکز کا قریبی سطح ہے۔ اس سطح کے دو آپس میں الٹ عمودی اطراف $\mp a_r$ ہیں جن میں $-a_r$ بند سطح کی بیرونی سمت کو ظاہر کرتا ہے لہذا یہی اس سطح کی درست سمت ہے۔ اس کے برعکس $r = r_0 + dr$ سطح مرکز سے دور تر ہے۔ اس سطح کے

³⁰ کسی بھی متغیرہ r میں چھوٹی سی تبدیلی Δr کو لکھا جاتا ہے جبکہ اس میں کم سے کم تبدیلی dr کو تقریباً صفر سمجھا جاسکتا ہے یعنی $dr \rightarrow 0$ ہوتا ہے۔



شکل 1.34: کارتیسی اور تکی اکائی سمتیات کا غیر سمتی ضرب۔

بھی دو آپس میں الٹ عمودی سمتیں $\mp a_r$ ہیں جن میں a_r سطح کی درست سمت ہے۔ یوں $r = r_0$ سطح کا سمتی رقبہ $-r^2 \sin \theta d\theta d\phi a_r$ جبکہ $r = r_0 + dr$ سطح کا سمتی رقبہ $r^2 \sin \theta d\theta d\phi a_r$ ہے۔ اسی طرح $\theta = \theta_0$ سطح کا سمتی رقبہ $-r \sin \theta dr d\phi a_\theta$ جبکہ $\theta = \theta_0 + d\theta$ سطح کا سمتی رقبہ $r \sin \theta dr d\phi a_\theta$ ہو گا۔ $\phi = \phi_0$ سطح کا سمتی رقبہ $-r dr d\theta a_\phi$ اور $\phi = \phi_0 + d\phi$ سطح کا سمتی رقبہ $r dr d\theta a_\phi$ ہو گا۔

مشق 1.6: شکل 1.33 میں سمت میں مرکز کے قریبی اور دور اطراف کی لمبائیاں لکھیں۔

جوابات: $r \sin \theta d\phi$ ، $r \sin(\theta + d\theta) d\phi$ اور $(r + dr) \sin \theta d\phi$

مثال 1.9: دو اکائی سمتیات a_1 اور a_2 کا غیر سمتی ضرب $a_1 \cdot a_2 = (1)(1) \cos \alpha_{12}$ یعنی ان کے مابین زاویے α_{12} کے کوسائن کے برابر ہوتا ہے۔ غیر سمتی ضرب کے اس تعریف کو استعمال کرتے ہوئے $a_y \cdot a_\rho$ ، $a_x \cdot a_\rho$ اور $a_x \cdot a_\phi$ حاصل کریں۔

حل: شکل 1.34 میں a_x اور a_ρ کے درمیان زاویہ ϕ جبکہ a_y اور a_ρ کے درمیان زاویہ $90^\circ - \phi$ پایا جاتا ہے لہذا $a_x \cdot a_\rho = \cos \phi$ اور $a_y \cdot a_\rho = \cos(90^\circ - \phi) = \sin \phi$ کے برابر ہیں۔ a_x اور a_ϕ کی سمتیں تبدیل کئے بغیر اگر انہیں یوں ہلایا جائے کہ ان کی ذم نقطہ n پر آٹھرے تو شکل سے ظاہر ہے کہ ان کے مابین

اور $z = r \cos \theta$ کے برابر ہیں لہذا ہم

$$\mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}_x = \frac{x}{r} = \sin \theta \cos \phi$$

$$\mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}_y = \frac{y}{r} = \sin \theta \sin \phi$$

$$\mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}_z = \frac{z}{r} = \cos \theta$$

لکھ سکتے ہیں۔

مثال 1.11: مثال 1.9 کے طرز پر \mathbf{a}_θ کا \mathbf{a}_x کے ساتھ غیر سمتی ضرب حاصل کریں۔

حل: شکل 1.35-ب میں نقطہ N پر اکائی سمتیہ \mathbf{a}_θ جبکہ محدد کے مرکز M پر \mathbf{a}_x دکھائے گئے ہیں۔ $\mathbf{a}_\theta \cdot \mathbf{a}_x$ حاصل کرنے کی خاطر سمتیات کی سمت تبدیل کئے بغیر انہیں z محدد پر نقطہ B منتقل کرتے ہوئے دوبارہ دکھایا گیا ہے جہاں سے واضح ہے کہ $\mathbf{a}_\theta \cdot \mathbf{a}_x = \cos \angle ABC$ کے برابر ہے۔ اس شکل میں $\angle DMC = \phi$ اور $\angle BMN = \theta$ کروئی محدد کے زاویے ہیں۔ ٹکون $\triangle BMN$ میں زاویہ $\angle MNB$ نوے درجے کا ہے۔ یوں $\angle NBM = 90^\circ - \theta$ ہو گا۔ شکل سے واضح ہے کہ $\angle NBM = \angle CBM$ ہیں۔ اس طرح ٹکون $\triangle BMC$ میں $\angle BMC = 90^\circ$ جبکہ $\angle CMB = 90^\circ - \theta$ بنا پر $\angle MCB = \theta$ ہو گا۔

شکل-ب میں $\overline{BM} = l$ لیتے ہوئے ٹکون $\triangle BMC$ کو دیکھتے ہوئے

$$\overline{BC} = \frac{l}{\sin \theta}$$

$$\overline{MC} = \frac{l}{\tan \theta}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ ٹکون $\triangle MDC$ سے

$$\overline{MD} = \overline{MC} \cos \phi = \frac{l \cos \phi}{\tan \theta}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ شکل سے واضح ہے کہ \overline{MD} اور \overline{AB} برابر ہیں یعنی $\overline{AB} = \overline{MD}$ ۔ یوں ΔBAC سے

$$\cos \angle ABC = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\left(\frac{l \cos \phi}{\tan \theta}\right)}{\left(\frac{l}{\sin \theta}\right)} = \cos \theta \cos \phi$$

حاصل ہوتا ہے۔ یوں $\mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}_x = \cos \theta \cos \phi$ لکھا جا سکتا ہے۔

مشق 1.7: شکل 1.35-ب کے طرز پر شکل بناتے ہوئے $\mathbf{a}_\theta \cdot \mathbf{a}_y$ اور $\mathbf{a}_\theta \cdot \mathbf{a}_x$ حاصل کریں۔

جوابات: $\cos \theta \sin \phi$ اور $\sin \theta$ ۔

سوالات

سوال 1.1: سمتیہ $A = -2a_x + 1a_y + 7a_z$ اور $B = 3a_x + 5a_y - 2a_z$ ہیں۔ مندرجہ ذیل حاصل کریں: (الف) $2A - 3B$ اور اسی کی سمت میں اکائی سمتیہ؛ (ب) $2A - 5B + 3a_x$ ؛ (پ) $|3A||2B|(B - A)$

جوابات: $-13a_x - 13a_y + 8a_z$ ، $-0.648a_x - 0.648a_y - 0.399a_z$ ، 28.3 ، $1359a_x + 1087a_y + 1359a_z$

سوال 1.2: نقطہ $A(1, -2, 3)$ ، $B(3, -1, 2)$ اور $C(7, 5, -4)$ دیے گئے ہیں۔ (الف) محدد کے مرکز سے A تک سمتیہ لکھیں؛ (ب) مرکز سے لکیر AB کے وسط تک سمتیہ لکھیں؛ (پ) اسی سمت میں اکائی سمتیہ لکھیں؛ (ت) تکون ABC کا احاطہ دریافت کریں۔

جوابات: $a_x - 2a_y + 3a_z$ ، $2a_x - 1.5a_y + 2.5a_z$ ، $0.566a_x - 0.424a_y - 0.707a_z$ ، 23.4

سوال 1.3: مرکز سے نقطہ A تک سمتیہ $2a_x + a_y + 3a_z$ ہے جبکہ مرکز سے $\frac{2}{3}a_x - \frac{2}{3}a_y + \frac{1}{3}a_z$ اکائی سمتیہ کی سمت میں نقطہ B پایا جاتا ہے۔ دونوں نقطوں کے درمیان 4 فاصلہ ہونے کی صورت میں نقطہ B دریافت کریں۔

جوابات: $(2.57, -2.57, 1.28)$

سوال 1.4: سمتی میدان $M = (x + y^2)a_x + 2(xy + 3)a_y + 4z^2a_z$ دیا گیا ہے۔ نقطہ $A(2, -3, 1)$ پر اس میدان کی قیمت حاصل کریں۔ اسی نقطے پر میدان کی سمت میں اکائی سمتیہ دریافت کریں۔ ایسی سطح جس پر $|M| = 5$ ہو کی مساوات حاصل کریں۔ اس سطح پر $y = 2$ اور $z = -1$ ہونے کی صورت میں حاصل لکیر کی مساوات حاصل کریں۔

جوابات: $M = 11a_x - 6a_y + 4a_z$ ، $(0.836a_x - 0.456a_y + 0.304a_z)$ ، $17x^2 + 56x + 9 = 0$ ، $x^2 + y^2 + 2xy^2 + 4x^2y^2 + 24xy + 16z^4 - 11 = 0$

سوال 1.5: سمتی میدان $B = 2x^2a_x - 3y(x + 2z)a_y + 5a_z$ اور $M = (x + y + z)a_x + \frac{y}{x}a_y + xy a_z$ دیے گئے ہیں۔ نقطہ $N(2, -3, -1)$ پر B اور M حاصل کریں۔ اسی نقطے پر سمتیہ $2B - M$ کی سمت میں اکائی سمتیہ حاصل کریں۔

جوابت: $B = 8a_x + 5a_z$ ، $M = -2a_x - 1.5a_y - 2a_z$ ، $0.830a_x + 0.069a_y + 0.553a_z$

سوال 1.6: نقطہ $N(2, -3, 7)$ پر میدان $M = \frac{16}{x^2+y^2}(xa_x + ya_y)$ کی سمت میں اکائی سمتیہ a_M دریافت کریں۔ نقطہ N پر a_x اور M کے درمیان زاویہ حاصل کریں۔ اسی طرح نقطہ N پر a_y اور M کے درمیان زاویہ حاصل کریں۔

جوابت: $a_M = 0.555a_x - 0.832a_y$ ، 56.3° ، 33.7°

سوال 1.7: میدان $M = \frac{16}{x^2+y^2}(xa_x + ya_y)$ کا مندرجہ ذیل دو درجہ تکمیل $y = 3$ سطح پر حاصل کریں۔

$$\int_0^3 \int_0^2 M \, dx \, dz \cdot a_x$$

جواب: $24 \ln \frac{13}{9}$

سوال 1.8: غیر سمتی ضرب استعمال کرتے ہوئے تھون ABC میں زاویہ A اور C حاصل کریں۔ تھون کے کونے $A(3, 1, 2)$ ، $B(4, 6, 2)$ اور $C(1, 4, -2)$ ہیں۔

جوابت: 61.74° ، 56.51°

سوال 1.9: نقطے $A(4, 1, 2)$ ، $B(-2, 4, 3)$ اور $C(2, 3, -1)$ دیے گئے ہیں۔ سمتیہ R_{BA} اور R_{CA} حاصل کریں۔ دوسری سمتیہ پر پہلی سمتیہ کے عمودی سائے³¹ کی لمبائی دریافت کریں۔ لکیر AB کے درمیانے نقطے سے لکیر AC کے درمیانے نقطے تک سیدھا سمتیہ حاصل کریں۔

جوابت: $-6a_x + 3a_y + a_z$ ، $-2a_x + 2a_y - 3a_z$ ، 4.12 ، $2a_x - 0.5a_y - 2a_z$

سوال 1.10: سمتیہ $M = 5a_x - 3a_y + 2a_z$ کا وہ حصہ حاصل کریں جو سمتیہ $P = -7a_x + 2a_y - 6a_z$ کے متوازی ہے۔ وہ حصہ حاصل کریں جو اس کے عمودی ہے۔

جوابت: $4.17a_x - 1.19a_y + 3.57a_z$ ، $0.83a_x - 1.81a_y - 1.57a_z$

سوال 1.11: تین سمتیات $r_1 = 2a_x - 1a_y + 3a_z$ ، $r_2 = -3a_x + 4a_y - 5a_z$ اور $r_3 = 5a_x - 2a_y + 3a_z$ دیے گئے ہیں۔ $r_1 \times r_2$ کی سمت میں اکائی سمتیہ حاصل کریں۔ ایسی اکائی سمتیہ

حاصل کریں جو r_1 اور r_2 دونوں کو عمودی ہو۔ سمتیہ $r_2 - r_1$ اور $r_2 - r_3$ دونوں کو عمودی اکائی سمتیہ حاصل کریں۔ اس تکون کا رقبہ حاصل کریں جس کے کونے یہ تین سمتیات دیتے ہیں۔

$$\text{جوابات: } \begin{aligned} & \text{، } \mp(-0.81\mathbf{a}_x + 0.16\mathbf{a}_y + 0.58\mathbf{a}_z) \text{ ، } -0.81\mathbf{a}_x + 0.16\mathbf{a}_y + 0.58\mathbf{a}_z \\ & 13.6 \text{ ، } 4.3 \text{ ، } \mp(0.29\mathbf{a}_x + 0.88\mathbf{a}_y + 0.37\mathbf{a}_z) \end{aligned}$$

سوال 1.12: نقطہ $N(5, 10, 4)$ پر سمتیات $\mathbf{R}_{AN} = -3\mathbf{a}_x + 6\mathbf{a}_y + 12\mathbf{a}_z$ اور $\mathbf{R}_{BN} = 12\mathbf{a}_x + 20\mathbf{a}_y - 5\mathbf{a}_z$ مل کر تکون بناتی ہیں۔ تکون کی عمودی اکائی سمتیہ حاصل کریں۔ سمتیہ \mathbf{R}_{BN} کے عمودی اور تکون کی سطح کے متوازی اکائی سمتیہ حاصل کریں۔ تکون کی سطح پر اس اکائی سمتیہ کو حاصل کریں جو نقطہ N پر تکون کے کونے کو نصف زاویہ میں کاٹے۔

$$\text{جوابات: } \begin{aligned} & \text{، } \mp(0.26\mathbf{a}_x - 0.38\mathbf{a}_y - 0.89\mathbf{a}_z) \text{ ، } \mp(-0.83\mathbf{a}_x + 0.39\mathbf{a}_y - 0.40\mathbf{a}_z) \\ & 0.19\mathbf{a}_x + 0.87\mathbf{a}_y + 0.45\mathbf{a}_z \end{aligned}$$

سوال 1.13: سمتیہ $M = (x^2 + y^2)^{-1}(x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y)$ کو تکلی محدد کے متغیرات میں لکھیں۔ نقطہ $(5, 30^\circ, 6)$ پر سمتیہ کی قیمت کارٹیزی اور تکلی محدد میں حاصل کریں۔

$$\text{جوابات: } M = \frac{1}{5}\mathbf{a}_\rho \text{ ، } M = 0.41\mathbf{a}_x + 0.29\mathbf{a}_y \text{ ، } M = \frac{1}{\rho}\mathbf{a}_\rho$$

سوال 1.14: نقطہ $N(\rho = 2, \phi = 45^\circ, z = 12)$ اور $P(\rho = 5, \phi = -60^\circ, z = -6)$ دئے گئے ہیں۔ کارٹیزی محدد میں، پہلے نقطے سے دوسرے نقطے کی جانب اکائی سمتیہ حاصل کریں۔ اسی اکائی سمتیہ کو پہلے نقطے پر پائے جانے والے تکلی محدد کے متغیرات کی صورت میں لکھیں۔ اسی اکائی سمتیہ کو دوسرے نقطے پر پائے جانے والے تکلی محدد کے متغیرات کی صورت میں لکھیں۔

$$\text{جوابات: } \begin{aligned} & 0.292\mathbf{a}_\rho - 0.174\mathbf{a}_\phi - 0.255\mathbf{a}_z \text{ ، } -0.174\mathbf{a}_\rho - 0.255\mathbf{a}_\phi - 0.951\mathbf{a}_z \text{ ، } 0.057\mathbf{a}_x - 0.303\mathbf{a}_y - 0.951\mathbf{a}_z \\ & 0.180\mathbf{a}_\phi - 0.951\mathbf{a}_z \end{aligned}$$

سوال 1.15: نقطہ $N(\rho = 5, \phi = 30^\circ, z = 6)$ سے نقطہ $P(\rho = 10, \phi = 75^\circ, z = 12)$ تک سمتیہ کارٹیزی محدد میں لکھیں۔ اسی سمت میں اکائی سمتیہ بھی لکھیں۔ کارٹیزی محدد میں دوسرے نقطے سے مرکز تک اکائی سمتیہ لکھیں۔

$$\text{جوابات: } \begin{aligned} & -0.183\mathbf{a}_x - 0.618\mathbf{a}_y + 0.631\mathbf{a}_z \text{ ، } -1.74\mathbf{a}_x + 7.16\mathbf{a}_y + 6\mathbf{a}_z \\ & 0.166\mathbf{a}_x - 0.618\mathbf{a}_y - 0.768\mathbf{a}_z \end{aligned}$$

سوال 1.16: نقطہ $M(5, -3, 2)$ سے نقطہ $N(10, 2, -5)$ تک سمتیہ کو نقطہ M پر نکلنے والی محدود کے اکائی سمتیات کی مدد سے لکھیں۔ دوسرے نقطے سے پہلے نقطے کی سمت میں اکائی سمتیہ کو دوسرے نقطے پر نکلنے والی سمتیات کی مدد سے لکھیں۔ دوسرے نقطے سے مرکز تک اکائی سمتیہ دوسرے نقطے کے اکائی سمتیات کی صورت میں لکھیں۔

جوابات: $0.90a_\rho + 0.44a_z$ ، $0.59a_\rho + 0.39a_\phi - 0.7a_z$ ، $-1.71a_\rho - 6.86a_\phi + 7a_z$

سوال 1.17: رداں $\rho = 2$ اور $\rho = 6$ حجم گھیرتے ہیں جو $z = 11$ تا $z = 13$ اور $\phi = 30^\circ$ تا $\phi = 60^\circ$ پایا جاتا ہے۔ اس جسم کے حجم کو تین درجی تکمیل سے حاصل کریں۔ اس کی بھی تکمیل سے سطح بھی حاصل کریں۔

جوابات: 16.8 ، 41.1

سوال 1.18: نقطہ $N(5, 3, 8)$ سے نقطہ $P(3, -4, 2)$ تک سمتیہ کارٹیزی، نکلنے والی محدود میں حاصل کریں۔ پہلے نقطے کے اکائی سمتیات استعمال کریں۔ تینوں سمتیات کی لمبائی حاصل کرتے ہوئے ثابت کریں کہ تینوں سمتیات کی لمبائی برابر ہے۔

جوابات: $-2a_x - 7a_y - 6a_z$ ، $-5.3165a_\rho - 4.9735a_\phi - 6.0000a_z$ ، 9.434 ، $-8.6615a_r - 2.7739a_\theta - 2.5069a_\phi$

سوال 1.19: نقطہ N پر سمتیہ $K = 3a_r - 2a_\theta + 8a_\phi$ اور $G = 2a_r + 5a_\theta + 2a_\phi$ دیے گئے ہیں۔ ان کی غیر سمتی ضرب $K \cdot G$ حاصل کریں۔ دوسری سمتیہ کی پہلی سمتیہ کی سمت میں لمبائی حاصل کریں۔ پہلی سمتیہ کا وہ حصہ دریافت کریں جو دوسری سمتیہ کی سمت میں ہے۔ دونوں سمتیوں کا سمتی ضرب $K \times G$ حاصل کریں۔ اس نقطے پر دونوں سمتیوں کی عمودی اکائی سمتیہ حاصل کریں۔

جوابات: 12 ، 1.3675 ، $0.46753a_r - 0.31169a_\theta + 1.24675a_\phi$ ، $44a_r - 10a_\theta - 19a_\phi$ ، $\mp(0.89871a_r - 0.20425a_\theta - 0.38808a_\phi)$

سوال 1.20: ایک جسم $r = 6$ تا $r = 10$ ، $\theta = 30^\circ$ تا $\theta = 70^\circ$ اور $\phi = 25^\circ$ تا $\phi = 100^\circ$ حجم گھیرتا ہے۔ اس جسم کے دو دور ترین کونوں کے درمیان فاصلہ حاصل کریں۔ جسم کی سطح کا رقبہ حاصل کریں۔ جسم کی حجم دریافت کریں۔

جوابات: 9.27 ، 198.27 ، 179.25

سوال 1.21: نقطہ $N(5, 4, -2)$ اور $P(6, 4, 10)$ دیے گئے ہیں۔ پہلے نقطے کو تکلی محدد میں لکھیں۔ پہلے نقطے کے متغیرات استعمال کرتے ہوئے پہلے نقطے سے دوسرے نقطے تک سمتیہ تکلی محدد میں لکھیں۔

جوابت: $P(6.4031, 38.6598^\circ, -2.0000)$ ، $0.57a_\rho - 0.82a_\phi + 12a_z$

باب 2

کولمب کا قانون

2.1 قوت کشش یا دفع

نیوٹن کے کائناتی تجاذب کے قانون¹ سے آپ بخوبی واقف ہوں گے۔ کولمب کا قانون² اس سے قریبی مشابہت رکھتا ہے۔ کائناتی تجاذب کے قانون کو مساوات 2.1 میں پیش کیا گیا ہے۔

$$(2.1) \quad F = G \frac{M_1 M_2}{R^2}$$

یہ مساوات کمیت M_1 اور کمیت M_2 کے مابین قوت کشش F دیتا ہے جہاں ایک کمیت کے مرکز سے دوسری کمیت کے مرکز تک کا فاصلہ R ہے۔ قوت کشش دونوں کمیت کے حاصل ضرب کے راست متناسب اور ان کے مرکروں کے درمیانی فاصلے کے مربع کے بالعکس متناسب ہوتی ہے۔ دونوں کمیتوں پر قوت کشش کی مقدار برابر ہوتی ہے اور یہ قوت دونوں کمیتوں کے مرکروں پر کھینچی لکیر پر عمل درآمد ہوتی ہے۔ M_1 پر قوت کشش کی سمت M_1 کے مرکز سے M_2 کے مرکز کی جانب کو ہوتا ہے جبکہ M_2 پر قوت کشش کی سمت M_2 کے مرکز سے M_1 کے مرکز کی جانب کو ہوتا ہے۔ تناسب کے جزو مستقل کو G لکھا اور تجاذبی مستقل³ پکارا جاتا ہے جس کی قیمت تقریباً

Law of Universal Gravitation¹
Coulomb's law²
gravitational constant³

توت درکار ہوتی ہے جہاں $g = 9.8 \frac{m}{s^2}$ کے برابر ہے۔ کرہ ارض کے ثقلی میدان میں میکانی بار m کو اٹھانے کی خاطر $F = mg$ $\frac{m^3}{kg s^2}$ 6.674×10^{-11} کے برابر ہے۔

کولمب کا قانون مساوات 2.2 میں بیان کیا گیا ہے۔ یہ مساوات بوقی بار Q_1 اور برقی بار Q_2 کے مابین توت کشش یا توت دفع F دیتا ہے جہاں ایک برقی بار کے مرکز سے دوسری برقی بار کے مرکز تک کا فاصلہ R ہے۔ ان برقی باروں کا حجم صفر تصور کیا جاتا ہے۔ یوں اگر برقی بار کو گیند کی شکل کا تصور کیا جائے تو اس گیند کے رداس کی لمبائی صفر ہو گی۔ ایسے برقی بار کو نقطہ بوقی بار⁵ کہا جاتا ہے۔ برقی بار کو بوقی یا بار کہا جائے گا۔

$$(2.2) \quad F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{R^2}$$

توت کشش یا دفع دونوں برقی باروں کے حاصل ضرب کے راست تناسب اور باہمی فاصلہ کے مربع کے بالعکس تناسب ہوتی ہے۔ دونوں برقی باروں پر توت کی مقدار برابر ہوتی ہے اور یہ توت دونوں برقی باروں سے گزرتی لکیر پر عمل درآمد ہوتی ہے۔ دو مختلف اقسام کے برقی باروں کے مابین توت کشش پائی جاتی ہے جبکہ دو یکساں برقی باروں کے مابین توت دفع پائی جاتی ہے۔ مساوات کے جزو مستقل کو $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ لکھا جاتا ہے جہاں ϵ_0 خالی خلاء کا برقی مستقل⁶ ہے جس کی قیمت اٹل ہے۔ خالی خلاء کے برقی مستقل کی قیمت

$$(2.3) \quad \epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2}$$

ہے جہاں c خالی خلاء میں روشنی کی رفتار اور μ_0 خالی خلاء کی مقناطیسی مستقل⁸ ہے۔ یہ دونوں بھی اٹل مستقل ہیں جن کی قیمتیں

$$(2.4) \quad c = 299\,792\,458 \frac{m}{s} \approx 3 \times 10^8 \frac{m}{s}$$

$$(2.5) \quad \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{H}{m}$$

ہیں۔ یوں مقناطیسی مستقل کی قیمت تقریباً

$$(2.6) \quad \epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \doteq \frac{1}{36\pi} 10^{-9} \frac{F}{m}$$

charge⁴
point charge⁵
permittivity⁶
electric constant⁷
permeability⁸

کے برابر ہے۔ اس کتاب میں $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ بار بار استعمال ہو گا جسے عموماً

$$(2.7) \quad \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \doteq 9 \times 10^9$$

لیا جائے گا۔ ϵ_0 کی اکائی فیراڈنی میٹر $\frac{F}{m}$ ہے جس کی وضاحت جلد کر دی جائے گی۔

مثال 2.1: زمین کی سطح پر زمین اور ایک کلو گرام کیت کے مابین 9.8 N کی قوت کشش پائی جاتی ہے۔ زمین کا رداس 6370 km لیتے ہوئے زمین کی کیت حاصل کریں۔

حل: مساوات 2.1 کی مدد سے

$$9.8 = \frac{6.674 \times 10^{-11} \times M \times 1}{6370000 \times 6370000}$$

لکھتے ہوئے زمین کی کیت 5.959×10^{24} kg حاصل ہوتی ہے۔

مثال 2.2: زمین کی مرکز سے تقریباً 42 000 km کے فاصلے پر ذرائع ابلاغ کے سیٹلائٹ زمین کے گرد مدار میں گردش کرتے ہیں۔ پوری دنیا میں بیسے تار⁹ مواصلاتی نظام انہیں کے مرہون منت ہے۔ اس فاصلے پر ایک کلو گرام کی کیت اور زمین کے مابین قوت کشش کی مقدار حاصل کریں۔

حل:

$$F = \frac{6.674 \times 10^{-11} \times 5.959 \times 10^{24} \times 1}{42000000 \times 42000000} = 0.225 \text{ N}$$

مثال 2.3: ایک ایک کولمب کے دو مثبت برقی باروں کے درمیان ایک میٹر کا فاصلہ ہے۔ ان میں قوت دفع حاصل کریں۔

حل: $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ کی قیمت مساوات 2.7 سے لیتے ہوئے

$$F = 9 \times 10^9 \frac{1 \times 1}{1 \times 1} = 9 \times 10^9 \text{ N}$$

مندرجہ بالا مثال سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ برقی بار کی اکائی (کولمب) انتہائی بڑی مقدار ہے۔

شکل 2.1 میں بار Q_1 محدود کے مرکز سے سمتی فاصلہ r_1 پر جبکہ بار Q_2 مرکز سے سمتی فاصلہ r_2 پر دکھائے گئے ہیں۔ بار Q_1 سے بار Q_2 تک کا سمتی فاصلہ R_{21} ہے جہاں

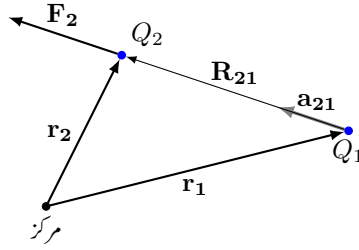
$$(2.8) \quad R_{21} = r_2 - r_1$$

کے برابر ہے۔ سمتیہ R_{21} کی سمت میں اکائی سمتیہ a_{21} یوں حاصل کیا جاتا ہے

$$(2.9) \quad a_{21} = \frac{R_{21}}{|R_{21}|} = \frac{R_{21}}{R_{21}} = \frac{r_2 - r_1}{|r_2 - r_1|}$$

بار Q_2 پر قوت F_2 کی حتمی قیمت مساوات 2.2 سے حاصل کی جاسکتی ہے جبکہ اس کی سمت اکائی سمتیہ a_{21} کے سمت میں ہوگی۔ اس طرح یہ قوت

$$(2.10) \quad \begin{aligned} F_2 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{R_{21}^2} a_{21} \\ &= \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_2 - r_1}{|r_2 - r_1|^3} \end{aligned}$$



شکل 2.1: دو مثبت باروں کے مابین قوت دفع

لکھا جائے گا۔ مساوات 2.10 کولمب کے قانون کی سمی شکل ہے۔ چونکہ دونوں باروں پر برابر مگر الٹ سمت میں قوت عمل کرتا ہے لہذا Q_1 پر قوت F_1 یوں لکھا جائے گا

$$(2.11) \quad \begin{aligned} F_1 = -F_2 &= \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{R_{21}^2} a_{21} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{R^2} a_{12} \end{aligned}$$

جہاں دوسری قدم پر $R_{21} = R_{12} = R$ لکھا گیا ہے اور $a_{12} = -a_{21}$ کے برابر ہے۔ دونوں بار مثبت یا دونوں بار منفی ہونے کی صورت میں Q_2 پر مساوات 2.10 سے قوت a_{21} کی سمت میں حاصل ہوتا ہے۔ یوں یکساں باروں کے مابین قوت دفع پایا جاتا ہے۔ دو الٹ اقسام کے باروں کی صورت میں Q_2 پر قوت $-a_{21}$ کی سمت میں حاصل ہوتا ہے۔ یوں الٹ اقسام کے باروں کے مابین قوت کشش پایا جاتا ہے۔

مثال 2.4: شکل 2.1 میں نقطہ $A(3, 2, 4)$ پر $20 \mu\text{C}$ کا بار Q_1 جبکہ نقطہ $B(1, 5, 9)$ پر $50 \mu\text{C}$ کا بار Q_2 پایا جاتا ہے۔ منفی بار Q_2 پر سمی قوت حاصل کریں۔

حل:

$$\begin{aligned} R_{21} &= (1 - 3)a_x + (5 - 2)a_y + (9 - 4)a_z \\ &= -2a_x + 3a_y + 5a_z \\ R_{21} &= |R_{21}| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + 5^2} \\ &= \sqrt{38} \\ &= 6.1644 \end{aligned}$$

اور یوں

$$\begin{aligned} a_{21} &= \frac{R_{21}}{|R_{21}|} = \frac{-2a_x + 3a_y + 5a_z}{6.1644} \\ &= -0.324a_x + 0.487a_y + 0.811a_z \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے جس سے

$$\begin{aligned} F_2 &= \frac{36\pi \times 10^9}{4\pi} \left(\frac{-50 \times 10^{-6} \times 20 \times 10^{-6}}{38} \right) (-0.324a_x + 0.487a_y + 0.811a_z) \\ &= -0.237 (-0.324a_x + 0.487a_y + 0.811a_z) \text{ N} \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ قوت کی سمت a_{21} کے الٹ سمت میں ہے۔ یوں منفی بار پر قوت کی سمت مثبت بار کی جانب ہے یعنی اس پر قوت کشش پایا جاتا ہے۔

کسی بھی بار پر ایک سے زیادہ باروں سے پیدا مجموعی قوت تمام باروں سے پیدا علیحدہ علیحدہ قوتوں کا سمی مجموعہ ہوتا ہے یعنی

$$(2.12) \quad F = \sum_{i=1}^n F_i$$

اس حقیقت کو یوں بیان کیا جاتا ہے کہ کولمب کا قانون خطی¹⁰ ہے۔

2.2 برقی میدان کی شدت

نیوٹن کے کائناتی تجاذب کے قانون میں زمین کی کمیت کو M لکھ کر کمیت m پر قوت F حاصل کی جاسکتی ہے۔ ایک کلوگرام کمیت پر اس قوت کی مقدار $\frac{F}{m}$ ہوگی جسے زمین کی کشش¹¹ یا ثقلی اسراع پکارا اور g لکھا جاتا ہے۔ زمین کی سطح پر g کی مقدار تقریباً $9.8 \frac{m}{s^2}$ کے برابر ہے۔

$$(2.13) \quad g = \frac{F}{m} = \frac{GM}{R^2}$$

linear¹⁰
gravity¹¹

کسی بھی کمیت M کے گرد تجاذبی میدان¹² پایا جاتا ہے۔ کسی بھی نقطے پر اس تجاذبی میدان کو ناپنے کی خاطر اس نقطے پر پیمائشی کمیت m_p ¹³ رکھ کر اس پر قوت ناپی جاتی ہے۔ مختلف مقامات پر اس طرح قوت ناپ کر ہم تجاذبی میدان کا جائزہ لے سکتے ہیں۔ تجاذبی قوت کی مقدار کا دار و مدار پیمائشی کمیت m_p ¹⁴ پر بھی منحصر ہے۔ مختلف تجاذبی میدانوں کا آپس میں موازنہ کرتے وقت یہ ضروری ہے کہ تمام تجاذبی میدان جاچتے وقت ایک ہی قیمت کے پیمائشی کمیت استعمال کی جائے۔ ماہرین طبیعیات عموماً m_p کو ایک کلوگرام رکھتے ہیں۔ یہ ضروری نہیں کہ تجاذبی قوت ناپتے وقت ایک کلوگرام کی پیمائشی کمیت ہی استعمال کی جائے البتہ جوابات اکٹھے کرتے وقت F کو m_p سے تقسیم کرتے ہوئے ایک کلوگرام پر تجاذبی قوت حاصل کی جاسکتی ہے۔ زمین کے قریب ایک کلوگرام کمیت پر قوت کشش کو ثقلی اسراع g پکارا جاتا ہے۔

مثال 2.5: زمین کی سطح پر دو سو گرام پیمائشی کمیت پر 1.96 N قوت ناپی جاتی ہے۔ ثقلی اسراع حاصل کریں۔

حل:

$$(2.14) \quad g = \frac{1.96}{0.2} = 9.8 \frac{\text{N}}{\text{kg}}$$

مساوات 2.13 سے ہم

$$(2.15) \quad \begin{aligned} F &= mg \\ w &= mg \end{aligned}$$

لکھ سکتے ہیں جو زمین کی سطح پر کمیت m پر کشش ثقل F دیتا ہے جسے وزن پکارا اور w لکھا جاتا ہے۔

باروں پر بھی اسی طرح غور کیا جاتا ہے۔ کسی بھی بار Q کے گرد برقی میدان پایا جاتا ہے یعنی برقی میدان کا منبع بار ہے۔ اس برقی میدان میں بار پر قوت اثر انداز ہوتا ہے۔ بار Q کے برقی میدان کی شدت کے پیمائشی کی خاطر اس

¹²gravitational field

¹³ m_p لکھتے ہوئے p پر نوشتہ میں لفظ پیمائشی کے پ کو ظاہر کرتا ہے، یعنی یہ وہ کمیت ہے جسے قوت کی پیمائشی کی خاطر استعمال کیا جا رہا ہے۔

¹⁴test mass

میدان میں مختلف مقامات پر پیمانہ بار q_p 15 پر قوت F ناپ کر برقی میدان کا مطالعہ کیا جاسکتا ہے اور اس کا نقشہ بنایا جاسکتا ہے۔ مختلف باروں کے برقی میدانوں کا آپس میں موازنہ کرتے وقت یہ ضروری ہے کہ تمام صورتوں میں ایک ہی قیمت کے پیمانہ بار استعمال کئے جائیں۔ ماہرین طبیعیات q_p کو ایک کولمب کا مثبت بار رکھتے ہیں۔ یہ ضروری نہیں کہ قوت ناپتے وقت ایک کولمب کا مثبت پیمانہ بار ہی استعمال کیا جائے البتہ جوابات اکٹھے کرتے وقت F کو q_p سے تقسیم کرتے ہوئے ایک مثبت کولمب کے بار پر قوت حاصل کی جاتی ہے جسے برقی میدان کی شدت E 16 یا صرف برقی میدان پکارا اور E لکھا جاتا ہے یعنی

$$(2.16) \quad E = \frac{F}{q_p}$$

مختلف مقامات پر موجود مختلف قیمتوں کے باروں سے کسی ایک نقطے پر پیدا برقی میدان تمام باروں کے مجموعی اثر سے پیدا ہو گا۔ ایسا کولمب کے قانون کے خطی ہونے کی بنا پر ہوتا ہے۔ کسی بھی نقطے پر n باروں کا مجموعی E تمام باروں کے علیحدہ علیحدہ پیدا کردہ E_1, E_2, E_3, \dots کا سمتی مجموعہ

$$(2.17) \quad E = \sum_{i=1}^n E_i = E_1 + E_2 + E_3 + \dots + E_n$$

ہوتا ہے۔ یوں کسی بھی نقطے P پر E ناپتے وقت اس نقطے پر ایک کولمب بار q_p رکھ کر اس بار پر قوت ناپی جاتی ہے۔ یہ قوت اس نقطے پر تمام باروں کا مجموعی E ہوتا ہے۔ یاد رہے کہ کسی بھی نقطے پر E ناپتے وقت یہاں رکھے پیمانہ بار q_p کا اثر شامل نہیں ہوتا۔

مساوات 2.10 سے بار Q سے a_R سمت میں R فاصلے پر برقی میدان کو

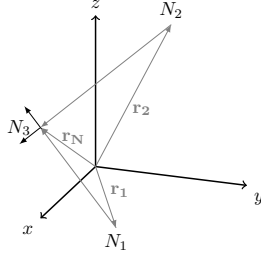
$$(2.18) \quad E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{a_R}{R^2} \\ = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{R}}{R^3}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ بار کو کروئی محدود کے مرکز پر تصور کرتے ہوئے اسی مساوات کو یوں لکھا جاسکتا ہے

$$(2.19) \quad E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} a_r$$

جہاں a_r کروئی محدود کا رادسی سمت میں اکائی سمتیہ ہے۔

¹⁵ test charge
¹⁶ electric field intensity



شکل 2.2: دو باروں سے پیدا برقی شدت

نقطہ (x', y', z') پر موجود بار Q سے نقطہ (x, y, z) پر برقی شدت یوں حاصل کی جاسکتی ہے۔

$$(2.20) \quad E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{|r - r'|^2} \frac{r - r'}{|r - r'|} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r - r'}{|r - r'|^3}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{[(x - x')\mathbf{a}_x + (y - y')\mathbf{a}_y + (z - z')\mathbf{a}_z]}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{\frac{3}{2}}}$$

جہاں

$$\mathbf{r} = x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y + z\mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{r}' = x'\mathbf{a}_x + y'\mathbf{a}_y + z'\mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}' = (x - x')\mathbf{a}_x + (y - y')\mathbf{a}_y + (z - z')\mathbf{a}_z$$

کے برابر ہے۔

مثال 2.6: نقطہ $N_1(4, 1, 1)$ پر $100 \mu\text{C}$ کا بار Q_1 جبکہ نقطہ $N_2(1, 4, 2)$ پر $50 \mu\text{C}$ کا بار Q_2 پایا جاتا ہے۔ نقطہ $N_3(2, 2, 5)$ پر Q_1 سے پیدا E_1 اور Q_2 سے پیدا E_2 حاصل کریں۔ اس نقطے پر دونوں باروں کا مجموعی E کیا ہو گا۔

حل: شکل 2.2 میں صورت حال دکھایا گیا ہے۔ پہلے Q_1 سے پیدا E_1 حاصل کرتے ہیں۔ N_1 سے N_3 تک سمتی فاصلہ

$$\mathbf{R}_{31} = \mathbf{R}_3 - \mathbf{R}_1 = (2 - 4)\mathbf{a}_x + (2 - 1)\mathbf{a}_y + (5 - 1)\mathbf{a}_z$$

$$= -2\mathbf{a}_x + 1\mathbf{a}_y + 4\mathbf{a}_z$$

ہے جس سے

$$\begin{aligned}
 R_{31} &= |\mathbf{R}_{31}| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 4^2} \\
 &= \sqrt{21} = 4.583 \\
 \mathbf{a}_{31} &= \frac{\mathbf{R}_{31}}{R_{31}} = \frac{-2\mathbf{a}_x + 1\mathbf{a}_y + 4\mathbf{a}_z}{\sqrt{21}} \\
 &= -0.436\mathbf{a}_x + 0.218\mathbf{a}_y + 0.873\mathbf{a}_z
 \end{aligned}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ یوں مساوات 2.18 سے

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}_1 &= 9 \times 10^9 \frac{100 \times 10^{-6}}{21} \left(-0.436\mathbf{a}_x + 0.218\mathbf{a}_y + 0.873\mathbf{a}_z \right) \\
 &= -18\,686\mathbf{a}_x + 9343\mathbf{a}_y + 37\,414\mathbf{a}_z \quad \frac{\text{V}}{\text{m}}
 \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں مساوات 2.7 سے $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ کی قیمت 9×10^9 پر کی گئی۔ اسی طرح Q_2 کے لئے حل کرتے ہوئے

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}_{32} &= (2-1)\mathbf{a}_x + (2-4)\mathbf{a}_y + (5-2)\mathbf{a}_z \\
 &= 1\mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_y + 3\mathbf{a}_z
 \end{aligned}$$

اور

$$\begin{aligned}
 R_{32} &= |\mathbf{R}_{32}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14} \\
 \mathbf{a}_{32} &= \frac{1\mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_y + 3\mathbf{a}_z}{\sqrt{14}} \\
 &= 0.267\mathbf{a}_x - 0.535\mathbf{a}_y + 0.802\mathbf{a}_z
 \end{aligned}$$

سے

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}_2 &= 9 \times 10^9 \frac{50 \times 10^{-6}}{14} \left(0.267\mathbf{a}_x - 0.535\mathbf{a}_y + 0.802\mathbf{a}_z \right) \\
 &= 8582\mathbf{a}_x - 17\,196\mathbf{a}_y + 25\,779\mathbf{a}_z \quad \frac{\text{V}}{\text{m}}
 \end{aligned}$$

ملتا ہے۔ ان دو جوابات کا سمتی مجموعہ لیتے ہوئے کل E حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E} &= \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 \\
 &= \left(-18\,686\mathbf{a}_x + 9343\mathbf{a}_y + 37\,414\mathbf{a}_z \right) + \left(8582\mathbf{a}_x - 17\,196\mathbf{a}_y + 25\,779\mathbf{a}_z \right) \\
 &= -10\,104\mathbf{a}_x - 7853\mathbf{a}_y + 63\,193\mathbf{a}_z \quad \frac{\text{V}}{\text{m}}
 \end{aligned}$$

مساوات 2.16 کو

$$(2.21) \quad F = qE$$

لکھا جا سکتا ہے جو برقی میدان E کے موجودگی میں بار q پر قوت F دیتا ہے۔

2.3 یکساں بار بردار سیدھی لامحدود لکیر کا برقی میدان

شکل 2.3 میں z محدد پر $z = -\infty$ سے $z = +\infty$ تک یکساں بار کی کثافت پائی جاتی ہے۔ آپ تصور کر سکتے ہیں کہ z محدد پر انتہائی قریب قریب برابر فاصلے پر یکساں نقطہ بار رکھے گئے ہیں۔ یوں اگر ΔL لمبائی میں کل ΔQ بار پایا جائے تب اکائی لمبائی میں $\frac{\Delta Q}{\Delta L}$ بار پایا جائے گا جسے لکیری کثافت بار ρ_L ¹⁷ کہا جاتا ہے اور جس کی اکائی C/m ہے۔ لکیری کثافت بار کی تعریف

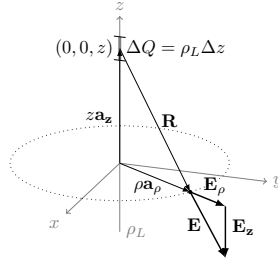
$$(2.22) \quad \rho_L = \lim_{\Delta L \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta L}$$

ہے۔ لکیر پر چھوٹی لمبائی اتنی کم نہیں کی جاتی کہ بار بردار الیکٹران علیحدہ علیحدہ نظر آئیں اور لکیری کثافت کی جگہ نقطہ بار نظر آئیں۔ اگر لکیر پر بار کی تقسیم ہر جگہ یکساں نہ ہو تب لکیری کثافت بار متغیر ہوگی۔ آئیں یکساں لکیری کثافت بار سے خالی خلاء میں پیدا ہونے والی برقی میدان پر غور کریں۔

پہلے بغیر قلم اٹھائے اس مسئلے کی نوعیت پر توجہ دیتے ہیں۔ مقام $(0, 0, z)$ پر چھوٹی سی لمبائی Δz میں $\rho_L \Delta z$ بار پایا جاتا ہے جسے نقطہ بار تصور کرتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔ z محدد کے گرد $z = 0$ یعنی xy سطح پر شکل 2.3 میں نقطہ دار گول دائرہ بنایا گیا ہے۔ نقطہ بار $\rho_L \Delta z$ سے دائرے پر کسی بھی مقام پر پیدا ہونے والی برقی میدان پر غور کرتے ہیں۔ برقی میدان کی مقدار کا دار و مدار میدان پیدا کرنے والے بار اور بار سے فاصلے پر ہے۔ نقطہ دار لکیر پر پائے جانے والے تمام نقطوں کا $(0, 0, z)$ سے فاصلہ برابر ہے۔ یوں ہم توقع کرتے ہیں کہ اس دائرے پر برقی میدان کی شدت کی حتمی قیمت ہر جگہ برابر ہوگی۔ اس کو یوں بھی بیان کیا جا سکتا ہے کہ بار کی نقطہ نظر سے نقطہ دار لکیر پر تمام نقطے بالکل یکساں نظر آتے ہیں۔ اس مشابہت سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ نقطہ دار دائرے پر ہر جگہ برقی میدان یکساں ہوگا۔

¹⁷line charge density

¹⁸اس کتاب میں داس کے لئے بھی ρ استعمال کیا جاتا ہے۔ ρ کو جب بھی کثافت کے لئے استعمال کیا جائے، اس کے زیر نوشت میں S.L یا h لکھا جائے گا۔



شکل 2.3: یکساں بار بردار سیدھی لامحدود کثیر کارتی میدان

آئیں شکل 2.3 کو دیکھتے ہوئے ایک اور مشابہت پر غور کرتے ہیں۔ چونکہ E سمتی فاصلہ R کی سمت میں ہوتا ہے لہذا دائرے پر کسی بھی نقطے پر نقطہ بار $\rho_L \Delta z$ سے پیدا E کے دو اجزاء پائے جائیں گے یعنی

$$(2.23) \quad E = E_\rho + E_z$$

مثبت ρ_L کی صورت میں $(0, 0, z)$ پر موجود بار سے E_z کی سمت منفی z جانب ہو گی۔ اسی طرح $(0, 0, -z)$ پر پائے جانے والے مثبت بار سے دائرے پر پیدا E کی سمت مثبت z جانب ہو گی۔ دائرے پر یہ دونوں ارکان ایک دونوں کو ختم کریں گے۔ اسی عمل سے دائرے پر کسی بھی نقطے پر مثبت z محدود پر کسی بھی فاصلے پر پائے جانے والے بار سے پیدا E_z کے اثر کو منفی z محدود پر اتنے ہی فاصلے پر بار سے پیدا E_z ختم کرتا ہے۔ یوں دائرے پر

$$(2.24) \quad E_z = 0$$

ہو گا۔

ایک آخری مشابہت پر اب غور کرتے ہیں۔ اگر نقطہ دار دائرے کو z محدود پر مثبت یا منفی جانب لے جایا جائے تو کیا ہو گا؟ اب بھی دائرے کے ایک جانب کسی بھی فاصلے پر بار کا اثر دائرے کے دوسری جانب اتنے ہی فاصلے پر بار ختم کرے گا۔ یوں دائرے کے ایک جانب یعنی z محدود پر ∞ تک فاصلے پر باروں کے E_z کو دائرے کی دوسری جانب z محدود پر ∞ تک فاصلے پر باروں کا E_z ختم کرے گا اور یوں خلاء میں ہر جگہ مساوات 2.24 درست ثابت ہوتا ہے۔ اس حقیقت کو یوں بہتر بیان کیا جاسکتا ہے کہ لامحدود کثیر پر یکساں کثافت بار سے خلاء میں برقی میدان صرف رداس کی سمت میں پیدا ہو گا۔ آئیں اس E کو حاصل کریں۔

شکل 2.3 میں مقام z پر نقطہ بار $\rho_L \Delta z$ دائرے پر ΔE پیدا کرتا ہے۔ محدود کے مرکز سے نقطہ بار کا مقام سمتیہ $z a_z$ سے ظاہر کیا جاسکتا ہے جبکہ دائرے پر کسی بھی نقطے N کو سمتیہ ρa_ρ ظاہر کرتا ہے۔ یوں نقطہ بار سے N تک کا سمتیہ

فاصلہ اور اسی سمت میں اکائی سمتیہ یوں حاصل کئے جائیں گے۔

$$\begin{aligned}\mathbf{R} &= \rho \mathbf{a}_\rho - z \mathbf{a}_z \\ |\mathbf{R}| &= R = \sqrt{\rho^2 + z^2} \\ \mathbf{a}_R &= \frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|} = \frac{\rho \mathbf{a}_\rho - z \mathbf{a}_z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}\end{aligned}$$

مساوات 2.19 سے

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{E} &= \frac{\rho_L \Delta z}{4\pi\epsilon_0 (\rho^2 + z^2)} \frac{\rho \mathbf{a}_\rho - z \mathbf{a}_z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \\ &= \frac{\rho_L \Delta z (\rho \mathbf{a}_\rho - z \mathbf{a}_z)}{4\pi\epsilon_0 (\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے۔ تمام باروں کے اثرات کو یکجا کرنے کی خاطر مندرجہ بالا مساوات کو تکمیل کی شکل دے کر مندرجہ ذیل مساوات میں دکھایا گیا ہے۔ تکملہ کے حدود $-\infty$ اور $+\infty$ ہیں۔

$$(2.25) \quad \mathbf{E} = \int d\mathbf{E} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\rho_L (\rho \mathbf{a}_\rho - z \mathbf{a}_z)}{4\pi\epsilon_0 (\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right] dz$$

اس تکمیل کو یوں لکھا جاسکتا ہے

$$(2.26) \quad \mathbf{E} = \frac{\rho_L \rho \mathbf{a}_\rho}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\rho_L \mathbf{a}_z}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z dz}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

جہاں مساوات کی نشان کے دائیں جانب پہلا تکمیل E_ρ اور دوسرا تکمیل E_z دیتا ہے یعنی

$$(2.27) \quad \begin{aligned}E_\rho &= \frac{\rho_L \rho \mathbf{a}_\rho}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ E_z &= -\frac{\rho_L \mathbf{a}_z}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z dz}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

مساوات 2.24 کی مدد سے ہم دیکھ سکتے ہیں کہ دوسرا تکملہ صفر جواب دیگا۔ آئیں دونوں تکمیل کو باری باری حل کریں۔ پہلے E_ρ حل کرتے ہیں۔ اس مساوات میں

$$z = \rho \tan \alpha$$

استعمال کرتے ہیں۔ ایسا کرتے ہوئے مکمل کا ابتدائی حد

$$-\infty = \rho \tan \alpha_{\text{ابتدائی}}$$

$$\alpha_{\text{ابتدائی}} = -\frac{\pi}{2}$$

اور اختتامی حد

$$\infty = \rho \tan \alpha_{\text{اختتامی}}$$

$$\alpha_{\text{اختتامی}} = \frac{\pi}{2}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ مزید

$$dz = \rho \sec^2 \alpha \, d\alpha$$

لکھا جائے گا۔ یوں

$$\begin{aligned} E_{\rho} &= \frac{\rho_L \rho a_{\rho}}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\rho \sec^2 \alpha \, d\alpha}{(\rho^2 + \rho^2 \tan^2 \alpha)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{\rho_L \rho a_{\rho}}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\rho \sec^2 \alpha \, d\alpha}{\rho^3 (1 + \tan^2 \alpha)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

لکھا جائے گا جس میں

$$1 + \tan^2 \alpha = \sec^2 \alpha$$

استعمال کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} E_{\rho} &= \frac{\rho_L \rho a_{\rho}}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\rho \sec^2 \alpha \, d\alpha}{\rho^3 \sec^3 \alpha} \\ &= \frac{\rho_L a_{\rho}}{4\pi\epsilon_0 \rho} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos \alpha \, d\alpha \\ &= \frac{\rho_L a_{\rho}}{4\pi\epsilon_0 \rho} \sin \alpha \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0 \rho} a_{\rho} \end{aligned}$$

(2.28)

ملتا ہے جہاں دوسری قدم پر $\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$ کا استعمال کیا گیا۔

آئیں اب مساوات 2.27 کے دوسرے جزو کو حل کریں۔ اس میں بھی $z = \rho \tan \alpha$ استعمال کرتے ہیں۔ یوں

$$\begin{aligned} E_z &= -\frac{\rho_L \mathbf{a}_z}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z \, dz}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= -\frac{\rho_L \mathbf{a}_z}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\rho^2 \tan \alpha \sec^2 \alpha \, d\alpha}{(\rho^2 + \rho^2 \tan^2 \alpha)^{\frac{3}{2}}} \\ &= -\frac{\rho_L \mathbf{a}_z}{4\pi\epsilon_0 \rho} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\tan \alpha \sec^2 \alpha \, d\alpha}{(1 + \tan^2 \alpha)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

سے

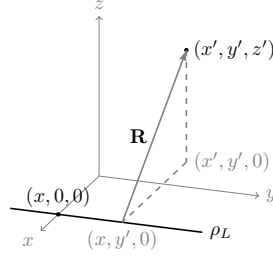
$$\begin{aligned} E_z &= -\frac{\rho_L \mathbf{a}_z}{4\pi\epsilon_0 \rho} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\tan \alpha \sec^2 \alpha \, d\alpha}{\sec^3 \alpha} \\ &= -\frac{\rho_L \mathbf{a}_z}{4\pi\epsilon_0 \rho} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sin \alpha \, d\alpha \\ &= \frac{\rho_L \mathbf{a}_z}{4\pi\epsilon_0 \rho} \cos \alpha \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{2.29}$$

ملتا ہے۔ یہی جواب مساوات 2.24 میں حاصل کیا گیا تھا۔

مساوات 2.28 اور مساوات 2.29 سے مساوات 2.26 کا حل یوں لکھا جائے گا

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_\rho = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0 \rho} \mathbf{a}_\rho \tag{2.30}$$

جس کے مطابق لامحدود سیدھی کلیئر پر یکساں بار سے برقی میدان رداں ρ کے بالعکس متناسب ہے۔ اس نتیجے کا مساوات 2.19 کے ساتھ موازنہ کریں جو نقطہ بار کی برقی میدان بیان کرتا ہے۔ نقطہ بار کا برقی میدان کروی رداں



شکل 2.4: کسی بھی سمت میں لامحدود لکیر پر بار کی مثال

کے مربع کے بالعکس متناسب ہے۔ یوں اگر لامحدود لکیر کے بار سے فاصلہ دگنا کر دیا جائے تو برقی میدان آدھا ہو جائے گا جبکہ نقطہ بار سے فاصلہ دگنا کرنے سے برقی میدان چارگنا کم ہوتا ہے۔

کسی بھی سمت میں لامحدود سیدھی لکیر پر بار کا برقی میدان مساوات 2.30 میں بیان خوبیوں پر پورا اترے گا۔ ایسی صورت میں کسی بھی نقطے پر E حاصل کرنے کی خاطر اس نقطے سے بار کے لکیر تک کم سے کم فاصلہ R حاصل کریں۔ یہ فاصلہ نقطے سے لکیر پر عمود کھینچنے سے حاصل ہو گا۔ اس فاصلے کو ρ تصور کریں۔ لکیر سے عمودی سمت میں نقطے کی جانب اکائی سمتیہ a_R کو a_ρ تصور کریں۔ ایسی صورت میں مساوات 2.30 کو

$$(2.31) \quad E = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0 R} a_R$$

لکھ سکتے ہیں۔

مثال 2.7: y محدد کے متوازی اور $(x, 0, 0)$ سے گزرتی لامحدود لکیر پر ρ_L کثافت کا بار پایا جاتا ہے۔ نقطہ (x', y', z') پر E حاصل کریں۔ شکل 2.4 میں صورت حال دکھائی گئی ہے۔

حل: (x', y', z') سے بار کے لکیر پر عمود $(x, y', 0)$ پر ٹکراتا ہے۔ ان دو نقطوں کا آپس میں فاصلہ

$$\sqrt{(x' - x)^2 + z^2}$$

ہے جبکہ

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= (x' - x)\mathbf{a}_x + z\mathbf{a}_z \\ \mathbf{a}_R &= \frac{(x' - x)\mathbf{a}_x + z\mathbf{a}_z}{\sqrt{(x' - x)^2 + z^2}} \end{aligned}$$

ہیں۔ یوں

$$E = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0\sqrt{(x' - x)^2 + z^2}} a_R$$

ہو گا۔

مشق 2.1: y محور پر $-\infty$ سے $+\infty$ تک $10 \frac{nC}{m}$ بار کی کثافت پائی جاتی ہے۔ نقطہ $N_1(0, 0, 6)$ اور نقطہ $N_2(0, 8, 6)$ پر E حاصل کریں۔

جواب: دونوں نقطوں پر $E = 30a_z$ کے برابر ہے۔

مشق 2.2: x محور پر $-\infty$ سے $+\infty$ تک $5 \frac{nC}{m}$ کثافت بار پائی جاتی ہے۔ نقطہ $N_1(0, 5, 0)$ اور نقطہ $N_2(7, 3, 4)$ پر E حاصل کریں۔

جوابات: $E_1 = 18a_z \frac{V}{m}$ اور $E_2 = 18 \left(\frac{3a_y + 4a_z}{5} \right) \frac{V}{m}$

2.4 یکساں بار بردار ہموار لامحدود سطح

شکل 2.5 میں $z = 0$ پر لامحدود $x - y$ سطح دکھائی گئی ہے۔ تصور کریں کہ اس پوری سطح پر انتہائی قریب قریب نقطہ بار یوں رکھے گئے ہیں کہ سطح پر کہیں بھی چھوٹی رقبہ ΔS پر یکساں قیمت کا بار ΔQ پایا جاتا ہے۔ اس طرح اکائی رقبہ پر کل $\frac{\Delta Q}{\Delta S}$ بار پایا جائے گا جسے سطحی کثافت بار ρ_S ¹⁹ کہتے ہیں۔ سطحی کثافت بار کی تعریف

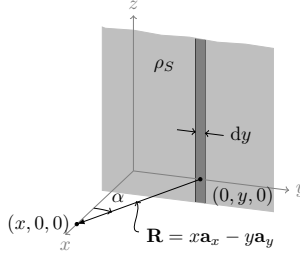
$$(2.32) \quad \rho_S = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta S}$$

ہے۔ چھوٹی سطح اتنی کم نہیں لی جاتی کہ اس پر بار بردار الیکٹران علیحدہ علیحدہ بطور نقطہ بار نظر آئیں بلکہ اسے اتنا رکھا جاتا ہے کہ علیحدہ علیحدہ الیکٹران کا اثر قابل نظر انداز ہو۔ سطح پر ہر جگہ بار کا تقسیم یکساں نہ ہونے کی صورت میں ρ_S کی قیمت متغیر ہوگی۔ آئیں لامحدود سطح پر یکساں کثافت بار سے خالی خلاء میں پیدا E حاصل کریں۔

پہلے غور کرتے ہیں کہ آیا مختلف مقامات سے دیکھتے ہوئے کچھ اخذ کرنا ممکن ہے۔ اگر اس بار بردار سطح کے سامنے ہم کھڑے ہو جائیں تو ہمیں سامنے لامحدود بار بردار سطح نظر آئے گی۔ سطح سے برابر فاصلے پر ہم جہاں بھی جائیں ہمیں صورت حال میں کوئی تبدیلی نظر نہیں آئے گی۔ اسی طرح اگر ہم سطح کی دوسری طرف اتنے ہی فاصلے پر چلے جائیں تو ہمیں صورت حال میں کسی قسم کی کوئی تبدیلی نظر نہیں آئے گی۔ اس مشابہت سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ ایسی سطح سے برابر فاصلے پر تمام نقطوں پر یکساں برقی میدان پایا جائے گا۔ اس کے برعکس اگر ہم اس سطح سے دور ہو جائیں تو ہمیں سطح قدر دور نظر آئے گی اور ہو سکتا ہے کہ اس تبدیلی سے E پر اثر ہو۔ آئیں اب مسئلے کو حساب و کتاب سے حل کرتے ہوئے E حاصل کریں۔

شکل 2.5 میں بار بردار سطح پر z محور کے متوازی دو انتہائی قریب قریب لکیریں کھینچی گئی ہیں جن کے مابین فاصلہ dy ہے۔ اس گھیرے گئے رقبے کی چوڑائی dy ہے۔ یوں ΔL لمبائی اور dy چوڑائی رقبے میں $\rho_S \Delta L dy$ بار پایا جائے گا۔ لکیروں سے گھیرے گئے رقبے کو بار کی سیدھی لکیر تصور کیا جاسکتا ہے جس پر اکائی لمبائی کے رقبے پر $\frac{\rho_S \Delta L dy}{\Delta L}$ بار پایا جائے گا جسے ρ_L تصور کیا جاسکتا ہے یعنی

$$(2.33) \quad \rho_L = \rho_S dy$$



شکل 2.5: یکساں بار بردار ہموار لامحدود سطح

لامحدود لکیر پر یکساں بار کی کثافت سے پیدا برقی میدان پر گزشتہ حصے میں غور کیا گیا۔ نقطہ $(x, 0, 0)$ پر \mathbf{E} حاصل کرتے ہیں۔ شکل میں لامحدود بار کی لکیر سے اس نقطے تک کا قریبی سمتی فاصلہ \mathbf{R} دکھایا گیا ہے جہاں

$$(2.34) \quad \mathbf{R} = x\mathbf{a}_x - y\mathbf{a}_y$$

کے برابر ہے جس سے

$$(2.35) \quad R = |\mathbf{R}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\mathbf{a}_R = \frac{x\mathbf{a}_x - y\mathbf{a}_y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ یوں بار بردار لکیر سے $(x, 0, 0)$ پر پیدا برقی میدان کو مساوات 2.31 کی مدد سے

$$(2.36) \quad d\mathbf{E} = \frac{\rho_S dy}{2\pi\epsilon_0 \sqrt{x^2 + y^2}} \frac{x\mathbf{a}_x - y\mathbf{a}_y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$= \frac{\rho_S dy (x\mathbf{a}_x - y\mathbf{a}_y)}{2\pi\epsilon_0 (x^2 + y^2)}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس جواب کو $d\mathbf{E} = d\mathbf{E}_x + d\mathbf{E}_y$ لکھا جاسکتا ہے جہاں

$$(2.37) \quad d\mathbf{E}_x = \frac{\rho_S x dy}{2\pi\epsilon_0 (x^2 + y^2)} \mathbf{a}_x$$

$$d\mathbf{E}_y = -\frac{\rho_S y dy}{2\pi\epsilon_0 (x^2 + y^2)} \mathbf{a}_y$$

کے برابر ہیں۔ x محدد کے ایک جانب بار بردار لکیر مندرجہ بالا برقی میدان پیدا کرتا ہے۔ غور کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ x محدد کے دوسری جانب اتنے ہی فاصلے پر بار بردار لکیر سے پیدا برقی میدان مندرجہ بالا $d\mathbf{E}_y$ کو ختم کرے

گا۔ یوں کسی بھی مثبت y پر کھینچی لکیر کے dE_y کو منفی y پر کھینچی لکیر کا dE_y ختم کرے گا۔ x محدد کے دونوں جانب مسئلے کی مشابہت سے یوں ہم توقع کرتے ہیں کہ

$$(2.38) \quad E_y = 0$$

ہو گا۔

آئیں اب حساب و کتاب سے مساوات 2.37 کو حل کریں۔ پہلے E_x حاصل کرتے ہیں۔ مساوات 2.37 میں دئے dE_x کا مکمل لیتے ہیں۔ ایسا کرنے کی خاطر

$$(2.39) \quad \begin{aligned} y &= x \tan \alpha \\ dy &= x \sec^2 \alpha \, d\alpha \end{aligned}$$

کا استعمال کرتے ہیں۔ شکل 2.5 میں α کی نشاندہی کی گئی ہے۔ یوں

$$\begin{aligned} E_x &= \int dE_x = \frac{\rho_S x a_x}{2\pi\epsilon_0} \int_{y=-\infty}^{y=+\infty} \frac{dy}{(x^2 + y^2)} \\ &= \frac{\rho_S x a_x}{2\pi\epsilon_0} \int_{\alpha=-\frac{\pi}{2}}^{\alpha=+\frac{\pi}{2}} \frac{x \sec^2 \alpha \, d\alpha}{x^2 (1 + \tan^2 \alpha)} \end{aligned}$$

میں $\sec^2 \alpha = 1 + \tan^2 \alpha$ کے استعمال سے

$$(2.40) \quad \begin{aligned} E_x &= \frac{\rho_S a_x}{2\pi\epsilon_0} \int_{\alpha=-\frac{\pi}{2}}^{\alpha=+\frac{\pi}{2}} d\alpha \\ &= \frac{\rho_S a_x}{2\pi\epsilon_0} \alpha \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\rho_S}{2\epsilon_0} a_x \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے۔ آئیں اب E_y حاصل کریں۔

مساوات 2.37 میں دئے dE_y کا مکمل لیتے ہیں۔

$$E_y = \int dE_y = -\frac{\rho_S a_y}{2\pi\epsilon_0} \int_{y=-\infty}^{y=+\infty} \frac{y \, dy}{(x^2 + y^2)}$$

تکمل کے نشان کے اندر $f(y) = x^2 + y^2$ لیتے ہوئے اسے $\frac{df(y)}{2f(y)}$ لکھا جاسکتا ہے جس کا تکمل $\frac{\ln f(y)}{2}$ ہے۔ یوں

$$(2.41) \quad E_y = -\frac{\rho_S a y}{2\pi\epsilon_0} \frac{\ln(x^2 + y^2)}{2} \Bigg|_{y=-\infty}^{y=+\infty}$$

$$= 0$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 2.38 میں یہی جواب حاصل کیا گیا تھا۔

مساوات 2.40 اور مساوات 2.41 کی مدد سے یکساں بار بردار لامحدود سطح کی برقی میدان

$$(2.42) \quad E = \frac{\rho_S}{2\epsilon_0} a_N$$

لکھی جاسکتی ہے جہاں a_N اس سطح کا عمودی اکائی سمتیہ ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ سطح سے فاصلہ کم یا زیادہ کرنے سے برقی میدان کی شدت پر کوئی اثر نہیں ہوتا۔ سطح کے دونوں جانب برقی میدان اسی مساوات سے حاصل کی جائے گی۔ ظاہر ہے کہ سطح کے دونوں جانب کے اکائی عمودی سمتیہ آپس میں الٹ ہیں۔

اب تصور کریں کہ اس سطح کے متوازی $x = x_1$ پر ایک اور لامحدود سطح رکھی جائے جس پر بار کی یکساں کثافت $-\rho_S$ ہو۔ ان دو متوازی سطحوں کو دو دھاتی چادروں سے بنایا گیا برف گیر²⁰ (کپیسٹر) سمجھا جاسکتا ہے۔ کسی بھی نقطے پر کل E دونوں سطحوں پر بار سے پیدا ہونے والی برقی میدان کا مجموعہ ہو گا۔ پہلے دونوں سطحوں کے دونوں جانب برقی میدان لکھتے ہیں۔

• $x = 0$ پر $+\rho_S$ کثافت کی سطح کا برقی میدان۔

$$E_{x>0}^+ = +\frac{\rho_S}{2\epsilon_0} a_x \quad x > 0$$

$$E_{x<0}^+ = -\frac{\rho_S}{2\epsilon_0} a_x \quad x < 0$$

• $x = x_1$ پر $-\rho_S$ کثافت کی سطح کا برقی میدان۔

$$E_{x>x_1}^- = -\frac{\rho_S}{2\epsilon_0} a_x \quad x > x_1$$

$$E_{x<x_1}^- = +\frac{\rho_S}{2\epsilon_0} a_x \quad x < x_1$$

ان نتائج کو استعمال کرتے ہوئے $x < 0$ اور $x > x_1$ اور $0 < x < x_1$ خطوں میں برقی میدان حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} E_{x<0} &= E_{x<0}^+ + E_{x<x_1}^- = -\frac{\rho S}{2\epsilon_0} \mathbf{a}_x + \frac{\rho S}{2\epsilon_0} \mathbf{a}_x = 0 \\ E_{x>x_1} &= E_{x>0}^+ + E_{x>x_1}^- = +\frac{\rho S}{2\epsilon_0} \mathbf{a}_x - \frac{\rho S}{2\epsilon_0} \mathbf{a}_x = 0 \\ E_{0<x<x_1} &= E_{x>0}^+ + E_{x<x_1}^- = +\frac{\rho S}{2\epsilon_0} \mathbf{a}_x + \frac{\rho S}{2\epsilon_0} \mathbf{a}_x = \frac{\rho S}{\epsilon_0} \mathbf{a}_x \end{aligned} \quad (2.43)$$

اس نتیجے کے مطابق دو متوازی لامحدود سطحوں جن پر الٹ یکساں کثافت پائی جائے کے باہر کوئی برقی میدان نہیں پایا جاتا جبکہ سطحوں کے درمیانی خطے میں

$$E = \frac{\rho S}{\epsilon_0} \mathbf{a}_x \quad (2.44)$$

برقی میدان پایا جاتا ہے۔ اس میدان کی سمت مثبت بار بردار چادر سے منفی بار بردار چادر کی جانب ہوتی ہے۔ یہی مساوات ایک ایسے برق گیر (کپیسٹر) کے برقی میدان کے لئے بھی استعمال کیا جاسکتا ہے جس میں دھاتی چادروں کی لمبائی اور چوڑائی دونوں چادروں کے درمیانی فاصلے سے کئی گنا زیادہ ہو اور چادروں کے درمیان خالی خلاء یا ہوا پائی جائے۔ چادروں کے کناروں کے قریب برق گیر (کپیسٹر) کے اندر اور باہر صورت حال قدر مختلف ہو گی۔

مثال 2.8: خلاء میں تین متوازی لامحدود سطح پائے جاتے ہیں جن پر بار کی یکساں کثافت پائی جاتی ہے۔ پہلی سطح $y = 2$ پر 2 nC/m^2 ، دوسری سطح $y = 5$ پر 4 nC/m^2 اور تیسری سطح $y = 10$ پر -6 nC/m^2 کثافت پائی جاتی ہے۔ $N_1(0, 0, 0)$ ، $N_2(5, 3, 4)$ ، $N_3(-2, 7, 11)$ اور $N_4(-7, 30, 22)$ پر \mathbf{E} حاصل کریں۔

جوابات: 0 ، $144\pi\mathbf{a}_y$ ، $216\pi\mathbf{a}_y$ اور 0

2.5 بار بردار حجم

ہم نقطہ بار، لامحدود لکیر پر بار اور لامحدود سطح پر بار دیکھ چکے ہیں۔ اگلا فطری قدم بار بردار حجم بنتا ہے لہذا اسی پر غور کرتے ہیں۔ لکیر اور سطح کے بار پر غور کرتے ہوئے ہر جگہ یکساں کثافت کی بات کی گئی۔ حجم میں بار کی بات کرتے

ہوئے اس شرط کو دور کرتے ہوئے کثافت کو متغیرہ تصور کرتے ہیں۔ یوں مختلف مقامات پر کثافت کی قیمت مختلف ہو سکتی ہے۔

تصور کریں کہ حجم میں انتہائی قریب قریب نقطہ بار پائے جاتے ہیں۔ یوں اگر کسی نقطے پر Δh حجم میں ΔQ بار پایا جائے تب اس نقطے پر اوسط حجمی کثافت بار $\frac{\Delta Q}{\Delta h}$ ہوگی۔ کسی بھی نقطے پر بار کی حجمی کثافت یوں بیان کی جاتی ہے۔

$$(2.45) \quad \rho_h = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta h}$$

کسی بھی حجم میں کل بار تین درجی تکمیل سے حاصل کیا جائے گا۔ کار تیسری مجدد میں ایسا تکمیل یوں لکھا جائے گا۔

$$(2.46) \quad Q = \iiint_h \rho_h dx dy dz$$

جہاں تکمیل کے نشان کے نیچے h حجم کو ظاہر کرتا ہے۔ اس طرز کے تکمیل کو عموماً ایک درجی تکمیل سے ہی ظاہر کیا جاتا ہے یعنی

$$(2.47) \quad Q = \int_h \rho_h dh$$

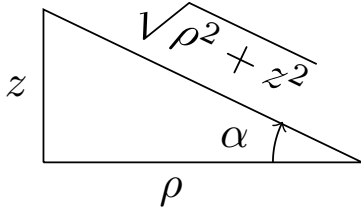
حجم میں r' نقطے پر چھوٹی سی حجم $\Delta h'$ میں $\Delta Q = \rho'_h \Delta h'$ بار پایا جائے گا جسے نقطہ بار تصور کیا جاسکتا ہے۔ نقطہ r پر اس نقطہ بار کا برقی میدان dE مساوات 2.20 سے یوں حاصل ہوتا ہے۔

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho'_h \Delta h'}{|r - r'|^2 |r - r'|}$$

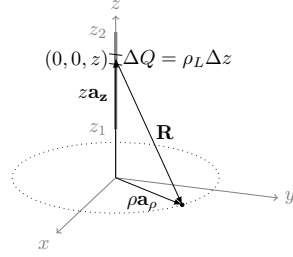
اس مساوات میں نقطہ r' پر بار کی کثافت ρ'_h لکھی گئی ہے۔ تمام حجم میں پائے جانے والے بار کا نقطہ r پر میدان مندرجہ بالا مساوات کے تکمیل سے یوں حاصل کیا جائے گا۔

$$(2.48) \quad E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_h \frac{\rho'_h dh'}{|r - r'|^2 |r - r'|}$$

اس مساوات کی شکل قدر خوف ناک ہے البتہ حقیقت میں ایسا ہر گز نہیں۔ سمتیہ r اس نقطے کی نشاندہی کرتا ہے جہاں برقی میدان حاصل کرنا درکار ہو۔ اس نقطے پر برقی میدان کو $E(r)$ لکھ کر اس حقیقت کی وضاحت کی گئی ہے کہ



(ب) z اور alpha کا تعلق



(i) محدود لکیر پر بار کی یکساں کثافت

شکل 2.6: محدود لکیر پر بار

نقطے کی تبدیلی سے برقی میدان تبدیل ہو سکتا ہے۔ کثافت از خود متغیر ہے جس کی قیمت r' پر منحصر ہے۔ r' پر چھوٹی حجم dh' اور بار کی کثافت ρ'_h لکھے گئے ہیں جہاں r' اس بات کی یاد دہانی کرتا ہے کہ یہ متغیرات نقطہ r' پر پائے جاتے ہیں۔ آخر میں یاد رہے کہ کسی بھی نقطے پر E حاصل کرتے وقت اسی نقطے پر موجود بار کو نظر انداز کیا جاتا ہے۔

2.6 مزید مثال

مثال 2.9: شکل 2.6 میں $z = z_1$ سے $z = z_2$ تک کی سیدھی لکیر پر یکساں ρ_L پایا جاتا ہے۔ نقطہ دار گول دائرے پر E حاصل کریں۔ اس گول دائرے کا مرکز کارٹیزی محدد کے مرکز $(0, 0, 0)$ پر ہے جبکہ دائرہ از خود $z = 0$ سطح پر پایا جاتا ہے۔

حل: شکل 2.6 سے واضح ہے کہ نکتہ دار گول دائرے پر E کی حتمی قیمت $|E|$ یکساں ہوگی۔ یوں ہم لکھ سکتے ہیں

$$\begin{aligned} E &= \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0} \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{|\rho^2 + z^2|} \frac{\rho\mathbf{a}_\rho - z\mathbf{a}_z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \\ &= \frac{\rho_L\rho\mathbf{a}_\rho}{4\pi\epsilon_0} \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{|\rho^2 + z^2|^{\frac{3}{2}}} - \frac{\rho_L\mathbf{a}_z}{4\pi\epsilon_0} \int_{z_1}^{z_2} \frac{z dz}{|\rho^2 + z^2|^{\frac{3}{2}}} \\ &= E_\rho + E_z \end{aligned}$$

دائیں جانب باری باری تکملہ حل کرتے ہیں۔ تکملہ حل کرنے کی خاطر $z = \rho \tan \alpha$ کا تعلق استعمال کرتے ہیں۔ α کا z کا تعلق شکل 2.6-ب میں دکھایا گیا ہے۔

$$\begin{aligned} E_\rho &= \frac{\rho_L \rho \mathbf{a}_\rho}{4\pi\epsilon_0} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\rho \sec^2 \alpha \, d\alpha}{|\rho^2 + \rho^2 \tan^2 \alpha|^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{\rho_L \mathbf{a}_\rho}{4\pi\epsilon_0 \rho} \sin \alpha \Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2} \\ &= \frac{\rho_L \mathbf{a}_\rho}{4\pi\epsilon_0 \rho} (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1) \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \tan^{-1} \frac{z_2}{\rho} \\ \alpha_1 &= \tan^{-1} \frac{z_1}{\rho} \end{aligned}$$

کے برابر ہے۔ شکل 2.6-ب سے $\sin \alpha = \frac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}$ لکھا جا سکتا ہے۔ یوں

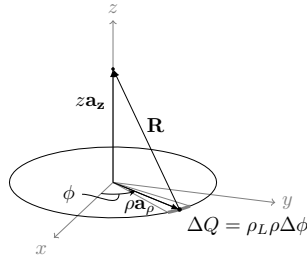
$$E_\rho = \frac{\rho_L \mathbf{a}_\rho}{4\pi\epsilon_0 \rho} \left(\frac{z_2}{\sqrt{\rho^2 + z_2^2}} - \frac{z_1}{\sqrt{\rho^2 + z_1^2}} \right)$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح

$$\begin{aligned} E_z &= -\frac{\rho_L \mathbf{a}_z}{4\pi\epsilon_0} \int_{z_1}^{z_2} \frac{z \, dz}{|\rho^2 + z^2|^{\frac{3}{2}}} \\ &= -\frac{\rho_L \mathbf{a}_z}{4\pi\epsilon_0} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\rho^2 \tan \alpha \sec^2 \alpha \, d\alpha}{|\rho^2 + \rho^2 \tan^2 \alpha|^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

سے

$$\begin{aligned} E_z &= \frac{\rho_L \mathbf{a}_z}{4\pi\epsilon_0 \rho} (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1) \\ &= \frac{\rho_L \mathbf{a}_z}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{\rho^2 + z_2^2}} - \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + z_1^2}} \right) \end{aligned}$$



شکل 2.7: بار بردار گول دائرہ

حاصل ہوتا ہے۔ E_ρ اور E_z کا مجموعہ لیتے ہوئے کل برقی میدان یوں حاصل ہوتا ہے۔

(2.49)

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_L \mathbf{a}_\rho}{4\pi\epsilon_0 \rho} \left(\frac{z_2}{\sqrt{\rho^2 + z_2^2}} - \frac{z_1}{\sqrt{\rho^2 + z_1^2}} \right) + \frac{\rho_L \mathbf{a}_z}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{\rho^2 + z_2^2}} - \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + z_1^2}} \right)$$

اگر نقطہ دار گول دائرہ $z = z_0$ سطح پر پایا جاتا تب مندرجہ بالا مساوات

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_L \mathbf{a}_\rho}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{z_2 - z_0}{\sqrt{\rho^2 + (z_2 - z_0)^2}} - \frac{z_1 - z_0}{\sqrt{\rho^2 + (z_1 - z_0)^2}} \right] + \frac{\rho_L \mathbf{a}_z}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (z_2 - z_0)^2}} - \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (z_1 - z_0)^2}} \right]$$

صورت اختیار کرتا۔

مثال 2.10: شکل 2.7 میں $z = 0$ پر گول دائرہ دکھایا گیا ہے جس پر بار کی یکساں کثافت پائی جاتی ہے۔ نقطہ $(0, 0, z)$ پر \mathbf{E} حاصل کریں۔

حل: ٹکلی محدود استعمال کرتے ہوئے اسے حل کرتے ہیں۔ کسی بھی زاویہ پر رداس کھینچتے ہوئے دائرے پر کوئی نقطہ حاصل کیا جاسکتا ہے۔ زاویہ میں باریک تبدیلی $\Delta\phi$ سے لمبائی $\rho\Delta\phi$ حاصل ہوتی ہے جس پر کل بار $\Delta Q = \rho_L\rho\Delta\phi$ پایا جائے گا۔ یوں بار ΔQ مقام ρa_ρ پر پایا جاتا ہے جبکہ E مقام $z a_z$ پر درکار ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ E رداس کی سمت میں ممکن نہیں۔ ΔQ سے

$$\Delta E = \frac{\rho_L\rho\Delta\phi}{4\pi\epsilon_0(\rho^2+z^2)} \frac{z a_z - \rho a_\rho}{\sqrt{\rho^2+z^2}}$$

پیدا ہو گا۔ دائرے پر تمام بار کے اثر کے لئے تکملہ لینا ہو گا۔

$$E = \frac{\rho_L\rho}{4\pi\epsilon_0(\rho^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} (z a_z - \rho a_\rho) d\phi$$

تکملہ کا متغیر ϕ ہے جسے تبدیل کرنے سے ρ اور z میں کوئی تبدیلی رونما نہیں ہوتی۔ اسی لئے انہیں تکملہ کی نشان سے باہر لے جایا گیا ہے۔ حاصل تکملہ کو دو حصوں میں لکھا جاسکتا ہے البتہ معاملہ اتنا سیدھا نہیں جتنا معلوم ہوتا ہے۔ E_z لکھتے ہوئے کارٹیسٹی محدود کی اکائی سمتیہ a_z کو تکملہ کے باہر لے جایا جاسکتا ہے چونکہ ϕ کی تبدیلی سے a_z تبدیل نہیں ہوتا البتہ E_ρ لکھتے ہوئے ٹکلی محدود کی اکائی سمتیہ a_ρ کو تکملہ کے باہر نہیں لے جایا جاسکتا چونکہ ϕ کی تبدیلی سے a_ρ کی سمت تبدیل ہوتی ہے۔ چونکہ a_ρ کی سمت تبدیل ہوتی ہے لہذا اس کو مستقل تصور کرنا غلط ہے اور یوں یہ تکملہ کے اندر ہی رہے گا۔

$$(2.50) \quad E_z = \frac{\rho_L\rho z a_z}{4\pi\epsilon_0(\rho^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} d\phi$$

$$E_\rho = -\frac{\rho_L\rho^2}{4\pi\epsilon_0(\rho^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} a_\rho d\phi$$

پہلے تکملہ کا جواب اب دیکھ کر ہی

$$(2.51) \quad E_z = \frac{2\pi\rho_L\rho z a_z}{4\pi\epsilon_0(\rho^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

لکھا جاسکتا ہے جبکہ دوسرے تکملہ میں $a_\rho = \cos\phi a_x + \sin\phi a_y$ لکھتے ہوئے حل کرتے ہیں۔

$$E_\rho = -\frac{\rho_L\rho^2}{4\pi\epsilon_0(\rho^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} (\cos\phi a_x + \sin\phi a_y) d\phi$$

$$= -\frac{\rho_L \rho^2}{4\pi\epsilon_0 (\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} (\sin \phi \mathbf{a}_x - \cos \phi \mathbf{a}_y) \Big|_0^{2\pi}$$

$$= 0$$

یہی جواب اس طرح بھی حاصل کیا جاسکتا ہے کہ گول دائرے پر تمام بار کو $Q = 2\pi\rho\rho_L$ لکھیں۔ یہ بار نقطہ $(0, 0, z)$ سے $\sqrt{\rho^2 + z^2}$ فاصلے پر ہے۔ اگر اس تمام بار کو ایک ہی نقطے $(\rho, 0, 0)$ پر موجود تصور کیا جائے تو یہ

$$\mathbf{E}_R = \frac{2\pi\rho\rho_L}{4\pi\epsilon_0 (\rho^2 + z^2)} \mathbf{a}_R$$

برقی میدان پیدا کرے گا۔ بار گول دائرے پر پھیلا ہوا ہے لہذا حقیقت میں صرف \mathbf{a}_z جانب ہی \mathbf{E} پیدا ہوتا ہے۔ شکل میں اس تکنوں کو دیکھتے ہوئے جس کا \mathbf{R} حصہ ہے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ \mathbf{E}_R کا $\frac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}$ حصہ حقیقت میں پایا جائے گا۔ یوں

$$\mathbf{E}_z = \frac{2\pi\rho\rho_L}{4\pi\epsilon_0 (\rho^2 + z^2)} \frac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \mathbf{a}_z$$

یہی حاصل ہوتا ہے۔

مثال 2.11: رداس a کرہ کی سطح پر یکساں کثافت ρ_S پایا جاتا ہے۔ کرہ کے باہر اور اس کے اندر برقی میدان \mathbf{E} حاصل کریں۔ کرہ کو کروی محدد کے مرکز پر رکھتے ہوئے حل کریں۔

حل: کرہ کی سطح پر نقطہ $M(a, \theta, \phi)$ پر چھوٹی رقبہ $a^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi$ میں بار $\rho_S a^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi$ پایا جائے گا جو نقطہ $N(0, 0, b)$ پر برقی میدان $d\mathbf{E}$ پیدا کرے گا۔ محدد کے مرکز سے M تک سمتی فاصلہ aa_r جبکہ مرکز سے N تک سمتی فاصلہ ba_z ہے۔ یوں M سے N تک سمتی فاصلہ

$$(2.52) \quad \mathbf{R} = ba_z - aa_r$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں کارٹیزیی محدد اور کروی محدد کے اکائی سمتیات استعمال کئے گئے ہیں۔ اس طرح

$$\begin{aligned} |R| &= \sqrt{R \cdot R} = \sqrt{(ba_z - aa_r) \cdot (ba_z - aa_r)} \\ (2.53) \quad &= \sqrt{b^2 + a^2 - 2aba_z \cdot a_r} \\ &= \sqrt{b^2 + a^2 - 2ab \cos \theta} \end{aligned}$$

اور

$$(2.54) \quad a_R = \frac{R}{|R|} = \frac{ba_z - aa_r}{\sqrt{b^2 + a^2 - 2ab \cos \theta}}$$

حاصل ہوتے ہیں جہاں صفحہ 46 پر جدول 1.3 کے استعمال سے $a_z \cdot a_r = \cos \theta$ لکھا گیا ہے۔

کرہ کی سطح z محدد کو $(0, 0, -a)$ اور $(0, 0, a)$ پر چھوتا ہے جہاں بالترتیب $\theta = \pi$ اور $\theta = 0$ کے برابر ہیں۔ یوں $(0, 0, -a)$ سے $N(0, 0, b)$ تک فاصلہ

$$\begin{aligned} \sqrt{b^2 + a^2 - 2ab \cos \pi} &= \sqrt{b^2 + a^2 + 2ab} \\ (2.55) \quad &= \sqrt{(b+a)^2} \\ &= b+a \end{aligned}$$

کے برابر ہے جہاں جذر لیتے وقت مثبت جواب چنا گیا ہے چونکہ فاصلہ مقداری²¹ ہے جو مثبت قیمت رکھتا ہے۔ اسی طرح $(0, 0, a)$ سے $N(0, 0, b)$ تک فاصلہ

$$(2.56) \quad \sqrt{b^2 + a^2 - 2ab \cos 0} = \sqrt{b^2 + a^2 - 2ab}$$

کے برابر ہے۔ اگر N کرہ کے باہر ہو تب $b > a$ ہو گا اور یہ فاصلہ $b - a$ کے برابر ہو گا جسے مساوات 2.56 سے یوں

$$(2.57) \quad \sqrt{b^2 + a^2 - 2ab} = \sqrt{(b-a)^2} = b-a$$

حاصل کیا جا سکتا ہے۔ اس کے برعکس اگر N کرہ کے اندر ہو تب $a > b$ ہو گا اور یہ فاصلہ $a - b$ کے برابر ہو گا جسے اور مساوات 2.56 سے یوں

$$(2.58) \quad \sqrt{b^2 + a^2 - 2ab} = \sqrt{(a-b)^2} = a-b$$

حاصل کیا جا سکتا ہے۔

²¹ فاصلہ ہر صورت مثبت ہوتا ہے البتہ سمتی فاصلہ مثبت یا منفی ہو سکتا ہے جہاں سمتی فاصلے کی مقدار مثبت ہی رہتی ہے جبکہ اس کی سمت مثبت یا منفی ہو سکتی ہے۔

اس طرح N پر

$$d\mathbf{E} = \frac{a^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi}{4\pi\epsilon_0 R^2} \mathbf{a}_R$$

لکھتے ہوئے تمام کرہ پر بار سے پیدا میدان کو مکمل سے یوں حاصل کیا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\rho_S a^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi}{4\pi\epsilon_0 (b^2 + a^2 - 2ab \cos \theta)} \frac{b\mathbf{a}_Z - a\mathbf{a}_R}{\sqrt{b^2 + a^2 - 2ab \cos \theta}} \\ (2.59) \quad &= \frac{\rho_S a^2}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{(b\mathbf{a}_Z - a\mathbf{a}_R) \sin \theta}{(b^2 + a^2 - 2ab \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} \, d\theta \, d\phi \end{aligned}$$

اس مساوات میں جدول 1.3 کی مدد سے $\mathbf{a}_R = \sin \theta \cos \phi \mathbf{a}_X + \sin \theta \sin \phi \mathbf{a}_Y + \cos \theta \mathbf{a}_Z$ لکھتے ہوئے
(2.60)

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_S a^2}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{[-a \sin \theta \cos \phi \mathbf{a}_X - a \sin \theta \sin \phi \mathbf{a}_Y + (b - a \cos \theta) \mathbf{a}_Z] \sin \theta}{(b^2 + a^2 - 2ab \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} \, d\theta \, d\phi$$

حاصل ہوتا ہے۔ z-محدد سے دیکھتے ہوئے صاف ظاہر ہے کہ اس محدود پر میدان صرف اور صرف \mathbf{a}_Z سمت میں ہی ممکن ہے۔ یوں \mathbf{a}_X اور \mathbf{a}_Y اجزاء کو صفر لیتے ہوئے

$$(2.61) \quad E_z = \frac{\rho_S a^2}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{(b - a \cos \theta) \sin \theta}{(b^2 + a^2 - 2ab \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} \, d\theta \, d\phi$$

لکھتے ہیں۔ سوال 2.1 میں آپ سے درخواست کی گئی ہے کہ مساوات 2.60 میں \mathbf{a}_X اور \mathbf{a}_Y اجزاء کو صفر ثابت کریں۔ بیرونی مکمل پہلے لیتے ہوئے

$$(2.62) \quad E_z = \frac{2\pi\rho_S a^2}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi \frac{(b - a \cos \theta) \sin \theta}{(b^2 + a^2 - 2ab \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} \, d\theta$$

حاصل ہوتا ہے جسے

$$(2.63) \quad E_z = \frac{2\pi\rho_S a^2 b}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi \frac{\sin \theta \, d\theta}{(b^2 + a^2 - 2ab \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} - \frac{2\pi\rho_S a^3}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi \frac{\cos \theta \sin \theta \, d\theta}{(b^2 + a^2 - 2ab \cos \theta)^{\frac{3}{2}}}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

مساوات 2.63 کے پہلے تکمیل میں $w = \cos \theta$ اور $dw = -\sin \theta d\theta$ پُر کر کے حل کرتے ہوئے

$$(2.64) \quad \int \frac{\sin \theta d\theta}{(b^2 + a^2 - 2ab \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{-dw}{(b^2 + a^2 - 2abw)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-1}{ab(b^2 + a^2 - 2abw)^{\frac{1}{2}}}$$

یعنی

$$\frac{-1}{ab\sqrt{b^2 + a^2 - 2ab \cos \theta}}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ یوں

$$(2.65) \quad \int_0^\pi \frac{\sin \theta d\theta}{(b^2 + a^2 - 2ab \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-1}{ab\sqrt{b^2 + a^2 - 2ab \cos \theta}} \Big|_0^\pi$$

$$= \frac{-1}{ab\sqrt{b^2 + a^2 + 2ab}} + \frac{1}{ab\sqrt{b^2 + a^2 - 2ab}}$$

حاصل ہوتا ہے جو N بیرون کرہ ہونے کی صورت میں مساوات 2.55 اور مساوات 2.57 کے تحت

$$(2.66) \quad \frac{1}{ab} \left[\frac{-1}{b+a} + \frac{1}{b-a} \right] = \frac{1}{ab} \left[\frac{-(b-a) + (b+a)}{(b+a)(b-a)} \right] = \frac{2}{b(b^2 - a^2)}$$

جبکہ N اندرون کرہ ہونے کی صورت میں مساوات 2.55 اور مساوات 2.58 کے تحت

$$(2.67) \quad \frac{1}{ab} \left[\frac{-1}{a+b} + \frac{1}{a-b} \right] = \frac{1}{ab} \left[\frac{-(a-b) + (a+b)}{(a+b)(a-b)} \right] = \frac{2}{a(a^2 - b^2)}$$

شکل اختیار کرتا ہے۔

مساوات 2.63 کے دوسرے تکمیل میں $w = \cos \theta$ پُر کرتے ہوئے

$$\int \frac{\cos \theta \sin \theta d\theta}{(b^2 + a^2 - 2ab \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{-w dw}{(b^2 + a^2 - 2abw)^{\frac{3}{2}}}$$

حاصل ہوتا ہے۔ آپ

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

کے کلیہ سے بخوبی واقف ہیں۔ ہم

$$u = w$$

$$dv = \frac{-dw}{(b^2 + a^2 - 2abw)^{\frac{3}{2}}}$$

لیتے ہیں۔ یوں

$$v = \int dv = \int \frac{-dw}{(b^2 + a^2 - 2abw)^{\frac{3}{2}}}$$

کے برابر ہے جسے ہم مساوات 2.64 میں حاصل کر چکے ہیں۔ اس طرح

$$\int \frac{\cos \theta \sin \theta \, d\theta}{(b^2 + a^2 - 2ab \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} = \int w \left[\frac{-dw}{(b^2 + a^2 - 2abw)^{\frac{3}{2}}} \right]$$

$$= w \left[\frac{-1}{ab(b^2 + a^2 - 2abw)^{\frac{1}{2}}} \right] + \int \frac{dw}{ab(b^2 + a^2 - 2abw)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{-w}{ab(b^2 + a^2 - 2abw)^{\frac{1}{2}}} - \frac{(b^2 + a^2 - 2abw)^{\frac{1}{2}}}{a^2b^2}$$

$$= \frac{-(b^2 + a^2 - abw)}{a^2b^2(b^2 + a^2 - 2abw)^{\frac{1}{2}}}$$

سے

$$\int_0^\pi \frac{\cos \theta \sin \theta \, d\theta}{(b^2 + a^2 - 2ab \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-(b^2 + a^2 - ab \cos \theta)}{a^2b^2(b^2 + a^2 - 2ab \cos \theta)^{\frac{1}{2}}} \Big|_0^\pi$$

$$= \frac{1}{a^2b^2} \left[\frac{-(b^2 + a^2 + ab)}{\sqrt{b^2 + a^2 + 2ab}} + \frac{(b^2 + a^2 - ab)}{\sqrt{b^2 + a^2 - 2ab}} \right]$$

حاصل ہوتا ہے۔ N کا کرہ سے باہر ہونے کی صورت میں اس سے

$$(2.68) \quad \frac{1}{a^2b^2} \left[\frac{-(b^2 + a^2 + ab)}{\sqrt{b^2 + a^2 + 2ab}} + \frac{(b^2 + a^2 - ab)}{\sqrt{b^2 + a^2 - 2ab}} \right] = \frac{2a}{b^2(b^2 - a^2)}$$

جبکہ N کا کرہ کے اندر ہونے کی صورت میں اس سے

$$(2.69) \quad \frac{1}{a^2 b^2} \left[\frac{-(b^2 + a^2 + ab)}{\sqrt{b^2 + a^2 + 2ab}} + \frac{(b^2 + a^2 - ab)}{\sqrt{b^2 + a^2 - 2ab}} \right] = \frac{2b}{a^2(a^2 - b^2)}$$

حاصل ہوتا ہے۔ کرہ کے باہر مساوات 2.66 اور مساوات 2.68 کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 2.63 سے

$$(2.70) \quad \begin{aligned} E_z &= \frac{2\pi\rho_S a^2 b}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{2}{b(b^2 - a^2)} \right) - \frac{2\pi\rho_S a^3}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{2a}{b^2(b^2 - a^2)} \right) \\ &= \frac{4\pi\rho_S a^2}{4\pi\epsilon_0 b^2} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 b^2} \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں کرہ پر کل بار $4\pi a^2 \rho_S$ کو Q لکھا گیا ہے۔ کرہ کے اندر مساوات 2.67 اور مساوات 2.69 کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 2.63

$$(2.71) \quad \begin{aligned} E_z &= \frac{2\pi\rho_S a^2 b}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{2}{a(a^2 - b^2)} \right) - \frac{2\pi\rho_S a^3}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{2b}{a^2(a^2 - b^2)} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

مساوات 2.70 بیرون کرہ z محدود پر میدان دیتا ہے۔ چونکہ ہم کسی بھی سمت میں اس محدود کو رکھ سکتے تھے اور میدان اسی محدود کی سمت یعنی رداسی سمت میں ہوتا لہذا یہ ایک عمومی جواب ہے جسے کسی بھی بیرونی نقطے کے لئے

$$(2.72) \quad \mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r \quad (r > a)$$

لکھا جا سکتا ہے۔ یہ وہی میدان ہے جو کروی محدود کے مرکز پر Q نقطہ بار رکھنے سے حاصل ہوتا ہے۔

مساوات 2.71 کے تحت کرہ کے اندر میدان صفر کے برابر ہے۔ یہ انتہائی اہم نتیجہ ہے۔ ہم کسی بھی مقام کو کرہ یا کسی بھی مکمل بند موصل سطح میں گھیر کر اس مقام پر صفر برقی میدان یقینی بنا سکتے ہیں۔ ایسی سطح کو فیراڈے پردہ²² کہتے ہیں۔

حصہ 3.4.2 میں اسی مسئلے کو انتہائی آسان طریقے سے حل کرنا دکھایا جائے گا۔

مثال 2.12: مثال 2.11 کے نتائج استعمال کرتے ہوئے a رداس کرہ جس میں یکساں ρ_h حجمی کثافتِ بار پائی جائے گا کرہ کے اندر اور کرہ کے باہر برقی میدان E حاصل کریں۔

حل: کرہ کے اندر رداس r پر dr موٹی جھلی کا حجم $4\pi r^2 dr$ ہو گا جس میں کل $4\pi\rho_h r^2 dr$ بار پایا جائے گا۔ مثال 2.11 کے مطابق یہ بار r سے کم رداس کے خطے میں کوئی برقی میدان نہیں پیدا کرتا جبکہ r سے زیادہ رداس پر یہ میدان پیدا کرے گا۔ یوں R سے کم کسی بھی رداس پر جھلی میں پائے جانے والا بار R پر میدان پیدا کرے گا جسے

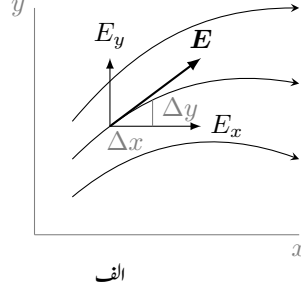
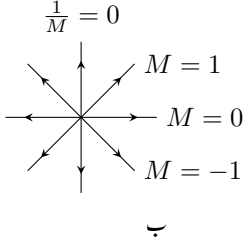
$$(2.73) \quad E = \int_0^R \frac{4\pi\rho_h r^2 dr}{4\pi\epsilon_0 R^2} \mathbf{a}_r = \frac{\rho_h r^3}{3\epsilon_0 R^2} \mathbf{a}_r \Big|_0^R = \frac{\rho_h R}{3\epsilon_0} \mathbf{a}_r \quad (R < a)$$

لکھ کر حاصل کیا جاسکتا ہے۔ بار کرہ کے باہر یعنی $R > a$ کی صورت میں کرہ میں موجود تمام بار بطور نقطہ بار کردار ادا کرتے ہوئے

$$(2.74) \quad E = \frac{\frac{4}{3}\pi a^3 \rho_h}{4\pi\epsilon_0 R^2} \mathbf{a}_r = \frac{a^3 \rho_h}{3\epsilon_0 R^2} \mathbf{a}_r \quad (R > a)$$

2.7 برقی میدان کے سمت بہا و خط

ہم نے اب تک جتنے بھی مثال دیکھے ان سب میں E کی شکل سیدھی لکیر کی مانند رہی ہے۔ ایسے میدان کا تصوراتی شکل ذہن میں بنانا آسان ہوتا ہے۔ یوں نقطہ بار کے میدان کو بار سے ابتدا کرتے ہوئے ہر طرف سمتیوں سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ اب بار کے قریب E کی قیمت زیادہ اور بار سے دور اس کی قیمت کم ہوتی ہے۔ یوں مختلف مقامات پر E کی لمبائی یہاں کے میدان کی نسبت سے ہوگی۔ میدان کو ظاہر کرنے کے دیگر طریقے بھی رائج ہیں۔



شکل 2.8: (الف) سمت بہاؤ خط کے مساوات کا حصول۔ (ب) لکیری کشائیت بار کے سمت بہاؤ خط۔

آئیں ایسے ہی ایک طریقے پر غور کریں جس میں میدان کو سمت بہاؤ خط سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ اس طریقے میں کسی بھی نقطے پر E یہاں سے گزرتے سمت بہاؤ خط کا مماس ہوتا ہے۔ جس مقام پر گھنے سمت بہاؤ خطوط پائے جائیں ایسے مقام پر E کی مقدار زیادہ ہوتی ہے اور جہاں ان خطوط کی تعداد کم ہو وہاں میدان کمزور ہوتا ہے۔ سمت بہاؤ خطوط پر تیر کا نشان E کے مثبت سمت کی نشاندہی کرتا ہے۔

کار تیشی محدود میں کسی بھی میدان کو

$$\mathbf{E} = E_x \mathbf{a}_x + E_y \mathbf{a}_y + E_z \mathbf{a}_z$$

لکھا جاسکتا ہے۔ یہ مساوات ان میدان کو بھی ظاہر کرتا ہے جو سیدھی لکیر کی مانند نہ ہوں۔ آئیں ایسے عمومی میدان پر غور کریں جس میں E_z کی قیمت صفر کے برابر ہو جبکہ E_x اور E_y کی قیمتیں x اور y پر منحصر ہو۔ کسی بھی نقطے (x, y) پر ایسے میدان کو

$$(2.75) \quad \mathbf{E} = E_x(x, y) \mathbf{a}_x + E_y(x, y) \mathbf{a}_y$$

لکھا جاسکتا ہے۔ شکل 2.8-الف میں ایسے ہی ایک E کے تین سمت بہاؤ خط دکھائے گئے ہیں۔ شکل میں کسی عمومی نقطے پر E دکھایا گیا ہے جو اس نقطے سے گزرتے سمت بہاؤ خط کا مماس ہے۔ میدان کے کار تیشی اجزاء E_x اور E_y بھی دکھائے گئے ہیں۔ اسی نقطے پر سمت بہاؤ خط کی چھوٹی لمبائی لیتے ہوئے Δx اور Δy دکھائے گئے ہیں۔ Δx اور Δy کو کم سے کم کرتے ہوئے ہم شکل کو دیکھتے ہوئے

$$(2.76) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{E_y}{E_x}$$

لکھ سکتے ہیں۔ اب اگر ہمیں E_x اور E_y کی خاصیت معلوم ہو تب ہم تکمیل سے سمت بہاؤ خط کی مساوات حاصل کر سکتے ہیں۔

آئیں لامحدود لکیری کثافتِ بار کے میدان کو مثال بناتے ہوئے اس کے سمت بہاؤ خط کی مساوات حاصل کریں۔ $\rho_L = 2\pi\epsilon_0$ کی صورت میں z محور پر لامحدود لکیری کثافتِ بار کا میدان

$$(2.77) \quad E = \frac{a_\rho}{\rho}$$

لکھا جاتا ہے۔ مساوات 2.75 بھی اسی میدان کی مساوات ہے جس سے ظاہر ہے کہ $E_x = E \cdot a_x$ اور $E_y = E \cdot a_y$ سے حاصل کئے جاسکتے ہیں۔ یوں مساوات 2.77 کی مدد سے

$$E_x = \frac{1}{\rho} a_\rho \cdot a_x = \frac{\cos \phi}{\rho} = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$E_y = \frac{1}{\rho} a_\rho \cdot a_y = \frac{\sin \phi}{\rho} = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ یوں لامحدود لکیری کثافتِ بار کے میدان کو

$$(2.78) \quad E = \frac{x}{x^2 + y^2} a_x + \frac{y}{x^2 + y^2} a_y$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس طرح مساوات 2.76 کو

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

یا

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

لکھ کر اس کا تکمیل

$$\ln y = \ln x + M'$$

یعنی

$$(2.79) \quad y = Mx$$

لیتے ہوئے میدان کے سمت بہاؤ خط کی مساوات حاصل کرتے ہیں۔ یہ سیدھی لکیری کثافتِ بار کے مختلف M کے قیمتوں کے لئے شکل 2.8-ب میں کھینچا گیا ہے۔

سوالات

سوال 2.1: صفحہ 86 پر مساوات 2.60 میں a_x اور a_y اجزاء کا تکمیل لیتے ہوئے انہیں صفر کے برابر ثابت کریں۔

سوال 2.2: تلوں کے تینوں کونوں پر $25 \mu\text{C}$ کا بار پایا جاتا ہے جبکہ تینوں کونوں سے 15 cm فاصلے پر $20 \mu\text{C}$ بار پایا جاتا ہے۔ تلوں کے اطراف 10 cm ہونے کی صورت میں چوتھے بار پر قوت دفع کی مقدار حاصل کریں۔

جواب: 0.553 N

سوال 2.3: $z = 0$ پر 4 nF اور $z = 1 \text{ cm}$ پر 3 nF بار پائے جاتے ہیں۔ z محور پر وہ نقطے دریافت کریں جہاں مثبت بار پر صفر قوت پائی جائے گی۔

جوابات: $z = 0.92 \text{ cm}$ ، $z = 7.08 \text{ cm}$

سوال 2.4: ایک چکور کے اطراف 25 cm ہیں جبکہ اس کے چاروں کونوں پر 30 nC بار پایا جاتا ہے۔ کسی ایک کونے کے بار پر کتنی قوت عمل کرے گی۔

جواب: 0.248 mN

سوال 2.5: نقطہ $(2, 1, -3)$ پر 15 nC اور نقطہ $(-3, -5, 4)$ پر 6 nC بار پایا جاتا ہے۔ نقطہ $(2, 1, -3)$ پر برقی شدت E حاصل کریں۔

جواب: $-0.191a_x + 1.057a_y + 2.195a_z$

سوال 2.6: نقطہ $(0, 0, 3)$ اور $(0, 0, -3)$ پر $20 \mu\text{C}$ بار پائے جاتے ہیں۔ نقطہ $N(2, 0, 0)$ پر برقی شدت E حاصل کریں۔ محور کے مرکز پر کتنا بار نقطہ N پر اتنی ہی برقی شدت پیدا کرے گا۔

جوابات: $E = 15339a_x \frac{\text{V}}{\text{m}}$ ، $6.827 \mu\text{C}$

سوال 2.7: نقطہ $(4, -2, 7)$ پر $5 \mu\text{C}$ اور $(-3, 4, -2)$ پر $12 \mu\text{C}$ بار پایا جاتا ہے۔ y محور پر کہاں $E_x = 0$ ہو گا۔

جواب: $y = -6.89$ ، $y = -22.11$

سوال 2.8: نقطہ $P(6, 3, 7)$ پر $6 \mu\text{C}$ پایا جاتا ہے۔ نقطہ $N(5, 4, 2)$ پر کارٹیس، نکلے اور کروی محدد میں E حاصل کریں۔ نقطہ N کے اکائی سمتیات استعمال کریں۔ - جوابات: $E = -384.4a_x + 384.4a_y - 1922a_z$ ، $E = -60a_\rho + 540a_\phi - 1922a_z$ ، $E = -630a_r + 1817a_\theta + 540a_\phi$

سوال 2.9: نقطہ $(0, 0, 0.25)$ اور $(0, 0, -0.25)$ پر 50 nC جبکہ $(0, 0, 0)$ پر -35 nC پایا جاتا ہے۔ نقطہ $N(3, 1, 2)$ پر کارٹیس اور کروی محدد میں E حاصل کریں۔

جواب: $42a_r + 0.39a_\theta$ ، $34a_x + 11a_y + 22a_z$

سوال 2.10: محدد کے مرکز پر 1 nC بار پایا جاتا ہے۔ سطح $z = 0$ پر اس خط کی مساوات حاصل کریں جس پر $E_y = 1 \frac{\text{V}}{\text{m}}$ ہو گا۔

جواب: $\rho^2 = 8.987 \sin \phi$ ، $80.8y^2 = (x^2 + y^2)^3$

سوال 2.11: محدد کے مرکز پر پڑے چکور کے چاروں کونوں پر 5 nC نقطہ بار پائے جاتے ہیں۔ چکور $z = 0$ سطح پر پایا جاتا ہے جبکہ اس کے اطراف 1 m لمبے ہیں۔ نقطہ $(0, a, 0)$ اور نقطہ $(0, 2a, 0)$ پر برقی شدت کی شرح $a = 2$ ، $a = 10$ اور $a = \infty$ کی صورت میں حاصل کریں۔

جوابات: 4.15 ، 4.01 ، 4

سوال 2.12: نقطہ $(0, 0, 0)$ پر Q_1 اور نقطہ $(1, 0, 0)$ پر Q_2 نقطہ بار پائے جاتے ہیں۔ نقطہ $(2, 1, 0)$ پر $E_x = 0$ ہونے کی صورت میں باروں کا تعلق دریافت کریں۔

جواب: $Q_1 = -1.976Q_2$

سوال 2.13: کارٹیس محدد کے پہلے آٹھویں حصے ($x > 0, y > 0, z > 0$) میں صحیحی کثافت بار $\rho_h = 10e^{-2z}(x^2 + 2y^2)$ ہے جبکہ بقایا سات حصوں میں کوئی بار نہیں پایا جاتا۔ خطہ $(0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1)$ میں کل بار حاصل کریں۔ اسی طرح خطہ $(0 \leq x + 2y \leq 1, 0 \leq z \leq 1)$ میں کل بار حاصل کریں۔

جوابات: پہلا جواب 4.32 C ہے۔ دوسرا مکمل $\int_0^1 \int_0^{1-2y} \int_0^{1/2} \rho_h dz dx dy$ لکھتے ہوئے 0.27 C حاصل ہو گا۔

سوال 2.14: حجمی کثافت بار $\rho_h = (\rho + 0.002)z^2 \tan \phi \text{ C/m}^3$ خط $0 \leq \rho \leq 0.008$ ، $0 \leq \phi \leq 30^\circ$ میں پایا جاتا ہے۔ کثافت بار کی زیادہ سے زیادہ قیمت دریافت کریں۔ اس خطے میں کل بار حاصل کریں۔

جوابات: $11.05 \mu\text{C}$ ، 0.933 C/m^3

سوال 2.15: ٹکلی محدود میں z محدود کے گرد یکساں حجمی کثافت بار $e^{-\rho^2}$ پائی جاتی ہے۔ $z = 0$ تا $z = 1$ کل بار حاصل کریں۔ z محدود کے گرد کتنے رداں کے اندر کل بار کا آدھا پایا جاتا ہے۔

جوابات: 0.832 m ، 3.142 C

سوال 2.16: z محدود میں رداں کے ساتھ بدلتی حجمی کثافت بار $\rho_h = \sqrt{r}$ پائی جاتی ہے۔ اکائی رداں کے کرہ میں کل بار حاصل کریں۔ اسی طرح خطہ $(r \leq 0.5, \theta \leq 25^\circ, \phi \leq \frac{\pi}{3})$ میں کل بار حاصل کریں۔

جوابات: 0.028 C ، 3.59 C

سوال 2.17: x محدود پر $\rho_L = 5 \frac{\text{nC}}{\text{m}}$ لکیری کثافت بار پایا جاتا ہے جبکہ نقطہ $(0, 3, 0)$ پر -2 nC نقطہ بار پایا جاتا ہے۔ نقطہ $(4, 8, 1)$ پر E حاصل کریں۔

جواب: $-0.26a_x + 10.73a_y + 1.32a_z \frac{\text{V}}{\text{m}}$

سوال 2.18: نقطہ $(0, 2, 0)$ اور $(0, 0, 4)$ سے گزرتی سیدھی لکیر پر لکیری کثافت بار $2 \frac{\text{nC}}{\text{m}}$ پایا جاتا ہے جبکہ نقطہ $(6, 1, -2)$ پر 7 nC بار پایا جاتا ہے۔ نقطہ $(6, 8, 4)$ پر E حاصل کریں۔

جواب: $2.47a_x + 3.78a_y + 1.65a_z \frac{\text{V}}{\text{m}}$

سوال 2.19: کارٹیس z محدود کے کچھ حصہ $0 \leq z$ پر لکیری کثافت بار $5 \frac{\mu\text{C}}{\text{m}}$ پایا جاتا ہے۔ نقطہ $(0, 0, -2)$ اور نقطہ $(5, -2, 6)$ پر برقی شدت E حاصل کریں۔

جوابات: $13.5a_x + 5.4a_y - 5.5a_z \frac{\text{V}}{\text{m}}$ ، $-22.5a_z \frac{\text{V}}{\text{m}}$

سوال 2.20: کارٹیس z محدود کے کچھ حصہ $2 \leq z \leq 10$ پر لکیری کثافت بار $2 \frac{\mu\text{C}}{\text{m}}$ پایا جاتا ہے۔ نقطہ $(2, 12, 8)$ پر برقی شدت E حاصل کریں۔

$$147a_x + 881a_y + 133a_z \frac{V}{m}$$

سوال 2.21: سطح $y = 1$ پر $\rho_s = 0.72 \frac{nC}{m^2}$ ، سطح $y = -3$ پر $\rho_s = -0.72 \frac{nC}{m^2}$ ، سطح $x = -6$ پر $0.4 \frac{nC}{m^2}$ اور کبیر $x = 2, z = 3$ پر $0.4\pi \frac{nC}{m}$ پایا جاتا ہے۔ نقطہ $(1, 3, -1)$ پر E حاصل کریں۔

$$\text{جواب: } 21.3a_x - 5.31a_z \frac{V}{m}$$

سوال 2.22: سطح $z = 0$ پر مستطیل خطہ $-2 \leq x \leq 2, -3 \leq y \leq 3$ پر $\rho_s = |x| \frac{nC}{m^2}$ پایا جاتا ہے۔ نقطہ $(0, 0, 3)$ پر برقی میدان E حاصل کریں۔

$$\text{جواب: } 13.36 \frac{V}{m}$$

سوال 2.23: سطح $z = 0$ پر ٹکلی رداں $\rho = 2$ تا $\rho = 5$ سطحی کثافت بار $\rho_s = 4 \frac{nC}{m^2}$ پایا جاتا ہے۔ نقطہ $(0, 0, 5)$ پر برقی شدت E حاصل کریں۔

$$\text{جواب: } 50 \frac{V}{m}$$

سوال 2.24: میدان $E = 3\sqrt{xy}a_x + x^3y^2a_y$ کا سمت بہاؤ خط حاصل کریں۔ نقطہ $(4, 1, 7)$ پر میدان کی سمت میں اکائی سمتیہ لکھیں۔

$$\text{جوابات: } 0.093a_x + 0.996a_y, \quad \frac{y^2}{2} = \frac{x^{3.5}}{3.5} + C$$

سوال 2.25: میدان $E = (x+2)a_x + (4-y)a_y$ کے اس سمت بہاؤ خط کی مساوات حاصل کریں جو نقطہ $(5, 7, 2)$ سے گزرتی ہے۔

$$\text{جواب: } (y-4)(x+2) = 21$$

سوال 2.26: جو میدان z تبدیل کرنے سے تبدیل نہیں ہوتے، ٹکلی محدود میں ان کی سمت بہاؤ خط $\frac{d\rho}{\rho d\phi} = \frac{E_\rho}{E_\phi}$ حل کرتے ہوئے حاصل کئے جاتے ہیں۔ نقطہ $(5, 75^\circ, 3)$ سے گزرتے میدان $E = \rho \cos \phi a_\rho + \sin \phi a_\phi$ کی سمت بہاؤ خط حاصل کریں۔

$$\text{جواب: } \frac{1}{\rho} + \ln(\sin \phi) = 0.1653$$

باب 3

گائوس کا قانون اور پھیلاؤ

3.1 ساکن برقی بار

3.2 فیراڈے کا تجربہ

اس باب کا آغاز جناب مائیکل فیراڈے¹ کے ایک تجربے سے کرتے ہیں جس کے نتیجے کو یوں بیان کیا جاسکتا ہے۔ برقی بار Q کو بے بار موصل سطح میں مکمل طور پر یوں بند کرنے کے بعد، کہ بار اور سطح کہیں بھی ایک دونوں کو نہ چھویں، موصل سطح کو زمین کے ساتھ ایک لمحے کے لئے ملانے سے موصل سطح پر Q- بار پیدا ہو جاتا ہے۔ دیکھا یہ گیا ہے کہ بار اور بیرونی سطح کے درمیان فاصلہ کم یا زیادہ کرنے سے نتیجے پر کوئی اثر نہیں ہوتا۔ اسی طرح بار اور سطح کے درمیان مختلف غیر موصل مواد بھرنے سے بھی نتیجے پر کوئی اثر نہیں ہوتا۔ مزید یہ کہ سطح کی شکل کا بھی نتیجے پر کوئی اثر نہیں ہوتا۔ اسی طرح جس چیز پر بار Q رکھا گیا ہو، اس کی شکل کا بھی نتیجے پر کوئی اثر نہیں ہوتا۔

ایسا معلوم ہوتا ہے جیسے اندرونی بار سے بیرونی سطح تک بار کی مقدار اور قطب کی خبر پہنچتی ہے۔ اس حقیقت کو تصوراتی جامع یوں پہنایا جاسکتا ہے کہ ہم سمجھیں کہ مثبت بار سے ہر جانب یکساں طور پر کچھ خارج ہوتا ہے۔ اس چیز کو ہم برقی بہاؤ² کہیں گے اور اس کو ψ سے ظاہر کریں گے۔ برقی بہاؤ کو بار کے برابر تصور کیا جاتا ہے۔

(3.1)

$$\psi = Q$$

Michael Faraday¹
electric flux²

برقی بہاؤ کی اکائی کولمب C ہی تصور کی جاتی ہے۔ منفی بار کی صورت میں برقی بہاؤ کی سمت الٹی ہو گی اور یہ بار میں داخل ہو گا۔

تصور کریں کہ اندرونی بار r_1 رداس کی کرہ پر پایا جاتا ہے جبکہ اسے r_2 رداس کی کرہ نے گھیرا ہوا ہے۔ کرہ کی سطح $4\pi r^2$ کے برابر ہوتی ہے۔ اندرونی کرہ سے ψ برقی بہاؤ خارج ہوتا ہے۔ یوں اندرونی کرہ سے $\frac{\psi}{4\pi r_1^2}$ برقی بہاؤ فی اکائی رقبہ خارج ہوتا ہے جسے $\frac{Q}{4\pi r_1^2}$ لکھا جا سکتا ہے۔ اسی طرح بیرونی کرہ پر $\frac{Q}{4\pi r_2^2}$ برقی بہاؤ فی اکائی رقبہ پہنچتی ہے۔ برقی بہاؤ فی اکائی رقبہ کو کثافت برقی بہاؤ D^3 کہا جائے گا۔ یوں اگر اندرونی کرہ کے رداس کو اتنا کم کر دیا جائے کہ اس کو نقطہ تصور کرنا ممکن ہو اور اس نقطہ بار کو رداس r کے کرہ کے مرکز پر رکھا جائے تو کرہ پر

$$(3.2) \quad D = \frac{Q}{4\pi r^2} a_r$$

سمتیہ کثافت برقی بہاؤ پائی جائے گی۔ صفحہ 64 پر مساوات 2.19 سے موازنہ کرنے سے ثابت ہوتا ہے کہ خالی خلاء میں

$$(3.3) \quad D = \epsilon_0 E \quad \text{خالی خلاء}$$

کے برابر ہے۔ اگر نقطہ بار کو کروی محدود کے مرکز پر نہ رکھا جائے تب کسی بھی مقام پر کثافت برقی بہاؤ حاصل کرنے کی خاطر مساوات 3.2 یوں لکھی جائے گی

$$(3.4) \quad D = \frac{Q}{4\pi R^2} a_R$$

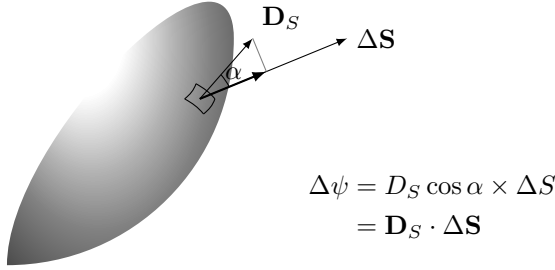
جہاں a_R بار سے اس مقام کی جانب اکائی سمتیہ ہے اور R ان کے درمیان فاصلہ ہے۔

کسی بھی حجم جس میں تغیر پذیر بار کی کثافت پائی جائے میں مقام r' پر $\Delta h'$ حجم میں $\rho'_h \Delta h'$ بار پایا جائے گا جو مقام پر r

$$\Delta D(r) = \frac{\rho'_h \Delta h'}{4\pi |r - r'|^2} \frac{r - r'}{|r - r'|}$$

کثافت برقی بہاؤ پیدا کرے گا۔ قانون کولمب خطی ہونے کی بنا پر D بھی خطی نوعیت کا ہوتا ہے لہذا حجم کے تمام باروں سے

$$(3.5) \quad D(r) = \int_h \frac{\rho'_h dh'}{4\pi |r - r'|^2} \frac{r - r'}{|r - r'|}$$



شکل 3.1: مکمل بند سطح سے گزرتی برقی بہاؤ سطح میں گھیرے کل بار کے برابر ہے۔

حاصل ہو گا۔ مساوات 3.5 کا صفحہ 79 پر مساوات 2.48 کے ساتھ موازنہ کرنے سے ثابت ہوتا ہے کہ حجمی کثافت کے لئے بھی مساوات 3.3 خالی خلاء میں \mathbf{D} اور \mathbf{E} کا تعلق بیان کرتا ہے۔ اسی طرح ρ_S اور ρ_L سے پیدا \mathbf{D} اور \mathbf{E} کا خالی خلاء میں تعلق بھی مساوات 3.3 ہی بیان کرتا ہے۔ یوں مساوات 3.3 ایک عمومی مساوات ہے۔

3.3 گاوس کا قانون

فیراڈے کے تجربے کو قانون کی شکل میں یوں پیش کیا جا سکتا ہے جسے گاوس کا قانون⁴ کہتے ہیں۔

کسی بھی مکمل بند سطح سے کل گزرتی برقی بہاؤ سطح میں گھیرے بار کے برابر ہوتی ہے۔

جناب گاوس⁵ نے اس قانون کو ریاضیاتی شکل دی جس کی بنا پر یہ قانون انہیں کے نام سے منسوب ہے۔ آئیں گاوس کے قانون کی ریاضیاتی شکل حاصل کریں۔

شکل 3.1 میں بند سطح دکھائی گئی ہے جس کی کوئی مخصوص شکل نہیں ہے۔ اس سطح کے اندر یعنی سطح کے گھیرے حجم میں کل Q بار پایا جاتا ہے۔ سطح پر کسی بھی مقام سے گزرتا برقی بہاؤ اس مقام پر سطح کی عمودی سمت میں کثافت برقی

⁴Gauss's law
⁵Carl Friedrich Gauss

بہاؤ اور اس مقام کے رقبہ کے حاصل ضرب کے برابر ہو گا۔ یوں شکل کو دیکھتے ہوئے چھوٹے سے رقبہ ΔS پر سطح کے عمودی سمت میں برقی بہاؤ کے کثافت کی قیمت $D_S \cos \alpha$ ہو گی لہذا

$$\Delta\psi = D_S \cos \alpha \Delta S$$

ہو گا۔ کثافتِ برقی بہاؤ D_S لکھتے ہوئے زیرنوشت میں S اس حقیقت کی یاد دہانی کرتا ہے کہ سطح پر کثافتِ برقی بہاؤ کی قیمت کی بات کی جا رہی ہے۔ اس مساوات کو ضرب نقطہ کے استعمال سے

$$\Delta\psi = D_S \cdot \Delta S$$

لکھا جا سکتا ہے۔ مکمل سطح سے گزرتے کل برقی بہاؤ تکملہ سے حاصل ہو گی جو گاوس کے قانون کے مطابق گھیرے ہوئے بار Q کے برابر ہے۔ یوں

$$(3.6) \quad \psi = \oint_S D_S \cdot \Delta S = Q$$

لکھا جا سکتا ہے۔ یہ تکملہ دراصل دو درجی تکملہ ہے جسے ہم عموماً ایک درجی تکملہ سے ہی ظاہر کریں گے۔ تکملہ کے نشان پر گول دائرہ بند تکملہ⁶ کو ظاہر کرتا ہے جبکہ بند تکملہ کے نیچے S اس بند سطح کو ظاہر کرتا ہے جس پر بند تکملہ حاصل کیا جا رہا ہو۔ اس بند سطح کو عموماً گاوس سطح⁷ کہتے ہیں۔

جس مقام پر بار کی کثافت ρ_h ہو، وہاں چھوٹی سی حجم Δh میں کل بار $\rho_h \Delta h$ پایا جاتا ہے۔ یوں کسی بھی حجم کو چھوٹے چھوٹے حصوں میں تقسیم کرتے ہوئے تمام حصوں میں پائے جانے والے باروں کا مجموعہ پوری حجم میں بار کے برابر ہو گا یعنی

$$(3.7) \quad Q = \int_h \rho_h dh$$

جہاں تین درجی حجم کے تکملہ کو ایک درجی تکملہ کے نشان سے ظاہر کیا گیا ہے۔

مندرجہ بالا دو مساوات سے

$$(3.8) \quad \oint_S D_S \cdot \Delta S = \int_h \rho_h dh$$

حاصل ہوتا ہے جو گاوس کے قانون کی مکملہ شکل ہے۔ اس مساوات کو یوں پڑھا جاتا ہے کہ کسی بھی بند سطح سے گزرتی کل برقی بہا اس سطح کے اندر گھیرے کل بار کے برابر ہے۔

یہ ضروری نہیں کہ گھیرے ہوئے حجم یعنی بند حجم میں حجمی کثافت ہی پائی جائے۔ بند حجم کے اندر سطحی کثافت، لکیری کثافت، علیحدہ علیحدہ نقطہ بار یا ان تینوں اقسام کا مجموعہ پایا جاسکتا ہے۔ حجم گھیرنے والے بند بیرونی سطح کے اندر کسی سطح پر سطحی کثافت کی صورت میں مساوات 3.7 کی جگہ

$$(3.9) \quad Q = \int_S \rho_S dS$$

لکھا جائے گا جہاں بار بردار سطح از خود بند یا کھلی سطح ہو سکتی ہے۔ لکیری کثافت کی صورت میں

$$(3.10) \quad Q = \int_L \rho_L dL$$

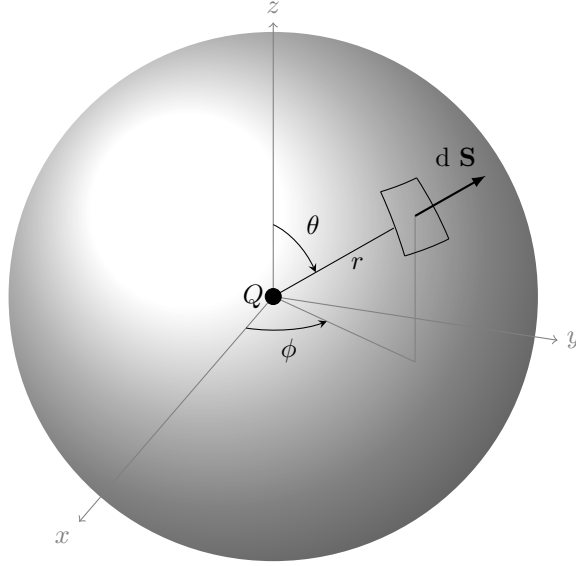
جبکہ n عدد نقطہ بار کی صورت میں

$$(3.11) \quad Q = \sum_n Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots + Q_n$$

لکھا جائے گا، وغیرہ وغیرہ۔ بہر حال مساوات 3.7 سے مراد یہ تمام صورتیں لی جاتی ہیں اور یوں ان تمام صورتوں کے لئے گاوس کے قانون کی مکملہ شکل مساوات 3.8 ہی ہے۔

3.4 گاوس کے قانون کا استعمال

گزشتہ باب میں ہم نے کولمب کے قانون سے نقطہ بار، لامحدود لکیری بار اور لامحدود سطحی بار سے پیدا برقی میدان حاصل کئے۔ آپس انہیں کو گاوس کے قانون کی مدد سے بھی حاصل کریں۔ آپ دیکھیں گے کہ ان تینوں صورتوں میں گاوس کے قانون کا استعمال شرم ناک حد تک سادہ ثابت ہو گا۔ یہاں یہ بتلانا ضروری ہے کہ ایسے مسائل جن میں گاوس کا قانون استعمال کیا جاسکے کی تعداد بہت کم ہیں۔



شکل 3.2: کرہ کے مرکز پر نقطہ بار کا کرہ کے سطح پر کثافت برقی بہاؤ

3.4.1 نقطہ بار

شکل 3.2 میں کرہ کے مرکز پر نقطہ بار دکھایا گیا ہے۔ نقطہ بار کو کروی محدود⁸ کے مرکز پر رکھتے ہوئے ہم نے مختلف مقامات سے دیکھتے ہوئے مسئلے کی مشابہت کی بنا پر اخذ کیا تھا کہ کثافت برقی میدان صرف رداس کی سمت میں ممکن ہے اور اس کی حتمی قیمت صرف اور صرف رداس r تبدیل کرنے سے تبدیل ہوگی۔ اس کا مطلب ہے کہ کروی محدود کے مرکز کے گرد رداس r کے کرہ پر \mathbf{D} تبدیل نہیں ہوگا۔

کروی محدود استعمال کرتے ہوئے کرہ پر چھوٹی سی سطح

$$dS = r^2 \sin \theta d\theta d\phi$$

لکھی جاسکتی ہے۔ اسی کی سمتی شکل

$$d\mathbf{S} = r^2 \sin \theta d\theta d\phi \mathbf{a}_r$$

⁸spherical coordinates

ہوگی۔ اس سطح پر کثافتِ برقی بہاؤ کی قیمت D_S اور سمت \mathbf{a}_r ہوگی لہذا سمتی کثافتِ برقی بہاؤ

$$D_S = D_S \mathbf{a}_r$$

لکھی جائے گی۔ یوں اس چھوٹی سی سطح سے گزرتی برقی بہاؤ

$$\begin{aligned} d\psi &= D_S \cdot dS \\ &= (D_S \mathbf{a}_r) \cdot (r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi \mathbf{a}_r) \\ &= D_S r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi \end{aligned}$$

ہوگی۔ اس طرح پوری کرہ سے گزرتی برقی بہاؤ مکملہ سے یوں حاصل ہوگی۔

$$\begin{aligned} \psi &= D_S r^2 \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \sin \theta \, d\theta \, d\phi \\ &= D_S r^2 \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} -\cos \theta \Big|_0^{\pi} d\phi \\ &= D_S r^2 \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} 2 \, d\phi \\ &= 4\pi r^2 D_S \end{aligned}$$

گاوس کے قانون کے تحت یہ برقی بہاؤ گھیرے گئے بار Q کے برابر ہے لہذا

$$4\pi r^2 D_S = Q$$

ہو گا جس سے

$$D_S = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

حاصل ہوتا ہے۔ یہی جواب بغیر زیادہ حساب و کتاب کے یوں حاصل کیا جا سکتا ہے۔

کرہ پر کثافتِ برقی بہاؤ D_S عمودی ہے اور اس کی قیمت کرہ پر تبدیل نہیں ہوتی۔ کرہ کی سطح $4\pi r^2$ کے برابر ہے لہذا $4\pi r^2 D_S = Q$ کے برابر ہے لہذا $D_S = \frac{Q}{4\pi r^2}$ حاصل ہوتا ہے۔ اس کی سمتی شکل

$$(3.12) \quad D_S = \frac{Q}{4\pi r^2} \mathbf{a}_r$$

اور $D = \epsilon_0 E$ سے

$$(3.13) \quad E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس مساوات کا صفحہ 64 پر مساوات 2.19 کے ساتھ موازنہ کریں اور دیکھیں کہ موجودہ جواب کتنی آسانی سے حاصل ہوا۔

3.4.2 یکساں بار بردار کروی سطح

صفحہ 84 پر حصہ 2.11 میں کروی محدود کے مرکز پر a رداس کی کروی سطح جس پر یکساں ρ_S کثافت بار پائی جائے گا میدان بیرونی کرہ اور اندرونی کرہ حاصل کیا گیا۔ آئیں گاوس کے قانون سے انہیں جوابات کو دوبارہ حاصل کریں۔

کرہ کے اندر r رداس کا کرہ لیتے ہیں۔ یوں $r < a$ رداس کے کرہ میں صفر بار پایا جائے گا۔ یوں اس کی سطح پر صفر میدان ہو گا۔ اس کے برعکس $r > a$ رداس کا کرہ a رداس کے کرہ کو گھیرتا ہے لہذا یہ $4\pi a^2 \rho_S$ بار کو گھیرے گا لہذا یہاں

$$D = \frac{4\pi a^2 \rho_S}{4\pi r^2} \mathbf{a}_r$$

ہو گا جس سے

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r$$

حاصل ہوتا ہے جہاں کل بار کو Q لکھا گیا ہے۔ یہ نتائج گاوس کے قانون کے استعمال سے حاصل کئے گئے۔ ساتھ ہی ساتھ اس حقیقت کو مد نظر رکھا گیا کہ میدان صرف رداسی سمت میں ممکن ہے۔

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اس مسئلے کو حل کرنے کا موجودہ طریقہ نہایت آسان ہے۔

3.4.3 یکساں بار بردار سیدھی لامحدود لکیر

ایسی لامحدود لکیر جس پر بار کی یکساں کثافت پائی جائے کے گرد رداں پر گھومتے ہوئے صورت حال میں کوئی تبدیلی نظر نہیں آتی۔ اسی طرح اس لکیر کے ساتھ ساتھ چلتے ہوئے بھی صورت حال میں کسی قسم کی تبدیلی پیدا نہیں ہوتی۔ لامحدود لکیر کو نکلی محدود کی z محدود تصور کرتے ہوئے ان حقائق کی روشنی میں ہم توقع کرتے ہیں کہ برقی میدان صرف رداں تبدیل کرنے سے ہی تبدیل ہو گا۔ مزید، جیسا کہ پچھلی باب میں بتلایا گیا، کسی بھی نقطے کے ایک جانب لکیر پر بار سے پیدا برقی میدان کا وہ حصہ جو a_z کی سمت میں ہو کو لکیر پر نقطے کی دوسری جانب برابر فاصلے پر بار سے پیدا برقی میدان کا وہ حصہ جو a_z کی سمت میں ہو ختم کرتا ہے۔ یوں یہ اخذ کیا جاسکتا ہے کہ کثافت برقی بہاؤ صرف رداں کی سمت میں ہی پایا جائے گا۔ آئیں ان معلومات کی روشنی میں گاوس کے قانون کی مدد سے کثافت برقی بہاؤ حاصل کریں۔

بار بردار لکیر جس پر یکساں کثافت بار ρ_L پایا جائے کی لمبائی L میں کل بار $\rho_L L$ ہو گا۔ اس لمبائی کے گرد ρ رداں کی نکلی سطح تصور کرتے ہیں جس کے دونوں آخری سرے⁹ بند تصور کریں۔ چونکہ برقی بہاؤ صرف رداں کی سمت میں ہے لہذا ان دونوں آخری سروں سے کوئی برقی بہاؤ نہیں ہو گا۔ نکلی سطح کا رقبہ $2\pi\rho L$ ہے جبکہ اس سطح پر ہر جگہ کثافت برقی بہاؤ D_ρ ہے لہذا پوری سطح سے $2\pi\rho L D_\rho$ برقی بہاؤ ہو گا جو گاوس کے قانون کے تحت گہرے گئے بار $\rho_L L$ کے برابر ہو گا۔ اس طرح

$$2\pi\rho D_\rho = \rho_L L$$

لکھتے ہوئے

$$D_\rho = \frac{\rho_L}{2\pi\rho}$$

حاصل ہوتا ہے جس کی سمتی شکل

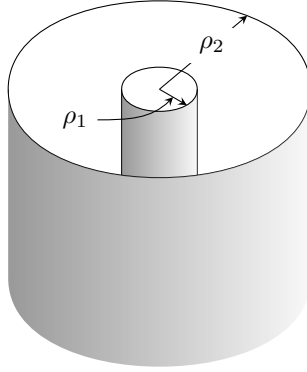
$$(3.14) \quad D_\rho = \frac{\rho_L}{2\pi\rho} \mathbf{a}_\rho$$

سے

$$(3.15) \quad E_\rho = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0\rho} \mathbf{a}_\rho$$

حاصل ہوتا ہے۔ صفحہ 71 پر مساوات 2.30 کے ساتھ موازنہ کریں اور دیکھیں کہ موجودہ طریقہ کتنا سادہ ہے۔

⁹ آخری سروں کو غیر موصل چادر سے بند کیا جاسکتا ہے۔ یوں اس نکلی سطح پر بار نہیں پہنچ پائے گا۔



شکل 3.3: ہم محوری تار

3.5 ہم محوری تار

یکساں بار بردار سیدھی لامحدود لکیر کے قصبے کو آگے بڑھاتے ہوئے تصور کریں کہ اس تار کا رداس ρ_1 ہے۔ اگر تار پر کسی بھی جگہ L لمبائی میں Q بار پایا جائے تو تار پر بار کی لکیری کثافت $\rho_L = \frac{Q}{L}$ ہوگی جبکہ اس پر بار کی سطحی کثافت $\frac{Q}{2\pi\rho_1 L}$ ہوگی۔ جیسا آپ جانتے ہیں ہیں ٹھوس موصل میں باروں کے مابین قوت دفع کی وجہ سے تمام بار موصل کے بیرونی سطح پر دھکیلے جاتے ہیں۔ یوں بار Q تار کے بیرونی سطح، محور سے ρ_1 فاصلے، پر پایا جائے گا۔

اب تصور کریں کہ پہلی تار کے اوپر نئی نما دوسری تار چڑھائی جائے جس کا اندرونی رداس ρ_2 ہو جہاں $\rho_2 > \rho_1$ ہو گا۔ ایسی تار جسے ہم محوری تار¹⁰ کہتے ہیں کو شکل 3.3 میں دکھایا گیا ہے۔ تصور کریں کہ بیرونی تار پر کسی بھی جگہ L لمبائی پر $-Q$ بار پایا جاتا ہے۔ دونوں تاروں پر الٹ اقسام کے بار ہیں جن میں قوت کشش پائی جائے گی۔ یوں بیرونی تار پر بار تار کے اندرونی سطح یعنی محور سے ρ_2 رداس پر پایا جائے گا۔ بیرونی تار پر $\rho_L = \frac{-Q}{L}$ جبکہ $\rho_S = \frac{-Q}{2\pi\rho_2 L}$ ہوگی۔

دونوں تاروں کے درمیانی فاصلے میں رداس ρ کی فرضی نلکی سطح صرف اندرونی تار کے بار کو گھیرتی ہے لہذا L لمبائی

coaxial cable¹⁰

کی ایسی نکلے پر مساوات 3.14 کی طرح

$$(3.16) \quad \begin{aligned} D &= \frac{\rho L}{2\pi\rho} a_\rho \\ &= \frac{Q}{2\pi\rho L} a_\rho \end{aligned}$$

پایا جائے گا۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ بیرونی تار پر بار کا اس میدان پر کوئی اثر نہیں پایا جاتا۔ یوں اندرونی تار کے بیرونی سطح پر

$$(3.17) \quad D_1 = \frac{Q}{2\pi\rho_1 L} a_\rho$$

جبکہ بیرونی تار کے اندرونی سطح پر

$$(3.18) \quad D_2 = \frac{Q}{2\pi\rho_2 L} a_\rho$$

پایا جائے گا۔ بیرونی تار کے باہر فرضی نکلے سطح میں کل صفر بار پایا جاتا ہے لہذا ہم محوری تار کے باہر (یعنی بیرونی تار کے باہر)

$$(3.19) \quad D_{\text{ہرے تار}} = 0$$

ہو گا۔ مساوات 3.14 انتہائی اہم نتیجہ ہے۔ اس کے مطابق ہم محوری تار کے باہر کسی قسم کا برقی میدان نہیں پایا جاتا لہذا تار کے باہر سے کسی طرح بھی یہ معلوم نہیں کیا جاسکتا کہ تار پر کس قسم کا بار پائے جاتے ہیں۔ یوں ہم محوری تار کے ذریعہ اشارات کی منتقلی محفوظ ہوتی ہے۔ ہم محوری تار میں بیرونی تار اندرونی تار کو پناہی دیتا ہے۔ لہذا ہم محوری تار کو پناہ دار تار¹¹ بھی کہا جائے گا۔

مثال 3.1: ہم محوری تار کے اندرونی تار کا رداس 1 mm اور بیرونی تار کا اندرونی رداس 5 mm ہے۔ 3 mm رداس پر کشافنت برقی بہاؤ $5 \frac{\mu\text{Wb}}{\text{m}^2}$ ہے جبکہ تار کے باہر کوئی برقی میدان نہیں پایا جاتا۔ دونوں تاروں پر بار کی سطحی کشافنت حاصل کریں۔

حل: تار کے گرد برقی میدان صرف ردا اس کی سمت میں پایا جاتا ہے۔ اگر تار پر بار کی لکیری کثافت ρ_L ہو تب مساوات

$$-5 \times 10^{-6} = \frac{\rho_L}{2\pi \times 0.003}$$

سے $\rho_L = -94.26 \frac{nC}{m}$ حاصل ہوتا ہے۔ یوں اندرونی تار کے ایک میٹر لمبائی پر $-94.26 nC$ بار پایا جائے گا جس سے اس کی سطحی کثافت

$$\rho_{S1} = \frac{-0.09426 \times 10^{-9}}{2\pi \times 0.001 \times 1} = -15 \frac{\mu C}{m^2}$$

حاصل ہوتی ہے۔ بیرونی تار کے ایک میٹر فاصلے پر $94.26 nC$ بار پایا جائے گا جس سے یہاں

$$\rho_{S2} = \frac{94.26 \times 10^{-9}}{2\pi \times 0.005 \times 1} = 3 \frac{\mu C}{m^2}$$

حاصل ہوتا ہے۔

3.6 یکساں بار بردار ہموار لامحدود سطح

اگر بار بردار ہموار لامحدود سطح سے برابر فاصلے پر کسی بھی مقام سے دیکھا جائے تو صورت حال بالکل یکساں معلوم ہو گا۔ کسی بھی نقطے کے ایک جانب باروں سے پیدا برقی میدان کا وہ حصہ جو بار بردار سطح کے متوازی ہو کو نقطے کے دوسری جانب باروں سے پیدا برقی میدان کا وہ حصہ جو بار بردار سطح کے متوازی ہو کو ختم کرتا ہے۔ ان حقائق سے ہم اخذ کر سکتے ہیں کہ ایسی سطح کا برقی میدان سطح کی عمودی سمت میں ہو گا اور سطح سے یکساں فاصلے پر برقی میدان کی حتمی قیمت برابر ہوگی۔ صفحہ 75 پر ایسی لامحدود سطح شکل 2.5 میں دکھائی گئی ہے۔

اس شکل میں بار بردار سطح کے متوازی دونوں اطراف برابر فاصلے پر تصوراتی لامحدود سطح تصور کرتے ہیں۔ ان سطحوں پر آرنے سامنے رقبہ S لیتے ہوئے انہیں عمودی سطحوں سے بند کرتے ہوئے حجم گھیرتے ہیں۔ سامنے سطح پر Da_x جبکہ پیچھے سطح پر $-Da_x$ ہو گا جبکہ ان رقبوں کو Sa_x اور $-Sa_x$ لکھا جا سکتا ہے۔ چونکہ برقی میدان سطحوں کے عمودی

ہے لہذا دونوں سطحوں کو ملانے والے عمودی سطحوں میں سے کوئی برقی بہاؤ نہیں ہو گا۔ یوں حجم سے برقی بہاؤ صرف ان آمنے سامنے رقبوں سے یعنی

$$\begin{aligned}\psi_{\text{اٹھنے}} &= D a_x \cdot S a_x = SD \\ \psi_{\text{پہنچنے}} &= (-D a_x) \cdot (-S a_x) = SD\end{aligned}$$

جو گھیرے گئی بار کے برابر ہو گا۔ اگر بار بردار سطح پر ρ_S ہو تب حجم میں $\rho_S S$ بار پایا جائے گا۔ یوں

$$\psi_{\text{اٹھنے}} + \psi_{\text{پہنچنے}} = 2DS = \rho_S S$$

لکھتے ہوئے

$$D = \frac{\rho_S}{2}$$

حاصل ہوتا ہے جس کی سمتی شکل

$$(3.20) \quad D = \frac{\rho_S}{2} a_N$$

لکھی جاسکتی ہے جہاں a_N سے مراد سطح کی اکائی سمتیہ ہے۔ یوں

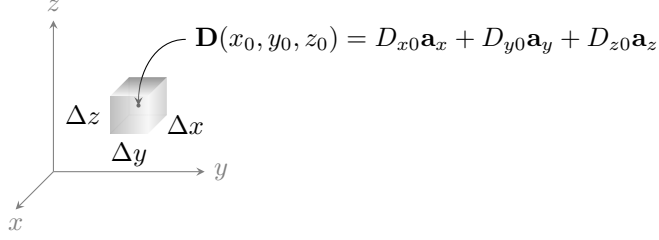
$$(3.21) \quad E = \frac{\rho_S}{2\epsilon_0} a_N$$

حاصل ہوتا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مساوات 2.42 کے حصول کا موجودہ طریقہ زیادہ آسان ہے۔

3.7 انتہائی چھوٹی حجم پر گاوس کے قانون کا اطلاق

شکل 3.4 میں کارٹیسائی محدد کے نقطہ $N(x_0, y_0, z_0)$ پر چھوٹا مستطیلی ڈبہ دکھایا گیا ہے جس کے اطراف $\Delta x, \Delta y$ اور Δz ہیں۔ یہ ڈبہ برقی میدان $D = D_x a_x + D_y a_y + D_z a_z$ میں ہے۔ اس چھوٹی ڈبہ پر گاوس کے قانون

$$(3.22) \quad \oint_S D \cdot dS = Q = \int_h \rho_h dh$$



شکل 3.4: انتہائی چھوٹی حجم پر گوس کے قانون کا اطلاق

کا اطلاق کرتے ہیں۔ ڈبھیہ کے چھ اطراف ہیں۔ یوں مندرجہ بالا تکملہ کے بائیں بازو کو

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\text{سائے}} + \int_{\text{پچھے}} + \int_{\text{بائیں}} + \int_{\text{دائیں}} + \int_{\text{اوپر}} + \int_{\text{نیچے}}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں

$$\begin{aligned} \int_{\text{سائے}} &\doteq \mathbf{D}_{\text{سائے}} \cdot \Delta \mathbf{S}_{\text{سائے}} \\ &\doteq (D_x \mathbf{a}_x + D_y \mathbf{a}_y + D_z \mathbf{a}_z)_{\text{سائے}} \cdot \Delta y \Delta z \mathbf{a}_x \\ &\doteq D_x \Delta y \Delta z \end{aligned}$$

کے برابر ہے۔

ہمیں D کی قیمت ڈبھیہ کے وسط میں معلوم ہے۔ ٹیلر تسلسل¹² کے مطابق کسی بھی تقابل جس کی قیمت نقطہ a پر معلوم ہو کو اس نقطے کے قریبی نقطوں پر

$$f(x+a) = f(a) + \frac{1}{1!}(x-a)f'(a) + \frac{1}{2!}(x-a)^2 f''(a) + \dots$$

سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ ڈبھیہ کے وسط میں نقطہ $N(x_0, y_0, z_0)$ پر

$$\mathbf{D}(x_0, y_0, z_0) = D_{x_0} \mathbf{a}_x + D_{y_0} \mathbf{a}_y + D_{z_0} \mathbf{a}_z$$

Taylor series¹²

کی قیمت سے وسط سے $\frac{\Delta x}{2}$ + فاصلے پر ڈبئی کے سامنے سطح پر D_x ٹیلر تسلسل سے یوں حاصل کیا جاسکتا ہے۔

$$\begin{aligned} D_{x, \text{سائے}} &= D_{x0} + \frac{1}{1!} \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{1}{2!} \left[\frac{\Delta x}{2} \right]^2 \frac{\partial^2 D_x}{\partial x^2} \dots \\ &\doteq D_{x0} + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial D_x}{\partial x} \end{aligned}$$

جہاں دوسرے قدم پر تسلسل کے صرف پہلے دو اجزاء لئے گئے ہیں۔ تفاعل کے ایک سے زیادہ متغیرات x ، y اور z ہیں لہذا تسلسل میں جزوی تفرق¹³ کا استعمال کیا گیا۔

یوں

$$\int_{\text{سائے}} \doteq \left(D_{x0} + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial D_x}{\partial x} \right) \Delta y \Delta z$$

حاصل ہوتا ہے۔

بند سطح کی سمت باہر جانب ہوتی ہے لہذا پچھلی سطح $-\Delta y \Delta z a_x$ ہے اور یوں ڈبئی کی پچھلی سطح کے لئے

$$\begin{aligned} \int_{\text{پچھلی}} &\doteq D_{\text{پچھلی}} \cdot \Delta S_{\text{پچھلی}} \\ &\doteq \left(D_x a_x + D_y a_y + D_z a_z \right)_{\text{پچھلی}} \cdot (-\Delta y \Delta z a_x) \\ &\doteq -D_{x, \text{پچھلی}} \Delta y \Delta z \end{aligned}$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں وسط سے $-\frac{\Delta x}{2}$ - فاصلے پر ڈبئی کی پچھلی سطح پر D_x ٹیلر تسلسل سے

$$D_{x, \text{پچھلی}} = D_{x0} - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial D_x}{\partial x}$$

حاصل ہوتا ہے۔ یوں

$$\int_{\text{پچھلی}} \doteq - \left(D_{x0} - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial D_x}{\partial x} \right) \Delta y \Delta z$$

اور

$$\int_{\text{سائے}} + \int_{\text{چمچے}} \doteq \left(D_{x0} + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial D_x}{\partial x} \right) \Delta y \Delta z - \left(D_{x0} - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial D_x}{\partial x} \right) \Delta y \Delta z$$

$$\doteq \frac{\partial D_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی عمل کو دہراتے ہوئے بائیں اور دائیں سطحوں کے لئے

$$\int_{\text{دائیں}} + \int_{\text{بائیں}} \doteq \frac{\partial D_y}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z$$

اور اوپر، نیچے سطحوں کے لئے

$$\int_{\text{اوپر}} + \int_{\text{نیچے}} \doteq \frac{\partial D_z}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس طرح

$$(3.23) \quad \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q \doteq \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z$$

حاصل ہوتا ہے۔

اس مساوات کے تحت کسی بھی نقطے پر انتہائی چھوٹی حجم Δh میں بار تقریباً

$$(3.24) \quad Q \doteq \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) \Delta h$$

کے برابر ہے۔ حجم کی جسامت جتنی کم کی جائے جو اب اتنا زیادہ درست ہو گا۔ اگلے حصے میں حجم کو کم کرتے کرتے نقطہ نما بنا دیا جائے گا۔ ایسی صورت میں مندرجہ بالا مساوات مکمل طور صحیح جواب مہیا کرے گا۔

مثال 3.2: اگر $\mathbf{D} = 2x\mathbf{a}_x + 3y\mathbf{a}_y + 5z\mathbf{a}_z$ C/m² ہو تب کارتیسی محدد کے مرکز پر 10^{-9} m³ کے انتہائی چھوٹی حجم میں بار حاصل کریں۔

حل:

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = 2 + 3 + 0$$

سے اس حجم میں $5 \times 10^{-9} = 5 \text{ nC}$ بار پایا جائے گا۔

3.8 پھیلاؤ

مساوات 3.23 میں حجم کو اتنا کم کرتے ہوئے کہ اس کو صفر تصور کرنا ممکن ہو

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta h} = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \frac{Q}{\Delta h}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ بار فی حجم کو حجمی کثافت کہتے ہیں۔ یوں مساوات کا دایاں بازو نقطے پر حجمی کثافت ρ_h دیتا ہے۔ اس طرح اس مساوات سے دو مساوات حاصل کئے جا سکتے ہیں یعنی

$$(3.25) \quad \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho_h$$

اور

$$(3.26) \quad \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta h}$$

مساوات 3.25 میکس ویل¹⁴ کی پہلی مساوات ہے جبکہ مساوات 3.26 سمتیہ D کا پھیلاؤ¹⁶ بیان کرتا ہے۔ اس مساوات کا دایاں بازو پھیلاؤ کی تعریف جبکہ اس کا باایاں بازو پھیلاؤ حاصل کرنے کا طریقہ دیتا ہے۔ یوں کارٹیزی محدود

$$(3.27) \quad \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \quad \text{کارٹیزی محدود میں پھیلاؤ کی مساوات}$$

Maxwell equation¹⁴¹⁵ جناب جیمس کلارک میکس ویل (1831-1879) کے مساوات میکس ویل مساوات کہلاتے ہیں۔divergence¹⁶

سے سمتیہ D کا پھیلاؤ حاصل کیا جاتا ہے۔

انجنیئرنگ کے شعبے میں ایسے کئی مسئلے پائے جاتے ہیں جن میں چھوٹی سی حجم کو گھیرنے والے بند سطح پر کسی سمتیہ K کا $\oint_S K \cdot dS$ درکار ہو۔ گزشتہ حصے میں سمتیہ D کے لئے ایسا ہی کیا گیا۔ غور کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ ایسا کرتے ہوئے D کی جگہ K لکھا جاسکتا ہے جس سے

$$(3.28) \quad \frac{\partial K_x}{\partial x} + \frac{\partial K_y}{\partial y} + \frac{\partial K_z}{\partial z} = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \frac{\oint_S K \cdot dS}{\Delta h}$$

حاصل ہوتا۔ سمتیہ K پانی کا بہاؤ، ایٹموں کی رفتار یا سیلیکان کی پتھری میں درجہ حرارت ہو سکتا ہے۔ ہم K کو سمتی بہاؤ کی کثافت تصور کریں گے۔ مندرجہ بالا مساوات K کا پھیلاؤ بیان کرتا ہے۔ پھیلاؤ کے عمل سے مراد مساوات کے بائیں بازو کا عمل ہے جبکہ مساوات کا دایاں بازو اس کی تعریف بیان کرتا ہے جس کے تحت

کسی بھی سمتی کثافتی بہاؤ کے پھیلاؤ سے مراد کسی چھوٹی حجم کو صفر کرتے ہوئے اس سے خارج کل بہاؤ فی اکائی حجم ہے۔

یہ ضروری ہے کہ آپ کو پھیلاؤ کی تعریف کی سمجھ ہو۔ یاد رہے کہ پھیلاؤ کا عمل سمتیہ پر کیا جاتا ہے جبکہ اس سے حاصل جواب مقداری ہوتا ہے۔ کسی نقطے پر چھوٹی حجم سے باہر جانب کل بہاؤ فی چھوٹی حجم کو پھیلاؤ کہتے ہیں۔ پھیلاؤ کی کوئی سمت نہیں ہوتی۔ پھیلاؤ کی تعریف جانتے ہوئے کئی مرتبہ بغیر قلم اٹھائے جواب حاصل کیا جاسکتا ہے۔ اسی نوعیت کے چند مسلوں پر اب غور کرتے ہیں۔

پانی سے بھری بالٹی میں پانی میں ڈوبے کسی بھی نقطے پر پانی کی رفتار کا پھیلاؤ صفر ہو گا چونکہ اس نقطے سے نہ پانی باہر نکل رہا ہے اور نہ ہی اس میں داخل ہو رہا ہے۔ اسی طرح دریا میں پانی میں ڈوبے نقطے پر بھی پانی کے رفتار کا پھیلاؤ صفر ہو گا چونکہ ایسے نقطے سے جتنا پانی نکلتا ہے، اتنا ہی پانی اس میں داخل ہوتا ہے۔ البتہ اگر بھری بالٹی کے تہہ میں سوراخ کر دیا جائے تو جب تک نقطہ پانی میں ڈوبا رہے اس وقت تک یہاں پھیلاؤ صفر رہے گا البتہ جیسے ہی نقطہ پانی سے نمودار ہونے لگے یہاں مثبت پھیلاؤ پایا جائے گا اور جب نقطہ پانی سے مکمل طور باہر آجائے تب ایک بار پھر یہاں پھیلاؤ صفر ہو جائے گا۔ جتنی دیر نقطہ پانی کی سطح سے باہر نمودار ہو رہا ہوتا ہے اتنی دیر اس نقطے سے پانی کی انخلا پائی جاتی ہے جس کی وجہ سے یہاں پھیلاؤ پایا جاتا ہے۔

ایک اور دلچسپ مثال سائیکل کے ٹائر میں ہوا کی ہے۔ اگر ٹائر پمپچر ہو جائے اور اس سے ہوا نکلی شروع ہو جائے تو ٹائر میں کسی بھی نقطے پر سمتی رفتار کا پھیلاؤ پایا جائے گا چونکہ کسی بھی نقطے پر دیکھا جائے تو یہاں سے ہوا پھیلتے ہوئے خارج ہو گا۔ یوں مثبت پھیلاؤ سے مراد نقطے سے انخلا جبکہ منفی پھیلاؤ سے مراد نقطے میں داخل ہونا ہے۔

ریاضیاتی عمل کو بیان کرنے کے لئے عموماً علامت استعمال کی جاتی ہے۔ یوں جمع کے لئے +، ضرب کے لئے \times اور تکملہ کے لئے \int استعمال کئے جاتے ہیں۔ آئیں ایک نئی علامت جسے نیپلا¹⁷ کہتے اور ∇ سے ظاہر کرتے ہیں سیکھیں۔ نیپلا یونانی حروف تہجی کا حرف ہے۔ تصور کریں کہ

$$(3.29) \quad \nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{a}_z$$

لکھا جاتا ہے جہاں مقداری متغیرہ f کے سامنے لکھنے سے مراد

$$(3.30) \quad \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{a}_z$$

جبکہ سمتیہ \mathbf{K} کے ساتھ نقطہ ضرب سے مراد

$$(3.31) \quad \begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{K} &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{a}_z \right) \cdot (K_x \mathbf{a}_x + K_y \mathbf{a}_y + K_z \mathbf{a}_z) \\ &= \frac{\partial K_x}{\partial x} + \frac{\partial K_y}{\partial y} + \frac{\partial K_z}{\partial z} \end{aligned}$$

لیا جاتا ہے۔ یہ علامت انجینئرنگ کے شعبے میں انتہائی مقبول ہے۔ اسے استعمال کرتے ہوئے پھیلاؤ کو $\nabla \cdot \mathbf{D}$ لکھا جا سکتا ہے جہاں

$$(3.32) \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

کے برابر ہے۔ پھیلاؤ کے عمل کو ہم اسی علامت سے ظاہر کریں گے۔ مساوات 3.25 یعنی میکس ویل کی پہلی مساوات اب یوں لکھی جاسکتی ہے۔

$$(3.33) \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_h \quad \text{میکس ویل کی پہلی مساوات}$$

میکس ویل کی پہلی مساوات درحقیقت گاوس کے قانون کی تفرق¹⁸ شکل ہے۔ اسی طرح گاوس کا قانون میکس ویل مساوات کی تکمل¹⁹ شکل ہے۔

مساوات 3.30 کے طرز پر مساوات صفحہ 150 پر دیا گیا ہے۔

nabla, del¹⁷
differential¹⁸
integral¹⁹

3.9 نکلے محدود میں پھیلاؤ کی مساوات

حصہ 3.7 میں کارٹیزی محدود استعمال کرتے ہوئے چھوٹی حجم پر گاوس کے قانون کے اطلاق سے پھیلاؤ کی مساوات حاصل کی گئی۔ اس حصے میں نکلے محدود استعمال کرتے ہوئے شکل میں دکھائے چھوٹی حجم کو استعمال کرتے ہوئے پھیلاؤ کی مساوات حاصل کی جائے گی۔ شکل کو دیکھتے ہوئے

$$\begin{aligned}\Delta_{S_{\text{سے}}} &= -\Delta\rho\Delta z\mathbf{a}_\phi \\ \Delta_{S_{\text{چھتے}}} &= +\Delta\rho\Delta z\mathbf{a}_\phi \\ \Delta_{S_{\text{بائیں}}} &= -\left(\rho - \frac{\Delta\rho}{2}\right)\Delta\phi\Delta z\mathbf{a}_\rho \\ \Delta_{S_{\text{دائیں}}} &= +\left(\rho + \frac{\Delta\rho}{2}\right)\Delta\phi\Delta z\mathbf{a}_\rho \\ \Delta_{S_{\text{اوپر}}} &= +\rho\Delta\phi\Delta\rho\mathbf{a}_z \\ \Delta_{S_{\text{نچے}}} &= -\rho\Delta\phi\Delta\rho\mathbf{a}_z\end{aligned}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ کارٹیزی محدود میں آمنے سامنے رقبے برابر تھے۔ نکلے محدود میں بائیں اور دائیں رقبے برابر نہیں ہیں۔ اس فرق کی بنا پر نکلے محدود میں پھیلاؤ کی مساوات قدر مختلف حاصل ہوگی۔ چھوٹی حجم کے وسط میں

$$(3.34) \quad \mathbf{D} = D_{\rho 0}\mathbf{a}_\rho + D_{\phi 0}\mathbf{a}_\phi + D_{z 0}\mathbf{a}_z$$

کے برابر ہے جس سے ٹیلر تسلسل کی مدد سے

$$\begin{aligned}\mathbf{D}_{\text{سے}} &= \left(D_{\phi 0} - \frac{\Delta\phi}{2}\frac{\partial D_\phi}{\partial\phi}\right)\mathbf{a}_\phi \\ \mathbf{D}_{\text{چھتے}} &= \left(D_{\phi 0} + \frac{\Delta\phi}{2}\frac{\partial D_\phi}{\partial\phi}\right)\mathbf{a}_\phi \\ \mathbf{D}_{\text{بائیں}} &= \left(D_{\rho 0} - \frac{\Delta\rho}{2}\frac{\partial D_\rho}{\partial\rho}\right)\mathbf{a}_\rho \\ \mathbf{D}_{\text{دائیں}} &= \left(D_{\rho 0} + \frac{\Delta\rho}{2}\frac{\partial D_\rho}{\partial\rho}\right)\mathbf{a}_\rho \\ \mathbf{D}_{\text{اوپر}} &= \left(D_{z 0} + \frac{\Delta z}{2}\frac{\partial D_z}{\partial z}\right)\mathbf{a}_z\end{aligned}$$

$$D_{\frac{z}{\rho}} = \left(D_{z0} - \frac{\Delta z}{2} \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) a_z$$

لکھا جا سکتا ہے۔ یوں

$$\int_{\text{سائے}} + \int_{\text{پچھے}} = \frac{\partial D_\phi}{\partial \phi} \Delta \rho \Delta \phi \Delta z$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح

$$\int_{\text{دائیں}} + \int_{\text{بائیں}} = \left(D_{\rho 0} + \rho \frac{\partial D_\rho}{\partial \rho} \right) \Delta \rho \Delta \phi \Delta z$$

حاصل ہوتا ہے جسے

$$\int_{\text{دائیں}} + \int_{\text{بائیں}} = \frac{\partial(\rho D_\rho)}{\partial \rho} \Delta \rho \Delta \phi \Delta z$$

بھی لکھا جا سکتا ہے۔ ایسا لکھتے وقت یاد رہے کہ نقطہ $N(\rho_0, \phi_0, z_0)$ پر

$$\left. \frac{\partial(\rho D_\rho)}{\partial \rho} \right|_N = D_\rho + \rho \frac{\Delta D_\rho}{\Delta \rho} \Big|_N = D_{\rho 0} + \rho \frac{\partial D_\rho}{\partial \rho}$$

کے برابر ہے۔ اسی طرح

$$\int_{\text{اوپر}} + \int_{\text{نیچے}} = \rho \frac{\partial D_z}{\partial z} \Delta \rho \Delta \phi \Delta z$$

حاصل ہوتا ہے۔ ان تمام کو استعمال کرتے ہوئے

$$\oint_S \mathbf{D}_S \cdot d\mathbf{S} = \left(\frac{\partial(\rho D_\rho)}{\partial \rho} + \frac{\partial D_\phi}{\partial \phi} + \rho \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) \Delta \rho \Delta \phi \Delta z$$

ملتا ہے۔ چھوٹی حجم $\Delta h = \rho \Delta \rho \Delta \phi \Delta z$ کے استعمال سے

$$(3.35) \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho D_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial D_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{D}_S \cdot d\mathbf{S}}{\Delta h}$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 3.28 کا دایاں بازو پھیلاؤ کی تعریف بیان کرتا ہے جس کے ساتھ موازنہ کرنے سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مساوات 3.35 نکلے محدود میں پھیلاؤ دیتا ہے۔

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ نکلے محدود میں پھیلاؤ کی مساوات سادہ شکل نہیں رکھتی۔ مساوات 3.29 میں دی گئی ∇ کو استعمال کرتے ہوئے نکلے محدود میں پھیلاؤ کی مساوات ہرگز حاصل نہیں کی جاسکتی ہے۔ اس کے باوجود نکلے محدود میں بھی پھیلاؤ کے عمل کو $\nabla \cdot \mathbf{D}$ سے ہی ظاہر کیا جاسکتا ہے جہاں اس سے مراد

$$(3.36) \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho D_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial D_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

لیا جاتا ہے۔ مندرجہ بالا مساوات نکلے محدود میں پھیلاؤ کی مساوات ہے جو کسی بھی سمتیہ کے لئے درست ہے۔ یوں سمتیہ \mathbf{K} کے لئے اسے یوں لکھا جاسکتا ہے۔

$$(3.37) \quad \nabla \cdot \mathbf{K} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho K_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial K_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial K_z}{\partial z}$$

3.10 پھیلاؤ کی عمومی مساوات

کارٹیزی محدود میں چھوٹی حجم کے آمنے سامنے اطراف کا رقبہ برابر ہوتا ہے جس سے پھیلاؤ کی مساوات آسانی سے حاصل ہوتی ہے۔ نکلے محدود میں چھوٹی حجم کے رداسی سمت کے آمنے سامنے رقبے مختلف ہوتے ہیں جن کا خصوصی خیال رکھتے ہوئے پھیلاؤ کی قدر مشکل مساوات گزشتہ حصے میں حاصل کی گئی۔ اس حصے میں پھیلاؤ کی مساوات حاصل کرنے کا ایسا طریقہ دیکھتے ہیں جسے استعمال کرتے ہوئے پھیلاؤ کی عمومی مساوات حاصل کی جاسکتی ہے جو تمام محدود کے لئے کارآمد ہے۔

کارٹیزی محدود کے متغیرات (x, y, z) جبکہ نکلے محدود کے (ρ, ϕ, z) اور کروی محدود کے متغیرات (r, θ, ϕ) ہیں۔ اس حصے میں عمومی محدود²⁰ استعمال کیا جائے گا جس کے متغیرات (u, v, w) اور عمودی اکائی سمتیات $(\mathbf{a}_u, \mathbf{a}_v, \mathbf{a}_w)$ ہیں۔ عمومی محدود کسی بھی محدود کے لئے استعمال کیا جاسکتا ہے۔ یوں اگر اسے کارٹیزی محدود کے لئے استعمال کیا جا رہا ہو تب (u, v, w) سے مراد (x, y, z) ہو گا۔

²⁰generalized coordinates

شکل میں عمومی محدود استعمال کرتے ہوئے چھوٹی حجم دکھائی گئی ہے۔ عمومی محدود کے تین اطراف

$$dL_1 = k_1 du$$

$$dL_2 = k_2 dv$$

$$dL_3 = k_3 dw$$

ہیں۔ کارٹیسی محدود میں $k_1 = k_2 = k_3 = 1$ کے برابر لیا جائے گا اور یوں $dL_1 = dx$ کے برابر ہو گا۔ نکلی محدود میں

$$(3.38) \quad \begin{aligned} k_1 &= 1 \\ k_2 &= \rho \\ k_3 &= 1 \end{aligned}$$

جبکہ کروی محدود میں

$$(3.39) \quad \begin{aligned} k_1 &= 1 \\ k_2 &= r \\ k_3 &= r \sin \theta \end{aligned}$$

کے برابر ہیں۔ اسی طرح تین سمتی رقبے

$$dL_2 dL_3 a_u$$

$$dL_1 dL_3 a_v$$

$$dL_1 dL_2 a_w$$

ہوں گے۔

گزشتہ حصوں میں چھوٹی حجم کے آمنے سامنے سطحوں پر بہاؤ حاصل کرتے وقت پہلے ان سطحوں پر D کی قیمت اور ان سطحوں کے رقبے حاصل کئے گئے جن کے نقطہ ضرب سے بہاؤ حاصل کیا گیا۔ یہاں چھوٹی حجم کے وسط میں تین اکائی سمتیت کی سمت میں بہاؤ سے ٹیلر تسلسل کے استعمال سے حجم کے سطحوں پر بہاؤ حاصل کیا جائے گا۔ حجم کے وسط میں تین اکائی سمتیت کے رخ میں سطحوں پر بہاؤ

$$dL_2 dL_3 D_{u0}$$

$$dL_1 dL_3 D_{v0}$$

$$dL_1 dL_2 D_{w0}$$

ہے۔ ٹیلر تسلسل سے سامنے اور پیچھے سطحوں پر ان مساوات سے

$$\begin{aligned} & dL_2 dL_3 D_{u0} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u} (dL_2 dL_3 D_u) du \quad \text{سامنے} \\ & - dL_2 dL_3 D_{u0} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u} (dL_2 dL_3 D_u) du \quad \text{پیچھے} \end{aligned}$$

یعنی

$$\begin{aligned} & k_2 k_3 dv dw D_{u0} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u} (k_2 k_3 D_u) du dv dw \quad \text{سامنے} \\ & - k_2 k_3 dv dw D_{u0} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u} (k_2 k_3 D_u) du dv dw \quad \text{پیچھے} \end{aligned}$$

لکھتے ہوئے دونوں سطحوں پر بہاؤ کا مجموعہ

$$\frac{\partial}{\partial u} (k_2 k_3 D_u) du dv dw$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح بائیں اور دائیں سطحوں پر کل

$$\frac{\partial}{\partial v} (k_1 k_3 D_v) du dv dw$$

اور اوپر، نیچے کا مجموعہ

$$\frac{\partial}{\partial w} (k_1 k_2 D_w) du dv dw$$

حاصل ہوتا ہے۔ چھوٹی حجم

$$\begin{aligned} dh &= dL_1 dL_2 dL_3 \\ &= k_1 k_2 k_3 du dv dw \end{aligned}$$

لکھتے ہوئے گاوس کے قانون سے

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \left[\frac{\partial}{\partial u} (k_2 k_3 D_u) + \frac{\partial}{\partial v} (k_1 k_3 D_v) + \frac{\partial}{\partial w} (k_1 k_2 D_w) \right] du dv dw$$

یعنی

$$\frac{1}{k_1 k_2 k_3} \left[\frac{\partial}{\partial u} (k_2 k_3 D_u) + \frac{\partial}{\partial v} (k_1 k_3 D_v) + \frac{\partial}{\partial w} (k_1 k_2 D_w) \right] = \lim_{dh \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}}{dh}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس مساوات کا دایاں بازو پھیلاؤ کی تعریف ہے۔ یوں پھیلاؤ کی عمومی مساوات

$$(3.40) \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{k_1 k_2 k_3} \left[\frac{\partial}{\partial u} (k_2 k_3 D_u) + \frac{\partial}{\partial v} (k_1 k_3 D_v) + \frac{\partial}{\partial w} (k_1 k_2 D_w) \right]$$

حاصل ہوتی ہے۔

مثال 3.3: مساوات 3.40 سے نکلی اور کرومی محدود میں پھیلاؤ کی مساوات حاصل کریں۔

حل: u, v, w کی جگہ ρ, ϕ, z اور مساوات 3.38 کے استعمال سے نکلی محدود میں پھیلاؤ

$$(3.41) \quad \begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D} &= \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho D_\rho) + \frac{\partial}{\partial \phi} (D_\phi) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho D_z) \right] \\ &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho D_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} (D_\phi) + \frac{\partial}{\partial z} (D_z) \end{aligned}$$

نکلی محدود میں پھیلاؤ کی مساوات

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح u, v, w کی جگہ r, θ, ϕ اور مساوات 3.39 کے استعمال سے کرومی محدود میں پھیلاؤ

$$(3.42) \quad \begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D} &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sin \theta D_r) + \frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin \theta D_\theta) + \frac{\partial}{\partial \phi} (r D_\phi) \right] \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 D_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta D_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} (D_\phi) \end{aligned}$$

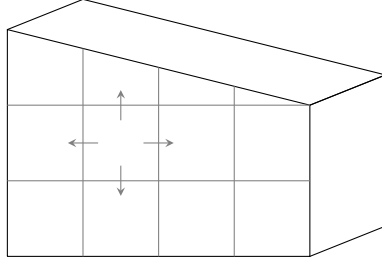
کرومی محدود میں پھیلاؤ کی مساوات

حاصل ہوتا ہے۔

3.11 مسئلہ پھیلاؤ

صفحہ 109 پر مساوات 3.22 میں

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_h$$



شکل 3.5: بند سطح پر سمتیہ کا عمودی حصے کا تکملہ بند حجم میں سمتیہ کے تکملہ کے برابر ہوتا ہے۔

لکھتے ہوئے

$$(3.43) \quad \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_h \nabla \cdot \mathbf{D} dh$$

لکھا جا سکتا ہے جو مسئلہ پھیلاؤ²¹ بیان کرتا ہے۔ اگرچہ ہم نے اس مسئلے کو برقی بہاؤ D کے لئے حاصل کیا حقیقت میں یہ ایک عمومی نتیجہ ہے جو کسی بھی تین درجی تکملہ کو دو درجی تکملہ اور دو درجی تکملہ کو تین درجی تکملہ میں تبدیل کرتا ہے۔ مسئلہ پھیلاؤ کو یوں بیان کیا جا سکتا ہے

کسی بھی بند سطح پر سمتیہ کے عمودی حصے کا تکملہ بند حجم میں اسی سمتیہ کے پھیلاؤ کے تکمل کے برابر ہو گا۔

مسئلہ پھیلاؤ کی سمجھ شکل 3.5 کی مدد سے با آسانی ممکن ہے۔ جیسے شکل میں دکھایا گیا ہے کہ کسی بھی چھوٹی حجم سے بہاؤ قریبی چھوٹی حجم کی منفی بہاؤ ثابت ہوتی ہے لہذا دونوں کا مجموعی بہاؤ حاصل کرتے ہوئے ان کے درمیانی دیوار پر بہاؤ رد کیا جائے گا۔ یہی سلسلہ تمام حجم پر لاگو کرتے ہوئے ظاہر ہے کہ پوری حجم سے بہاؤ کے حصول میں اندرونی تمام دیواروں پر بہاؤ کا کوئی کردار نہیں ہوتا اور صرف بیرونی سطح پر بہاؤ سے ہی جواب حاصل کیا جا سکتا ہے۔

مثال 3.4: نقطہ بار کے D سے پھیلاؤ کی مساوات سے مختلف مقامات پر کثافت بار ρ_{lh} حاصل کریں۔

²¹divergence theorem

حل: کروی محدود کے مرکز پر نقطہ بار کا

$$\mathbf{D} = \frac{Q}{4\pi r^2} \mathbf{a}_r$$

ہوتا ہے۔ کروی محدود میں پھیلاؤ کی مساوات کے تحت

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 D_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta D_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} (D_\phi)$$

کے برابر ہے۔ چونکہ D_θ اور D_ϕ صفر کے برابر ہیں لہذا مندرجہ بالا مساوات سے

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{Q}{4\pi r^2} \right) = \begin{cases} 0 & r > 0 \\ \infty & r = 0 \end{cases}$$

حاصل ہوتا ہے جس کے تحت مرکز کے علاوہ تمام خلاء میں کوئی بار نہیں پایا جاتا۔ مرکز پر لا محدود کثافت کا بار پایا جاتا ہے۔ یاد رہے کہ نقطہ بار سے مراد ایسا بار ہے جس کا حجم صفر ہو۔ ایسی صورت میں اس نقطے پر نقطہ بار کی کثافت لا محدود ہی ہوگی۔

سوالات

سوال 3.1: محدود کے مرکز پر 20 nC بار پایا جاتا ہے۔ اس کے علاوہ $z = 0$ سطح پر $5 \frac{nC}{m}$ کے لکیری بار $y = -1$ اور $y = -3$ پر پائے جاتے ہیں۔ نقطہ $(0, -2, 0)$ پر D حاصل کریں۔ $(0, 1, 0)$ پر $r = 1.5$ کے کرہ کی سطح پر کل برقی بہاؤ حاصل کریں۔

جوابت: 20 nC ، $-\frac{5}{4\pi} a_y \frac{C}{m^2}$

سوال 3.2: $\rho = 10 \text{ cm}$ کے نکلی سطح کے $z > 0$ حصے پر سطحی کثافت بار $\rho_S = 2ze^{-z^2} \frac{nC}{m^2}$ پائی جاتی ہے۔ سطح پر کل بار دریافت کریں۔ اس سطح سے $z = 1$ تا $z = 2$ زاویہ $\phi = 45^\circ$ تا $\phi = 75^\circ$ کتنی برقی بہاؤ خارج ہوتی ہے۔

جوابت: $0.2\pi \text{ nC}$ ، 18.3 pC

سوال 3.3: $\rho = 2$ ، $\rho = 4$ اور $\rho = 5$ پر بالترتیب سطحی کثافت بار $-3 \frac{nC}{m^2}$ ، $1.5 \frac{nC}{m^2}$ اور $0.25 \frac{nC}{m^2}$ پائی جاتی ہے۔ $z = 3$ تا $z = 6$ پر $\rho = 4.5$ نکلی سطح سے کل کتنی برقی بہاؤ ہوتی ہے۔ $z = 3$ تا $z = 6$ پر $\rho = 6$ نکلی سطح سے کل کتنی برقی بہاؤ ہوتی ہے۔ نقطہ $(6, 8, 2)$ پر D حاصل کریں۔

$D = 0.09a_x + 0.15a_y \frac{nC}{m^2}$ ، 28.27 nC ، 0 C

سوال 3.4: بند خطہ $0 \leq x \leq 2$ ، $0 \leq y \leq 2$ ، $0 \leq z \leq 2$ میں $D = xy^2a_x + xyza_y + z(x+y)a_z \frac{\mu C}{m^2}$ ہے۔ اس خطے سے کل برقی بہاؤ کتنی ہے۔

$28 \mu C$

سوال 3.5: محدود z پر لکیری کثافت بار $50 \frac{nC}{m}$ پایا جاتا ہے۔ محدود کے مرکز پر $r = 5 \text{ m}$ کی کرہ سے خارج کل برقی بہاؤ حاصل کریں۔ اگر کرہ کے مرکز کو نقطہ $(0, 2, 2)$ منتقل کیا جائے تب جواب کیا ہوگا۔

جوابت: 500 nC ، 458 nC

سوال 3.6: رداں $r = 1.1 \text{ m}$ کی کرہ کے اندر حجمی کثافت بار $\rho_h = 30e^{-r^3} \text{ nC/m}^3$ پائی جاتی ہے۔ کرہ کے اندر کل بار حاصل کریں۔ گاوس کے قانون سے کرہ کی سطح پر برقی بہاؤ کی کثافت حاصل کریں۔

جواب: 92.46 nC ، $6.08 \frac{\text{nC}}{\text{m}^2}$

سوال 3.7: نکلی محدود میں کثافت برقی بہاؤ $D = \frac{\rho a_\rho + z a_z}{4\pi(\rho^2 + z^2)^{3/2}}$ دیا گیا ہے۔ لامحدود لمبائی کی نکلی جس کا رداں $\rho = 5$ ہے سے کل کتنی برقی بہاؤ خارج ہوگی۔

جواب: 1 C

سوال 3.8: مرکز پر رداں 5 ، 9 اور 14 کے کرہ پر بالترتیب سطحی کثافت بار $20 \frac{\mu\text{C}}{\text{m}^2}$ ، $8 \frac{\mu\text{C}}{\text{m}^2}$ اور $\rho_s \frac{\text{C}}{\text{m}^2}$ پائے جاتے ہیں۔ نقطہ $(20, 0, 0)$ پر صفر D حاصل کرنے کے لئے ρ_s دریافت کریں۔ تمام خطوں میں D کی مساوات حاصل کریں۔

جواب: $0.7551 \frac{\mu\text{C}}{\text{m}^2}$ ، $r < 5$ پر $D_r = 0$ ہے، $5 < r < 9$ پر $D_r = \frac{500}{r^2} \frac{\mu\text{C}}{\text{m}^2}$ ہے، $9 < r < 14$ پر $D_r = -\frac{148}{r^2} \frac{\text{C}}{\text{m}^2}$ ہے جبکہ $r > 14$ پر $D_r = 0$ ہے۔

سوال 3.9: لامحدود سطح $z = 4$ پر $\rho_s = 2 \frac{\text{nC}}{\text{m}^2}$ سطحی کثافت پائی جاتی ہے۔ محدود کے مرکز پر $r = 5$ رداں کا کرہ رکھا جاتا ہے۔ کرہ کتنے بار کو گھیرے گا۔ کرے سے کتنی برقی بہاؤ خارج ہوگی۔

جواب: 56.549 nC ، 56.549 nC

سوال 3.10: محدود کے مرکز پر $r = 5$ رداں کا کرہ جبکہ $z = 4$ پر لامحدود سطح پائی جاتی ہے۔ لامحدود سطح کے بالائی جانب کرہ کے اندر حجمی کثافت بار $\rho_h = 25 \text{ nC/m}^3$ پائی جاتی ہے۔ کرہ سے کل خارج برقی بہاؤ حاصل کریں۔

جواب: $1.1812 \mu\text{C}$

سوال 3.11: خطہ $\rho < 3 \text{ mm}$ میں حجمی کثافت بار $\rho_h = \frac{\rho^2}{1000} \text{ C/m}^3$ جبکہ خطہ $3 \text{ mm} < \rho < 5 \text{ mm}$ میں $\rho_h = 2 \mu\text{C/m}^3$ پائی جاتی ہے۔ موزوں گاوسی سطحیں چنتے ہوئے رداں $\rho = 0$ ، $\rho = 2 \text{ mm}$ ، $\rho = 4 \text{ mm}$ اور $\rho = 6 \text{ mm}$ پر D_ρ حاصل کریں۔

جوابات: $0 \frac{C}{m^2}$ ، $2 \frac{pC}{m^2}$ ، $1.756 \frac{nC}{m^2}$ ، $2.67 \frac{nC}{m^2}$

سوال 3.12: خطہ $r < 3 \text{ mm}$ میں $\rho_h = 22 \mu\text{C}/\text{m}^3$ جبکہ $5 \text{ mm} < r < 7 \text{ mm}$ خطے میں $\rho_h = \frac{55}{r} \text{ nC}/\text{m}^3$ حجمی کثافت بار پایا جاتا ہے۔ موزوں گاوسی سطحیں چنتے ہوئے $r = 5 \text{ mm}$ اور $r = 10 \text{ mm}$ پر D_r دریافت کریں۔

جوابات: $22 \frac{nC}{m^2}$ ، $8.58 \frac{nC}{m^2}$

سوال 3.13: تفاعل $D = 2x^2\mathbf{a}_x + (x+z)\mathbf{a}_y + z\mathbf{a}_z$ مکعب $0 < x, y, z, < a$ میں پایا جاتا ہے۔ تفاعل کی پھیلاؤ $\nabla \cdot D$ حاصل کریں۔ مکعب کے تمام سطحوں پر تفاعل کے سطحی تکمیل کا مجموعہ حاصل کرتے ہوئے مکعب میں کل بار حاصل کریں۔ یہی جواب مسئلہ پھیلاؤ کی مدد سے حاصل کریں۔

جوابات: $\nabla \cdot D = 4x + 1$ ، $2a^4 + a^3$

سوال 3.14: مکعب $2 < x, y, z < 5$ میں $G = \frac{5x^2y}{z}\mathbf{a}_y$ ہے۔ مسئلہ پھیلاؤ کے دونوں اطراف کو مکعب کے لئے حل کریں۔

جواب: 536.03

سوال 3.15: مندرجہ ذیل تفاعل کے پھیلاؤ حاصل کرتے ہوئے پھیلاؤ کی قیمت نقطہ $N(3, 4, 6)$ پر حاصل کریں۔

$$D = 10(xy - \frac{y}{\sqrt{z}})\mathbf{a}_x + y^2(x+2)\mathbf{a}_y - (6z^2 + 3x^2y)\mathbf{a}_z$$

$$D = 8\rho \sin \phi \mathbf{a}_\rho + 4\rho \cos \phi \mathbf{a}_\phi + z^2 \mathbf{a}_z$$

$$D = 2r \sin \theta \cos \phi \mathbf{a}_r + r \cos \theta \cos \phi \mathbf{a}_\theta + r \cos \phi \mathbf{a}_\phi$$

جوابات: $12 \sin \phi$ ، $10y + 2y(x+2) - 12z$ ، $6 \sin \theta \sin \phi + \frac{\cos 2\theta \sin \phi}{\sin \theta} - \frac{\sin \phi}{\sin \theta}$ ، 80 ، 9.6 ، 2.0486

سوال 3.16: مندرجہ ذیل تفاعل کی پھیلاؤ نقطہ $N(3, 5 - 2)$ پر حاصل کریں۔

$$D = (x + yz)(3x\mathbf{a}_x - 5z\mathbf{a}_y + 2y^2z\mathbf{a}_z)$$

$$D = \frac{x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y + z\mathbf{a}_z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$D = 0.24\mathbf{a}_x - 0.55\mathbf{a}_y + 0.12\mathbf{a}_z$$

$$D = x^2yz^3(2\mathbf{a}_x - 3\mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z)$$

جوابات: 882- ، 0.324 ، 0 ، 276

سوال 3.17: مندرجہ ذیل تقابل کی پھیلاؤ نقطہ $N(3, 45^\circ, 30^\circ)$ پر حاصل کریں۔

$$D = (2r \sin \theta \cos \phi + \cos \theta) \mathbf{a}_r + (r \cos \theta \cos \phi - \sin \theta) \mathbf{a}_\theta - r \sin \phi \mathbf{a}_\phi$$

$$D = \sin^2 \theta \sin \phi \mathbf{a}_r + \sin 2\theta \sin \phi \mathbf{a}_\theta + \sin \theta \cos \phi \mathbf{a}_\phi$$

$$D = 0.2 \mathbf{a}_r - 0.15 \mathbf{a}_\theta + 0.23 \mathbf{a}_\phi$$

$$D = 0.2r^3 \phi \sin^2 \theta (\mathbf{a}_r + \mathbf{a}_\theta + \mathbf{a}_\phi)$$

جوابات: 4.899 ، 0.1667 ، 0 ، 5.043

سوال 3.18: کارٹیزی محدود کے مرکز $(0, 0, 0)$ پر نقطہ بار Q سے پیدا D کی عمومی مساوات کارٹیزی اور کرومی محدود میں حاصل کرتے ہوئے D کی پھیلاؤ نقطہ $(0, 0, 0)$ سے ہٹ کر حاصل کریں۔ محدود کے مرکز پر پھیلاؤ کی قیمت بھی دریافت کریں۔

جوابات: $0 \frac{C}{m^2}$ ، $0 \frac{C}{m^2}$ ، $\infty \frac{C}{m^2}$

سوال 3.19: z محدود پر لکیری کثافت بار ρ_L پائی جاتی ہے۔ ثابت کریں کہ اس محدود سے ہٹ کر تمام خلاء میں $\nabla \cdot D = 0$ کے برابر ہے۔ اگر لکیری بار کی جگہ حجمی کثافت بار ρ_h خطہ $0 < \rho < a$ میں پائی جائے تب پوری خلاء میں $\nabla \cdot D$ کی قیمت کیا ہوگی۔

جوابات: خطہ $0 < \rho < a$ میں $\nabla \cdot D = \rho_h$ ہو گا جبکہ بقایا خلاء میں $\nabla \cdot D = 0$ ہو گا۔

سوال 3.20: اگر $D = 2x^2 \mathbf{a}_x + x(z - 22) \mathbf{a}_y + x^2 y^3 \mathbf{a}_z$ ہو تب حجمی کثافت بار کی مساوات کیا ہو گی۔ کعب $0 < x, y, z < 2$ میں کل بار کتنا ہو گا۔

جوابات: $\rho_h = 4x$ ، $32C$

سوال 3.21: نکلی $\rho < 3m$ میں $D = 3\rho a_\rho \frac{C}{m^2}$ ہے۔ نقطہ $(1.5, 45^\circ, 3)$ پر حجمی کثافت بار اور کثافت برقی بہاؤ حاصل کریں۔ نکلی $\rho < 2.5$ ، $0 < z < 2$ سے کل کتنی برقی بہاؤ کا اخراج ہوتا ہے اور اس نکلی میں کل کتنا بار پایا جاتا ہے۔

جوابات: $6C/m^3$ ، $4.5 \frac{C}{m^2}$ ، $235.62C$ ، $235.62C$

سوال 3.22: کرہ $r < 4 \text{ m}$ میں کثافت برقی بہاؤ $3ra_r$ ہے۔ نقطہ $(3, 30^\circ, 70^\circ)$ پر صحیح کثافت بار اور کثافت برقی بہاؤ کیا ہوں گے؟ کرہ $r = 3 \text{ m}$ سے کل کتنی برقی بہاؤ کا اخراج ہو گا اور اس کرہ میں کل کتنا بار پایا جائے گا؟

جوابات: 9 C/m^3 ، 1017.9 C ، 1017.9 C ، $9 \frac{\text{C}}{\text{m}^2}$

سوال 3.23: خطہ $0 \leq x \leq 1$ ، $0 \leq y \leq 1$ ، $0 \leq z \leq 1$ میں $G = (4x - x^2)a_x - 3y^2z^2a_y - (2y^3z^2 - z)a_z$ پر مسئلہ پھیلاؤ کے دونوں اطراف کے تکمیل حاصل کرتے ہوئے ثابت کریں کہ دونوں جوابات برابر ہیں۔

جوابات: 2.5 ، 2.5

سوال 3.24: خطہ $2 \leq r \leq 5$ ، $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ ، $0 \leq \phi \leq 2\pi$ میں $D = \frac{0.1}{r} \cos \theta a_\theta$ پایا جاتا ہو۔ اس خطے میں کل بار مسئلہ پھیلاؤ کے دونوں اطراف کی مدد سے حاصل کریں۔

جوابات: 0.942 C ، 0.942 C

باب 4

توانائی اور برقی دباؤ

4.1 توانائی اور کام

قوت F کی سمت میں فاصلہ dL طے کرنے سے

$$dW = F dL$$

کام کیا جاتا ہے۔ اگر قوت اور طے کردہ فاصلہ ایک ہی سمت میں نہ ہوں تب قوت کا وہ حصہ جو طے کردہ فاصلے کی سمت میں ہو اور طے شدہ فاصلے کے حاصل ضرب کو کام¹ کہتے ہیں۔ شکل 4.1 کو دیکھتے ہوئے سمتیات کے استعمال سے

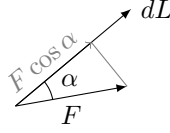
$$\begin{aligned} dW &= F \cos \alpha dL \\ &= \mathbf{F} \cdot d\mathbf{L} \end{aligned}$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں $F \cos \alpha dL$ کو نقطہ ضرب کی مدد سے $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{L}$ لکھا گیا ہے۔

زمین اور کمیت m کے درمیان قوت ثقل $F_G = -\frac{GMm}{r^2} \mathbf{a}_r$ پایا جاتا ہے² جس میں $g = \frac{GM}{r^2}$ لکھتے ہوئے $F_G = -mga_r$ لکھا جاسکتا ہے۔ کام کرتے ہوئے کمیت کو Δha_r اونچائی پر منتقل کرنے کی خاطر قوت ثقل کے خلاف

$$F_{\text{جواب}} = -F_G$$

¹work
کا² \mathbf{a}_r سمتیہ ہے۔



شکل 4.1: طے فاصلہ اور فاصلے کی سمت میں قوت کا حاصل ضرب کام کہلاتا ہے

لاگو کرتے ہوئے

$$\Delta W = F_{\parallel} \cdot \Delta h_{\text{ar}} = mg \Delta h$$

توانائی درکار ہوگی۔ کام کرنے کے لئے درکار توانائی کمیت میں منتقل ہو جاتی ہے جسے مخفی توانائی³ کہتے ہیں۔ اگر Δh کی قیمت r کی نسبت سے بہت کم نہ ہو تب g کو مستقل تصور کرنا ممکن نہ ہو گا اور مخفی توانائی تکملہ کے ذریعہ حاصل کی جائے گی۔

$$W = - \int_{\text{ابتدا}}^{\text{اختتام}} F_G \cdot dr = \int_{\text{ابتدا}}^{\text{اختتام}} \frac{GMm}{r^2} dr$$

ثقلی میدان میں کمیت کو ابتدائی نقطے سے اختتامی نقطے تک پہنچاتے ہوئے کوئی بھی راستہ اختیار کیا جاسکتا ہے۔ اختیار کردہ راستے کا مخفی توانائی پر کسی قسم کا کوئی اثر نہیں ہوتا۔ ایسے میدان جن میں دو نقطوں کے مابین مخفی توانائی کا دارومدار، ابتدائی نقطے سے اختتامی نقطے تک پہنچنے کے راستے، پر نہیں ہوتا قائم میدان⁵ کہلاتے ہیں۔

برقی میدان میں باروں کے حرکت کے مسئلے کو بھی اسی طرح حل کیا جاتا ہے۔ برقی میدان E میں بار q پر قوت $F_E = qE$ عمل کرتا ہے۔ بار کو فاصلہ dL ہلانے کی خاطر اس قوت کے خلاف بیرونی

$$F_{\parallel} = -F_E$$

قوت لاگو کرتے ہوئے

$$(4.1) \quad dW = -qE \cdot dL$$

کام⁶ کیا جاتا ہے۔ کسی بھی ابتدائی نقطے سے اختتامی نقطے تک یوں

$$(4.2) \quad W = -q \int_{\text{ابتدا}}^{\text{اختتام}} E \cdot dL$$

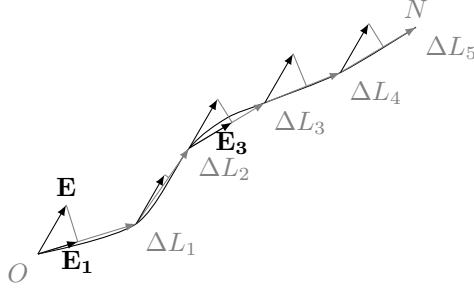
توانائی درکار ہوگی۔

potential energy³

مخفی توانائی کا نام ذخیرہ توانائی سے نکالے۔⁴

conservative field⁵

work⁶



شکل 4.2: تکملہ دراصل چھوٹے حصوں کا مجموعہ ہوتا ہے۔

4.2 لکیری تکملہ

مساوات 4.2 لکیری تکملہ ہے جس پر مزید غور کرتے ہیں۔ شکل 4.2 میں یکساں E اور وقت کے ساتھ نہ تبدیل ہونے والے میدان E میں نقطہ O سے نقطہ N تک بار کی منتقلی دکھائی گئی ہے۔ یکساں میدان سے مراد ایسا میدان ہے جس میں E کی قیمت جگہ جگہ تبدیل نہیں ہوتی بلکہ اس کی قیمت ہر جگہ یکساں ہوتی ہے۔ اسی طرح وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے میدان کو وقت کے ساتھ تغیر پذیر میدان کہا جائے گا۔ یکساں میدان وقت کے ساتھ غیر تغیر پذیر میدان ہے۔

شکل 4.2 میں پورے راستے کو چھوٹے چھوٹے ٹکڑے $\Delta L_1, \Delta L_2, \dots$ میں تقسیم کرتے ہوئے ایک ایک ٹکڑے پر حرکت کے لئے درکار توانائی مساوات 4.1 کی مدد سے حاصل کی جاسکتی ہے۔ یوں ΔL_1 کے ابتدائی نقطے سے اختتامی نقطے تک بار q منتقل کرنے کی خاطر $\Delta W = -qE \cdot \Delta L_1$ توانائی درکار ہوگی۔ یہی عمل راستے کے بقایا ٹکڑوں پر بھی لاگو کرتے ہوئے کل درکار توانائی

$$(4.3) \quad \begin{aligned} W &= -qE \cdot \Delta L_1 - qE \cdot \Delta L_2 - qE \cdot \Delta L_3 - qE \cdot \Delta L_4 - qE \cdot \Delta L_5 \\ &= -qE \cdot (\Delta L_1 + \Delta L_2 + \Delta L_3 + \Delta L_4 + \Delta L_5) \end{aligned}$$

لکھی جاسکتی ہے۔ تو سین میں بند $\Delta L_1 + \Delta L_2 + \Delta L_3 + \Delta L_4 + \Delta L_5$ درحقیقت نقطہ O سے N تک کا کل سمتی راستہ L_{ON} ہے۔ یوں مندرجہ بالا مساوات کو

$$(4.4) \quad W = -qE \cdot L_{ON}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اگر شکل 4.2 میں منتقلی کے راستے کے نہایت چھوٹے چھوٹے ٹکڑے dL بنائے جائیں تو مساوات 4.3 کو مکمل کی شکل میں یوں لکھا جاسکتا ہے۔

$$(4.5) \quad W = \int_0^N -qE \cdot dL$$

چونکہ q اور E کی قیمتیں مستقل ہیں لہذا انہیں مکمل کے باہر لکھا جاسکتا ہے۔ ایسا کرتے ہوئے

$$(4.6) \quad \begin{aligned} W &= -qE \cdot \int_0^N dL \\ &= -qE \cdot L_{ON} \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس جواب سے ہم دیکھتے ہیں کہ درکار توانائی کا دارومدار q ، E اور L_{ON} پر ہے جہاں L_{ON} نقطہ O سے نقطہ N تک سیدھی کھینچی لکیر ہے۔ درکار توانائی کا اس سے کسی قسم کا کوئی تعلق نہیں کہ ابتدائی نقطے سے اختتامی نقطے تک جاتے ہوئے کون سا راستہ اختیار کیا گیا۔ جیسا کہ پہلے ذکر کیا گیا، ایسے میدان کو قدامت پسند میدان کہتے ہیں۔ ہم جلد دیکھیں گے کہ غیر یکساں برقی میدان بھی قدامت پسند میدان ہوتا ہے البتہ تغیر پذیر برقی میدان غیر قدامت پسند ہو سکتا ہے۔

مثال 4.1: غیر یکساں، غیر تغیر پذیر میدان

$$\mathbf{E} = (y+z)\mathbf{a}_x + (x+z)\mathbf{a}_y + (x+y)\mathbf{a}_z \quad \frac{V}{m}$$

میں $N_1(1, 0, 2)$ سے $N_2(0, 1, 2)$ تک سیدھی لکیر پر $0.1C$ کا بار منتقل کرنے کے لئے درکار توانائی حاصل کریں۔

حل: شکل 4.3 میں بار منتقل کرنے کا سیدھا راستہ دکھایا گیا ہے۔ پہلے اس سیدھی لکیر کا مساوات حاصل کرتے ہیں۔ اس لکیر کا ڈھلوان⁸

$$\text{ڈھلوان} = m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1 - 0}{0 - 1} = -1$$



شکل 4.3: ہر منتقل کرنے کے دوراستے۔

ہے لہذا سیدھی لکیر کی مساوات $y = mx + c$ میں نقطہ N_1 پر کرتے ہوئے $0 = -1 \times 1 + c$ سے $c = 1$ حاصل ہوتا ہے۔ یوں لکیر کی مساوات

$$(4.7) \quad y = -x + 1$$

ہے۔ کار تیزی محدود میں کسی بھی راستے پر حرکت کرتے ہوئے مساوات 1.3 کے مطابق

$$(4.8) \quad dL = dx\mathbf{a}_x + dy\mathbf{a}_y + dz\mathbf{a}_z$$

لکھا جاتا ہے۔ یوں مساوات 4.2 سے حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned} W &= -q \int_{N_1}^{N_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} \\ &= -0.1 \int_{N_1}^{N_2} [(y+z)\mathbf{a}_x + (x+z)\mathbf{a}_y + (x+y)\mathbf{a}_z] \cdot (dx\mathbf{a}_x + dy\mathbf{a}_y + dz\mathbf{a}_z) \\ &= -0.1 \int_1^0 (y+z) dx - 0.1 \int_0^1 (x+z) dy - 0.1 \int_2^2 (x+y) dz \end{aligned}$$

آخری قدم پر تکمیل کو تین حصوں میں لکھا گیا ہے جہاں پہلے حصے میں تکمیل کو x کے ساتھ حاصل کیا گیا ہے جبکہ دوسرے حصے میں تکمیل کو y کے ساتھ اور آخری حصے میں اسے z کے ساتھ حاصل کیا گیا ہے۔ پہلے حصے میں $(y+z)$ کا تکمیل x کے ساتھ ہے لہذا $(y+z)$ کو x کی صورت میں لکھنا ہو گا۔ منتقلی کے راستے پر $z = 2$ ہے جبکہ مساوات 4.7 میں y کو x کی صورت میں لکھا گیا ہے۔ یوں پہلا تکمیل

$$\begin{aligned} -0.1 \int_1^0 [y+z] dx &= -0.1 \int_1^0 [(-x+1)+2] dx \\ &= -0.1 \left(\frac{-x^2}{2} + 3x \right) \Big|_1^0 \\ &= 0.25 \text{ J} \end{aligned}$$

یعنی جاول کے ایک چوتھائی کے برابر حاصل ہوتا ہے۔ دوسرا مکمل y کے ساتھ ہے لہذا تمام متغیرات y کی صورت میں لکھنے ہوں گے۔ سیدھی لکیر کے مساوات سے $x = -y + 1$ لکھا جاسکتا ہے جبکہ پورے راستے پر $z = 2$ کے برابر ہے لہذا

$$\begin{aligned} -0.1 \int_0^1 [x + z] dy &= -0.1 \int_0^1 [(-y + 1) + 2] dy \\ &= -0.1 \left(\frac{-y^2}{2} + 3y \right) \Big|_0^1 \\ &= -0.25 \text{ J} \end{aligned}$$

ہو گا۔ تیسرے مکمل میں ابتدائی اور اختتامی نقطے ایک ہی ہیں لہذا یہ مکمل صفر کے برابر ہے۔

$$-0.1 \int_2^2 (x + y) dz = 0 \text{ J}$$

اس طرح کل درکار توانائی تینوں جوابات کا مجموعہ یعنی 0 J ہو گی۔ مثبت جواب کا مطلب یہ ہے کہ بار کو منتقل کرنے کی خاطر بیرونی لاگو قوت توانائی فراہم کرے گی۔

مثال 4.2: گزشتہ مثال میں سیدھی لکیر پر بار منتقل کرنے کے لئے درکار توانائی حاصل کرنے کو کہا گیا۔ اس مثال میں شکل 4.3 میں بائیں جانب گول دائرے کے راستے $(1, 0, 2)$ سے $(0, 1, 2)$ تک $(x + z) \mathbf{a}_x + (x + y) \mathbf{a}_z$ $\frac{\text{V}}{\text{m}}$ کا راستہ $z = 2$ سطح پر پایا جاتا ہے۔

حل: اکائی رداس کے گول دائرے کی مساوات $x^2 + y^2 = 1^2$ ہے۔ یوں مساوات 4.2 سے حاصل تین مکملوں

$$W = -0.1 \int_1^0 (y + z) dx - 0.1 \int_0^1 (x + z) dy - 0.1 \int_2^2 (x + y) dz$$

میں پہلی مکمل میں $z = 2$ اور $y = \sqrt{1-x^2}$ پُر کرنا ہو گا۔ یاد رہے کہ ربع اول⁹ میں x اور y دونوں کی قیمتیں مثبت ہوتی ہیں۔ اس طرح کے مکمل حل کرتے وقت ربع کو مد نظر رکھنا ضروری ہے۔

$$\begin{aligned} -0.1 \int_1^0 (y+z) dx &= -0.1 \int_1^0 (\sqrt{1-x^2} + 2) dx \\ &= -0.1 \left(\frac{\sin^{-1} x}{2} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + 2x \right) \Big|_1^0 \\ &= -0.025\pi - 0.2 \end{aligned}$$

جاول، دوسرے مکمل میں $z = 2$ ہی رہے گا جبکہ $x = \mp\sqrt{1-y^2}$ میں سے $x = \sqrt{1-y^2}$ کا استعمال ہو گا۔ یوں

$$\begin{aligned} -0.1 \int_0^1 (x+z) dy &= -0.1 \int_0^1 (\sqrt{1-y^2} + 2) dy \\ &= -0.1 \left(\frac{\sin^{-1} y}{2} + \frac{y\sqrt{1-y^2}}{2} + 2y \right) \Big|_0^1 \\ &= 0.025\pi + 0.2 \end{aligned}$$

جاول حاصل ہوتا ہے۔ تیسرے مکمل میں ابتدائی اور اختتامی نقطے ایک ہی ہیں لہذا یہ مکمل صفر کے برابر ہے۔

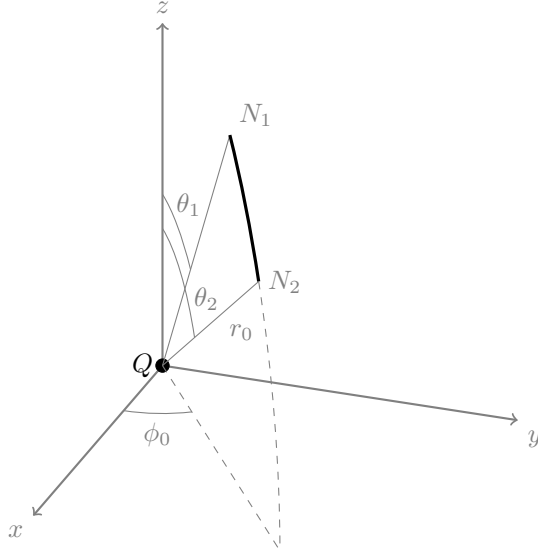
$$-0.1 \int_2^2 (x+y) dz = 0J$$

کل توانائی ان تین جوابات کا مجموعہ یعنی 0J ہو گا۔

مشق 4.1: گزشتہ دو مثالوں میں ابتدائی نقطہ $(1, 0, 2)$ اور اختتامی نقطہ $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 2)$ تصور کرتے ہوئے دوبارہ حل کریں۔

جوابات: $-0.1328J$ ، $-0.1328J$

first quadrant⁹



شکل 4.4: نقطہ بار کے گرد صرف θ تبدیل کرتے ہوئے حرکت کا راستہ

محدد کے مرکز پر موجود نقطہ بار Q کا میدان ہم حاصل کر چکے ہیں جسے یہاں دوبارہ پیش کرتے ہیں۔

$$(4.9) \quad E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} a_r$$

آئیں دیکھیں کہ رداس تبدیل کئے بغیر اس میدان میں بار q کو حرکت دیتے ہوئے کتنی توانائی درکار ہوگی۔ چونکہ میدان رداس کی سمت میں ہے اور رداس تبدیل کئے بغیر حرکت صرف اُس صورت ممکن ہے کہ ہم a_r یعنی E کے عمود میں سفر کریں۔ ایسی صورت میں بار پر میدان سے رونما ہونے والی قوت اور طے فاصلہ عمودی ہوں گے لہذا درکار توانائی صفر کے برابر ہوگی۔ آئیں مکمل کے ذریعہ یہی جواب حاصل کریں۔

تصور کریں کہ $\phi = \phi_0$ اور $r = r_0$ رکھتے ہوئے ہم θ کو θ_1 تا θ_2 ریڈیئن تبدیل کرتے ہوئے بار کو نقطہ N_1 سے N_2 تک حرکت دیتے ہیں۔ یہ صورت حال شکل 4.4 میں دکھائی گئی ہے۔ مساوات 1.3، مساوات 1.44 اور مساوات

1.64 جنہیں یہاں دوبارہ پیش کرتے ہیں

$$(4.10) \quad \begin{aligned} d\mathbf{L} &= dx\mathbf{a}_x + dy\mathbf{a}_y + dz\mathbf{a}_z \\ d\mathbf{L} &= d\rho\mathbf{a}_\rho + \rho d\phi\mathbf{a}_\phi + dz\mathbf{a}_z \\ d\mathbf{L} &= dr\mathbf{a}_r + r d\theta\mathbf{a}_\theta + r \sin\theta d\phi\mathbf{a}_\phi \end{aligned}$$

کار تیسری، تکلی اور کروی متغیرات تبدیل کرنے سے پیدا چھوٹا فاصلہ $d\mathbf{L}$ دیتے ہیں۔ یوں درکار توانائی

$$\begin{aligned} W &= -q \int_{\text{ابتدائی}}^{\text{انتہائی}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} \\ &= -q \int_{r_0, \theta_1, \phi_0}^{r_0, \theta_2, \phi_0} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r \cdot (dr\mathbf{a}_r + r d\theta\mathbf{a}_\theta + r \sin\theta d\phi\mathbf{a}_\phi) \\ &= -q \int_{r_0}^{r_0} \frac{Q dr}{4\pi\epsilon_0 r^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

صفر ہی حاصل ہوتی ہے۔ یہاں دوسرے قدم پر $\mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}_r = 1$ کے علاوہ $\mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}_\theta = 0$ اور $\mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}_\phi = 0$ کا استعمال کیا گیا۔

اس کے برعکس اگر نقطہ (r_1, θ_1, ϕ_1) تا نقطہ (r_2, θ_2, ϕ_2) بار کو حرکت دی جائے تب

$$\begin{aligned} W &= -q \int_{r_1, \theta_1, \phi_1}^{r_2, \theta_2, \phi_2} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r \cdot (dr\mathbf{a}_r + r d\theta\mathbf{a}_\theta + r \sin\theta d\phi\mathbf{a}_\phi) \\ &= -q \int_{r_1}^{r_2} \frac{Q dr}{4\pi\epsilon_0 r^2} \\ &= \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) \end{aligned}$$

ہو گا۔ یوں $r_1 > r_2$ کی صورت میں جواب مثبت ہو گا اور بار کو ابتدائی نقطے سے اختتامی نقطے منتقل کرنے کے خاطر بیرونی توانائی درکار ہو گی جبکہ $r_2 > r_1$ کی صورت میں جواب منفی حاصل ہوتا ہے لہذا بار کے حرکت سے ہمیں توانائی حاصل ہو گی۔

مشق 4.2: میدان $\mathbf{E} = 3x^2yz^2\mathbf{a}_x + x^3z^2\mathbf{a}_y + 2x^3yz\mathbf{a}_z \frac{V}{m}$ میں محدد کے مرکز $(0,0,0)$ سے نقطہ $(2,3,5)$ تک دو کولمب کا بار مندرجہ ذیل راستوں منتقل کرنے کے لئے درکار توانائی حاصل کریں۔

• دو نقطوں کے مابین سیدھی لکیر۔

• ایسا راستہ جس پر $y = \frac{3}{4}x^2$ اور $z = \frac{x}{2} + x^2$ ہوں۔

جوابات: سیدھی لکیر پر $y = \frac{3}{2}x$ اور $z = \frac{5}{2}x$ لکھا جائے گا۔ جوابات کے مطابق توانائی درکار نہیں بلکہ حاصل ہو گی۔ -1200J ، -1200J

4.3 برقی دباؤ

بار q کے منتقلی کے لئے درکار توانائی سے زیادہ اہم اکائی بار کے منتقلی کے لئے درکار توانائی ہے۔ اس توانائی کو برقی دباؤ¹⁰ کہتے ہیں۔ برقی دباؤ کے اکائی J/C کو وولٹ¹¹ کا نام دیا گیا ہے جسے V سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ چونکہ توانائی غیر سمتی یعنی مقداری ہے لہذا برقی دباؤ بھی مقداری ہے۔ مساوات 4.2 سے برقی دباؤ یوں حاصل ہوتا ہے

$$(4.11) \quad V_{AB} = \frac{W}{q} = - \int_B^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$$

جہاں ابتدائی نقطے کو B ، اختتامی نقطے کو A اور حاصل جواب کو V_{AB} لکھا گیا ہے۔ V_{AB} لکھتے ہوئے زیر نوشت میں پہلے اختتامی نقطے A اور بعد میں ابتدائی نقطے B لکھا گیا ہے۔ مساوات 4.6 میں فاصلہ L_{ON} لکھتے ہوئے زیر نوشت میں ابتدائی نقطے O پہلے اور اختتامی نقطے N بعد میں لکھا گیا۔ برقی دباؤ V_{AB} لکھتے ہوئے اس فرق کو مد نظر رکھنا ہو گا۔

برقی دباؤ دو نقطوں کے مابین ناپی جاتی ہے۔ کسی نقطے کی حتمی برقی دباؤ معنی نہیں رکھتی۔ برقی دباؤ بالکل اونچائی کے مترادف ہے۔ یوں کسی پہاڑی کے قریب کھڑے ہو کر اگر اس کی اونچائی تین سو میٹر ناپی جائے تو اسی پہاڑی کی اونچائی سطح سمندر سے ناپتے ہوئے سات سو میٹر حاصل ہو سکتی ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اونچائی ناپتے ہوئے نقطہ حوالہ¹²، جہاں کی نسبت سے اونچائی ناپی جائے، نہایت اہمیت کا حامل ہے۔ نقطہ حوالہ کی اونچائی صفر تصور کی جاتی ہے۔ دو یا دو سے زیادہ عمارتوں کی اونچائی کا موازنہ کرتے وقت ان تمام عمارتوں کی اونچائی پہلے کسی ایک نقطے سے

voltage¹⁰
volt¹¹
reference point¹²

ناپنی جاتی ہے۔ یہ نقطہ عموماً زمین کی سطح ہوتی ہے۔ اس کے برعکس مختلف شہروں یا پہاڑیوں کی اونچائی عموماً سطح سمندر سے ناپنی جاتی ہے۔ اگر تمام افراد کسی ایک نقطہ حوالہ پر اتفاق کریں تب اس نقطے کی نسبت سے کسی مقام کی اونچائی کو اس مقام کی حتمی اونچائی تصور کی جاتی ہے۔ بالکل اسی طرح مختلف نقطوں کے برقی دباؤ کا موازنہ کرتے ہوئے ان تمام نقطوں کی برقی دباؤ کسی ایک نقطے کی نسبت سے ناپے جائیں گے۔ ایسے نقطے کو برقی زمین¹³، کہا جاتا ہے جہاں برقی زمین کو صفر برقی دباؤ پر تصور کیا جاتا ہے۔ عموماً کرہ ارض کی سطح کو ہی برقی زمین تصور کیا جاتا ہے۔

موٹر گاڑی میں نسب بیٹری کے مثبت سرے کی برقی دباؤ، بیٹری کے منفی سرے کی نسبت سے ناپنا زیادہ مطلب آمیز ہو گا جبکہ گھریلو برقی دباؤ مہیا کردہ ٹھنڈی اور گرم تار کے مابین ناپنا مطلب رکھتا ہے۔ کبھی کبھار برقی دباؤ ناپنا نسبتاً مشکل ہوتا ہے، مثلاً کرہ ارض کی برقی دباؤ کو کس نقطہ حوالہ سے ناپا جائے گا۔ طبیعیات کے میدان میں عموماً ایسے ہی مسئلے درپیش آتے ہیں جہاں نقطہ حوالہ تعین کرنا دشوار ہوتا ہے۔ ایسی صورت میں نقطہ حوالہ کو لامحدود فاصلے پر تصور کیا جاتا ہے اور نقطہ A کے برقی دباؤ کو V_A لکھا جاتا ہے۔ یوں لامحدود فاصلے سے اکائی بار کو کرہ ارض تک لانے کے لئے درکار توانائی دریافت کرتے ہوئے کرہ ارض کی برقی دباؤ حاصل کی جائے گی۔

ہمہ محوری تار کے مسائل پر غور کرتے ہوئے عموماً اس کی بیرونی ٹکلی سطح کو نقطہ حوالہ لیا جاتا ہے۔ اسی طرح کروی تناسب رکھنے والے سطحوں کے مابین برقی دباؤ حاصل کرتے وقت ان میں کسی ایک سطح کو حوالہ سطح چنا جائے گا۔

اگر نقطہ A کی برقی دباؤ V_A جبکہ نقطہ B کی برقی دباؤ V_B ہو تب ان کے مابین برقی دباؤ

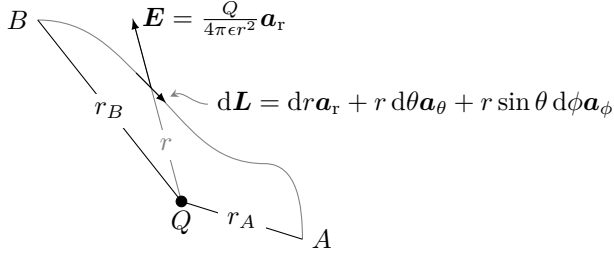
$$(4.12) \quad V_{AB} = V_A - V_B$$

ہو گا جہاں نقطہ B کو نقطہ حوالہ تصور کیا گیا ہے۔ یہ مساوات صرف اور صرف اسی صورت درست ہو گی جب V_A اور V_B از خود ایک ہی نقطہ حوالہ سے ناپے گئے ہوں۔

4.3.1 نقطہ بار کا برقی دباؤ

شکل 4.5 میں خالی خلاء میں کروی محدود کے مرکز پر پائے جانے والے بار Q کے میدان میں کسی بھی راستے پر q کولمب کے پیکٹیشی بار کو نقطہ B سے نقطہ A لانا دکھایا گیا ہے۔ Q سے r فاصلے پر اس راستے کے چھوٹی لمبائی dL پر

¹³electrical ground



شکل 4.5: نقطہ بار کی برقی دباؤ۔

اوسط برقی میدان $E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r$ ہو گا۔ یوں اتنا راستہ طے کرنے کے لئے

$$\begin{aligned} dW &= -q\mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} \\ &= -q \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r \right) \cdot (dr \mathbf{a}_r + r d\theta \mathbf{a}_\theta + r \sin \theta d\phi \mathbf{a}_\phi) \\ &= -\frac{qQ dr}{4\pi\epsilon_0 r^2} \end{aligned}$$

توانائی درکار ہو گی۔ اس طرح پورا راستہ طے کرنے کے لئے

$$W = - \int_{r_B}^{r_A} \frac{qQ dr}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r} \Big|_{r_B}^{r_A} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)$$

توانائی درکار ہو گی جس سے ان دو نقطوں کے مابین برقی دباؤ $V_{AB} = \frac{W}{q}$ یوں حاصل ہوتا ہے۔

$$(4.13) \quad V_{AB} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)$$

اس مساوات سے صاف ظاہر ہے کہ نقطہ بار Q کے میدان میں دو نقطوں کے مابین برقی دباؤ کا انحصار پار سے نقطوں کے فاصلوں r_A اور r_B پر ہے نہ کہ ایک نقطے سے دوسرے نقطے تک پہنچنے کے راستے پر۔ یوں نقطہ B کے حوالے سے نقطہ A پر برقی دباؤ مساوات 4.13 سے حاصل ہوتا ہے۔ اگر نقطہ B کو لامحدود فاصلے پر رکھا جائے یعنی اگر $r_B = \infty$ لیا جائے تب $\frac{1}{\infty} = 0$ ہونے کی وجہ سے یہ مساوات

$$(4.14) \quad V_A = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_A}$$

صورت اختیار کر لیتی ہے۔ اگر ہم حوالہ نقطہ کے لامحدود فاصلے پر ہونے پہ اتفاق کریں تو ایسی صورت میں $\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_A}$ کو نقطہ A کی حتمی برقی دباؤ تصور کیا جاسکتا ہے جسے V_A لکھا جاتا ہے۔ نقطہ حوالے کو لامحدود فاصلے پر رکھنے کا مطلب ہے کہ برقی زمین لامحدود فاصلے پر ہے۔ نقطہ حوالہ پر اتفاق کے بعد برقی دباؤ کی بات کرتے ہوئے بار بار برقی زمین کی نشاندہی کرنا ضروری نہیں لہذا برقی دباؤ لکھتے ہوئے زیر نوشت میں B لکھنے سے گریز کیا جاتا ہے اور اسے صرف V_A لکھا جاتا ہے۔ مساوات 4.14 نقطہ A کی حتمی برقی دباؤ دیتا ہے جو Q سے r_A فاصلے پر ہے۔ یہ نقطہ کوئی بھی نقطہ ہو سکتا ہے لہذا اسے r_A فاصلے پر نقطہ A کی بجائے r فاصلے پر نقطہ کہا جاسکتا ہے۔ ایسی صورت میں مساوات 4.14 کو یوں لکھا جاسکتا ہے

$$(4.15) \quad V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

جو کروی محدود کے مرکز پر پائے جانے والے نقطہ بار Q سے r فاصلے پر برقی دباؤ V دیتا ہے جہاں نقطہ حوالہ لامحدود فاصلے پر ہے۔

برقی دباؤ مقداری ہے لہذا مساوات 4.15 میں اکائی سمیت نہیں پائے جاتے۔

ایسی سطح جس پر حرکت کرنے سے برقی دباؤ تبدیل نہ ہو کو ہم قوہ سطح¹⁴ کہتے ہیں۔ مساوات 4.15 کے مطابق کروی محدود کے مرکز پر نقطہ بار کے گرد کسی بھی رداس کا کرہ ہم قوہ سطح ہوگی۔ ایسی سطح پر حرکت کرنے کی خاطر کسی توانائی کی ضرورت نہیں ہوتی۔

4.3.2 کیری کثافت بار سے پیدا برقی دباؤ

z محدود پر لامحدود لمبائی کے کیری کثافت بار کا میدان صفحہ 105 پر مساوات 3.15

$$\mathbf{E}_\rho = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0\rho} \mathbf{a}_\rho$$

دیتا ہے۔ اس میدان میں ρ_0 اور ρ_1 سطحوں کے مابین

$$(4.16) \quad V = - \int_{\rho_0}^{\rho_1} \frac{\rho_L d\rho}{2\pi\epsilon_0\rho} = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\rho_0}{\rho_1}$$

برقی دباؤ پایا جائے گا۔

¹⁴ equipotential surface

4.3.3 ہم محوری تار کا برقی دباؤ

ہم محوری تار میں اندرونی اور بیرونی تاروں کے درمیانی جگہ پر برقی میدان صفحہ 107 پر مساوات 3.16 میں دیا گیا ہے جسے $D = \epsilon E$ کے استعمال سے

$$(4.17) \quad E = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon\rho} a_\rho$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں اندرونی تار پر ρ_L لکیری کثافت بار پایا جاتا ہے۔ اندرونی تار کے اکائی لمبائی پر $+Q$ جبکہ بیرونی تار کے اکائی لمبائی پر $-Q$ بار پایا جاتا ہے۔ بیرونی تار کو برقی زمین تصور کرتے ہوئے اندرونی تار پر برقی دباؤ

$$V = - \int_{\rho_2}^{\rho_1} \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon\rho} a_\rho \cdot d\rho a_\rho = - \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon} \ln \frac{\rho_1}{\rho_2}$$

یعنی

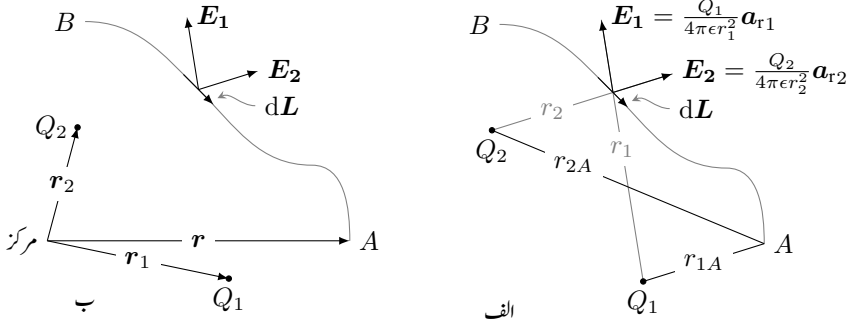
$$(4.18) \quad V = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

ہو گا جہاں اندرونی تار کا رداس ρ_1 اور بیرونی تار کا رداس ρ_2 ہے۔

4.4 متعدد نقطہ باروں کی برقی دباؤ

شکل 4.6- الف میں بار Q_1 اور Q_2 کے برقی میدان میں B سے A تک پیمائشی بار q کی حرکت دکھائی گئی ہے۔ Q_1 کو کروی محدود کے مرکز پر تصور کرتے ہوئے، B سے A تک راستے پر کسی بھی نقطہ N پر اس کا میدان $E_1 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} a_{r1}$ لکھا جا سکتا ہے جہاں r_1 مرکز سے N تک کا فاصلہ ہے۔ اسی طرح Q_2 کو ایک اور کروی محدود کے مرکز پر تصور کرتے ہوئے نقطے N پر اس کا میدان $E_2 = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2^2} a_{r2}$ لکھا جا سکتا ہے جہاں r_2 اس محدود کے مرکز سے N تک کا فاصلہ ہے۔ شکل- الف میں B سے A تک راستے پہ نقطہ N پر Q_1 اور Q_2 کے میدان E_1 اور E_2 دکھائے گئے ہیں۔ یوں N پر کل میدان $E = E_1 + E_2$ ہو گا۔ نقطہ N پر B سے A کے راستے چھوٹی سی لمبائی dL پر کل میدان یہی ہو گا۔ جس کروی محدود کے مرکز پر Q_1 پایا جاتا ہے اس نظام میں اس چھوٹے فاصلے کو

$$(4.19) \quad dL = dr_1 a_{r1} + r_1 d\theta_1 a_{\theta1} + r_1 \sin \theta_1 d\phi_1 a_{\phi1}$$



شکل 4.6: دو نقطہ بار کے میدان میں جتنی برقی دباؤ۔

لکھا جاسکتا ہے جبکہ جس کروی محدود کے مرکز پر Q_2 پایا جاتا ہے اس نظام میں اسی چھوٹے فاصلے کو

$$(4.20) \quad d\mathbf{L} = dr_2 \mathbf{a}_{r_2} + r_2 d\theta_2 \mathbf{a}_{\theta_2} + r_2 \sin \theta_2 d\phi_2 \mathbf{a}_{\phi_2}$$

لکھا جائے گا۔ $d\mathbf{L}$ فاصلہ طے کرنے کی خاطر

$$\begin{aligned} dW &= -q\mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} \\ &= -q(\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2) \cdot d\mathbf{L} \\ &= -\frac{qQ_1}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} \mathbf{a}_{r_1} \cdot d\mathbf{L} - \frac{qQ_2}{4\pi\epsilon_0 r_2^2} \mathbf{a}_{r_2} \cdot d\mathbf{L} \end{aligned}$$

توانائی درکار ہوگی۔ اس مساوات میں $\mathbf{a}_{r_1} \cdot d\mathbf{L}$ حاصل کرتے وقت $d\mathbf{L}$ کی قیمت مساوات 4.19 سے لیتے ہوئے $\mathbf{a}_{r_1} \cdot d\mathbf{L} = dr_1$ ملتا ہے۔ اسی طرح $\mathbf{a}_{r_2} \cdot d\mathbf{L}$ حاصل کرتے وقت $d\mathbf{L}$ کی قیمت مساوات 4.20 سے لیتے ہوئے $\mathbf{a}_{r_2} \cdot d\mathbf{L} = dr_2$ ملتا ہے۔ ان قیمتوں کے پُر کرنے سے

$$dW = -\frac{qQ_1 dr_1}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} - \frac{qQ_2 dr_2}{4\pi\epsilon_0 r_2^2}$$

حاصل ہوتا ہے۔ یوں B سے A تک کا پورا راستہ طے کرنے کی خاطر

$$\begin{aligned} W &= \int_B^A dW = -\frac{qQ_1}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_{1B}}^{r_{1A}} \frac{dr_1}{r_1^2} - \frac{qQ_2}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_{2B}}^{r_{2A}} \frac{dr_2}{r_2^2} \\ &= \frac{qQ_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_{1A}} - \frac{1}{r_{1B}} \right) + \frac{qQ_2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_{2A}} - \frac{1}{r_{2B}} \right) \end{aligned}$$

توانائی درکار ہوگی۔ نقطہ B کو لامحدود فاصلے پر لیتے ہوئے یوں نقطہ A پر حتمی برقی دباؤ

$$(4.21) \quad V_A = \frac{W}{q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_1}{r_{1A}} + \frac{Q_2}{r_{2A}} \right)$$

حاصل ہوتی ہے۔

مساوات 4.21 میں دائیں ہاتھ پہلا جزو Q_1 کے میدان میں نقطہ A کی حتمی برقی دباؤ جبکہ دوسرا جزو Q_2 کے میدان میں نقطہ A کی حتمی برقی دباؤ دیتا ہے۔ مساوات 4.21 کے مطابق Q_1 اور Q_2 دونوں کے موجودگی میں نقطہ A کا برقی دباؤ حاصل کرنے کی خاطر ان دو باروں کو باری باری علیحدہ لیتے ہوئے A پر برقی دباؤ حاصل کیا جاتا ہے اور پھر دونوں برقی دباؤ کا مجموعہ لیا جاتا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ یہی طریقہ کار دو سے زیادہ نقطہ باروں کے لئے بھی بروئے کار لایا جاسکتا ہے۔ یوں کسی بھی نقطے کی برقی دباؤ حاصل کرتے ہوئے مختلف نقطہ باروں کے برقی دباؤ علیحدہ علیحدہ حاصل کرتے ہوئے انہیں جمع کرتے حاصل کیا جاسکتا ہے۔

اگر کسی کروی محدّد کے مرکز سے Q_1 تک کا سمتیہ r_1 جبکہ مرکز سے Q_2 تک کا سمتیہ r_2 اور مرکز سے نقطہ A تک سمتیہ r ہوں تب نقطہ A کے لئے مساوات 4.21 کو ہم یوں لکھ سکتے ہیں

$$(4.22) \quad V_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_1}{|r - r_1|} + \frac{Q_2}{|r - r_2|} \right)$$

جہاں Q_1 سے A تک فاصلہ $|r - r_1|$ اور Q_2 سے A تک فاصلہ $|r - r_2|$ ہے۔ یہ صورت حال شکل 4.6-ب میں دکھائی گئی ہے۔ متعدد نقطہ باروں کے لئے مساوات 4.22

$$(4.23) \quad V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_1}{|r - r_1|} + \frac{Q_2}{|r - r_2|} + \dots + \frac{Q_n}{|r - r_n|} \right)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^n \frac{Q_j}{|r - r_j|}$$

لکھی جائے گی جہاں نقطہ A کا مقام زیر نوشت میں A لکھنے کی بجائے $V(r)$ میں r سے واضح کیا گیا ہے۔

متغیر حجمی کثافت بار ρ_h کے چھوٹے حجم Δh میں پائے جانے والے بار $\Delta Q = \rho_h \Delta h$ کو نقطہ بار تصور کیا جاسکتا ہے۔ پورے حجم کے n چھوٹے ٹکڑے کرتے ہوئے مساوات 4.23 کو یوں لکھا جاسکتا ہے

$$(4.24) \quad V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\rho_h(r_1)\Delta h_1}{|r - r_1|} + \frac{\rho_h(r_2)\Delta h_2}{|r - r_2|} + \dots + \frac{\rho_h(r_n)\Delta h_n}{|r - r_n|} \right)$$

جہاں r کو کثافت کا آزاد متغیرہ لیتے ہوئے مقام r_j پر کثافت کو $\rho_h(r_j)$ اور چھوٹی حجم کو Δh_j لکھا گیا ہے۔ چھوٹی حجم Δh کو کم سے کم کرتے ہوئے ایسے نقطوں کی تعداد زیادہ سے زیادہ بناتے ہوئے اس مجموعہ سے مندرجہ ذیل حجمی تکمیل حاصل ہوتا ہے۔

$$(4.25) \quad V(r) = \int_{\text{حجم}} \frac{\rho_h(r') dh'}{4\pi\epsilon_0 |r - r'|}$$

یہاں رک کر مندرجہ بالا مساوات کو دوبارہ دیکھتے ہیں۔ ρ_h حجمی کثافتِ بار ہے۔ مقام r' پر چھوٹی حجم dh' میں تھوڑا سا بار $\rho_h(r') dh'$ پایا جاتا ہے جسے نقطہ بار تصور کیا جاتا ہے۔ مساوات 4.25 نقطہ r پر برقی دباؤ دیتا ہے جہاں برقی زمین کو لامحدود فاصلے پر تصور کیا گیا ہے۔ یوں اکائی بار کو لامحدود فاصلے سے نقطہ r تک کسی بھی راستے لانے کے لئے اس مساوات سے حاصل $V(r)$ برابر توانائی درکار ہوگی۔

اگر حجمی کثافتِ بار کی جگہ سطحی کثافتِ بار ρ_S یا لکیری کثافتِ بار ρ_L پایا جاتا تب مندرجہ بالا مساوات کو

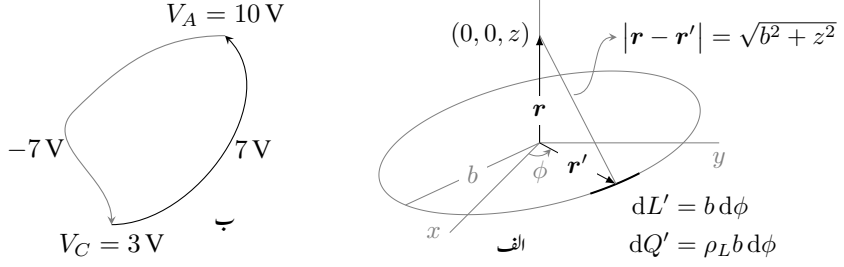
$$(4.26) \quad V(r) = \int_{\text{سطح}} \frac{\rho_S(r') dS'}{4\pi\epsilon_0 |r - r'|}$$

$$(4.27) \quad V(r) = \int_{\text{لکیر}} \frac{\rho_L(r') dL'}{4\pi\epsilon_0 |r - r'|}$$

لکھتے۔ ان مساوات میں dh' ، dS' اور dL' غیر سمتی یعنی مقداری ہیں۔ تینوں اقسام کے کثافتِ بار پائے جانے کی صورت میں باری باری ہر ایک سے پیدا برقی دباؤ حاصل کرتے ہوئے ان کا مجموعہ لیا جائے گا۔

مثال 4.3: $z = 0$ سطح پر z محدد کے گرد b رداس کے گول دائرے پر ρ_L کثافتِ بار پایا جاتا ہے۔ $N(0, 0, z)$ پر برقی دباؤ حاصل کریں۔

حل: شکل 4.7-الف میں صورت حال دکھایا گیا ہے۔ $z = 0$ سطح پر کروی نظام کا رداس r اور نکلی محدد کا رداس ρ برابر ہوتے ہیں۔ گول دائرے پہ r' کے مقام پر چھوٹی لکیر $dL' = b d\phi$ لکھی جاسکتی ہے۔ برقی دباؤ r پر درکار



شکل 4.7: (الف) گول دائرے پر کثیرہ کثافت بار سے Z محور پر پیدا برقی دباؤ۔ (ب) بند دائرے کی برقی دباؤ صفر ہے۔

شکل کو دیکھتے ہوئے مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے $|r - r'| = \sqrt{b^2 + z^2}$ لکھا جا سکتا ہے۔ یوں مساوات 4.27 استعمال کرتے ہوئے نقطہ $(0, 0, z)$ پر

$$V = \int_0^{2\pi} \frac{\rho_L b d\phi}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{b^2 + z^2}} = \frac{\rho_L b}{2\epsilon_0 \sqrt{b^2 + z^2}}$$

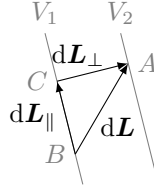
برقی دباؤ پایا جائے گا۔ گول دائرے کے عین وسط یعنی $(0, 0, 0)$ پر یوں $\frac{\rho_L}{2\epsilon_0}$ وولٹ کا برقی دباؤ پایا جائے گا۔

مساوات 4.2 میں B کو لامحدود فاصلے پر لیتے ہوئے کسی بھی دو نقطوں A اور C کے حتمی برقی دباؤ یوں لکھے جا سکتے ہیں۔

$$V_A = - \int_{\infty}^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$$

$$V_C = - \int_{\infty}^C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$$

شکل 4.7-ب میں یہ نقطے دکھائے گئے ہیں۔ اب اگر V_A دس وولٹ جبکہ V_C تین وولٹ کے برابر ہو تب C کے حوالے سے A پر سات وولٹ ہوں گے یعنی $V_{AC} = 7V$ ہو گا۔ اسی طرح A کے حوالے سے C پر منفی سات وولٹ ہوں گے یعنی $V_{CA} = -7V$ ہو گا۔ یوں اگر کسی بھی راستے C سے A جایا جائے تو برقی دباؤ میں سات وولٹ کا اضافہ ہو گا جبکہ کسی بھی راستے واپس C لوٹنے سے برقی دباؤ میں سات وولٹ ہی کمی رونما ہوگی۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کسی بھی نقطے سے شروع ہو کر بند دائرے پر چلتے ہوئے واپس اسی نقطے تک پہنچنے سے برقی دباؤ میں



شکل 4.8: برقی دباؤ کی ڈھلوان برقی میدان ہے۔

کل کوئی تبدیلی پیدا نہیں ہوگی۔ اس حقیقت کو یوں لکھا جاتا ہے

$$V_{AC} + V_{CA} = - \int_C^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} - \int_A^C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = 0$$

جہاں پہلے C سے A اور پھر A سے واپس C پہنچا گیا۔ بند دائرے کے مکمل کو دو ٹکڑوں میں لکھنے کی بجائے اسے بند مکمل کی شکل میں لکھتے ہوئے اسی مساوات کو یوں بہتر لکھا جاسکتا ہے

$$(4.28) \quad \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = 0$$

جہاں مکمل کے نشان پر گول دائرہ بند مکمل کو ظاہر کرتا ہے۔

مساوات 4.28 کہتا ہے کہ کسی بھی طرح پیدا کئے گئے برقی میدان میں بند دائرے پر پورا چکر لگانے کے لئے صفر توانائی درکار ہوتی ہے۔ حقیقت میں یہ مساوات صرف وقت کے ساتھ نہ تبدیل ہونے والے برقی میدان یعنی ساکن برقی میدان¹⁵ کے لئے درست ہے۔ اس کتاب میں وقت کے ساتھ بدلتے میدان پر بعد میں غور کیا جائے گا۔ ایسے میدان جس میں بند دائرے پر چلنے کی خاطر کوئی توانائی درکار نہ ہو کو بقائی میدان¹⁶ کہتے ہیں۔ ساکن تجاذبی میدان بھی بقائی میدان¹⁷ ہے۔ یوں تجاذبی میدان میں پہاڑی کی چوٹی تک پہنچنے سے مخفی توانائی میں جتنا اضافہ پیدا ہو، چوٹی سے واپس اترنے پر مخفی توانائی میں اتنی ہی کمی رونما ہوگی اور یوں آپ کی ابتدائی اور اختتامی مخفی توانائی عین برابر ہوں گے۔

¹⁵static electric field

¹⁶conservative field

¹⁷یہ جملہ لکھنے کے ٹھیک ایک دن بعد زگس مولولہ اور ان کے ساتھیوں نے تجاذبی موجیں دریافت کی۔ اس دریافت سے پہلے کسی بھی تجاذبی میدان کو بقائی میدان تصور کیا جاتا تھا۔ آج سے ہم ساکن تجاذبی میدان کو بھی بقائی میدان کہیں گے۔

4.5 برقی دباؤ کی ڈھلوان

شکل 4.8 میں دو انتہائی قریب ہم قوہ سطحیں دکھائی گئی ہیں جن پر V_1 اور V_2 برقی دباؤ پایا جاتا ہے۔ ہم قوہ سطح V_1 پر کسی نقطہ B سے ہم قوہ سطح V_2 پر کسی نقطہ A تک کا سمتی فاصلہ dL لیتے ہوئے B سے A تک حرکت کرنے سے برقی دباؤ میں $-E \cdot dL$ تبدیلی رونما ہوگی جہاں برقی میدان کو E لکھا گیا ہے۔

$$(4.29) \quad dV = V_2 - V_1 = -E \cdot dL$$

چھوٹی لمبائی dL پر برقی میدان کو غیر تغیر پذیر تصور کیا جاسکتا ہے۔ چونکہ دو نقطوں کے مابین برقی دباؤ کا ابتدائی نقطے سے اختتامی نقطے پہنچنے کے راستے پر منحصر نہیں ہوتا لہذا ہم B سے C اور پھر A بھی جاسکتے تھے۔ B سے C تک فاصلے کو dL_{\parallel} جبکہ C سے A تک فاصلے کو dL_{\perp} لکھتے ہوئے

$$(4.30) \quad dV = -E \cdot (dL_{\parallel} + dL_{\perp})$$

لکھا جاسکتا ہے۔ E کو ہم قوہ توانائی کے متوازی اور اس کے عمودی اجزاء کی صورت میں یوں لکھا جاسکتا ہے

$$(4.31) \quad E = E_{\parallel} + E_{\perp}$$

جس سے

$$(4.32) \quad dV = -(E_{\parallel} + E_{\perp}) \cdot (dL_{\parallel} + dL_{\perp}) = -E_{\parallel} dL_{\parallel} - E_{\perp} dL_{\perp}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں E_{\parallel} اور dL_{\parallel} کے مابین صفر درجے کا زاویہ ہونے کی بنا پر $E_{\parallel} \cdot dL_{\parallel} = E_{\parallel} dL_{\parallel}$ لکھا گیا ہے جبکہ E_{\parallel} اور dL_{\perp} کے مابین نوے درجے کا زاویہ ہونے کی بنا پر $E_{\parallel} \cdot dL_{\perp} = 0$ ہے۔ اس مساوات کا پہلا جزو $-E_{\parallel} dL_{\parallel}$ نقطہ B اور C کے درمیان برقی دباؤ دیتا ہے۔ ہم قوہ سطح پر ہر جگہ برابر برقی دباؤ پایا جاتا ہے لہذا B اور C کے درمیان کسی قسم کا برقی دباؤ نہیں پایا جاتا یعنی $-E_{\parallel} dL_{\parallel}$ صفر کے برابر ہے۔ اب چونکہ dL_{\parallel} صفر کے برابر نہیں ہے لہذا کسی بھی ہم قوہ سطح پر

$$(4.33) \quad E_{\parallel} = 0$$

ہوگا اور سطح پر صرف اور صرف عمودی برقی میدان پایا جائے گا یعنی

$$(4.34) \quad E = E_{\perp}$$

یوں

$$(4.35) \quad dV = -E_{\perp} dL_{\perp}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ یہ ذہن میں رکھتے ہوئے کہ ہم توہ سطح پر صرف عمودی میدان پایا جاتا ہے، مندرجہ بالا مساوات میں E_{\perp} کی جگہ E لکھتے ہیں۔

$$(4.36) \quad dV = -E dL_{\perp}$$

اس مساوات سے

$$(4.37) \quad E = -\frac{dV}{dL_{\perp}}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں سے ظاہر ہے کہ E درحقیقت V کے ڈھلوان کے برابر مگر الٹ سمت میں ہے۔ یوں

$$(4.38) \quad \mathbf{E} = -\frac{dV}{dL_{\perp}}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں \mathbf{a}_N ہم توہ سطح کا عمودی اکائی سمتیہ ہے۔

کسی نقطہ کو برقی زمین تصور کرتے ہوئے کسی دوسرے نقطے کی برقی دباؤ کو حتمی برقی دباؤ تصور کیا جاتا ہے جو نقطے کے مقام پر منحصر ہوتا ہے لہذا اسے $V(x, y, z)$ لکھا جا سکتا ہے جہاں برقی دباؤ کے آزاد متغیرات x ، y اور z ہیں۔ کسی بھی قابو متغیرہ کی طرح $V(x, y, z)$ کا تفرق

$$(4.39) \quad dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz$$

لکھا جا سکتا ہے۔ کارٹیزی محدود میں کسی بھی برقی دباؤ کو

$$(4.40) \quad \mathbf{E} = E_x \mathbf{a}_x + E_y \mathbf{a}_y + E_z \mathbf{a}_z$$

اور چھوٹی لمبائی کو

$$(4.41) \quad d\mathbf{L} = dx \mathbf{a}_x + dy \mathbf{a}_y + dz \mathbf{a}_z$$

لکھا جا سکتا ہے۔ یہاں آپ صفحہ 8 پر دئے مساوات 1.3 پر دوبارہ نظر ڈال سکتے ہیں۔ مندرجہ بالا تین مساوات کو مساوات 4.29 میں پُر کرتے ہوئے

$$(4.42) \quad \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz = -E_x dx - E_y dy - E_z dz$$

حاصل ہوتا ہے۔ y اور z تبدیل کئے بغیر (یعنی $dy = 0$ اور $dz = 0$ لیتے ہوئے) x تبدیل کرنے سے اس مساوات کے بائیں اور دائیں ہاتھ کا پہلا جزو یعنی $\frac{\partial V}{\partial x} dx$ اور $-E_x dx$ تبدیل ہوتے ہیں لہذا یہ لازم ہے کہ یہ دونوں اجزاء

برابر ہوں یعنی $\frac{\partial V}{\partial x} dx = -E_x dx$ جس سے $E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$ حاصل ہوتا ہے۔ اگر $\frac{\partial V}{\partial x} dx$ اور $-E_x dx$ برابر نہ ہوں تب مساوات کے ایک طرف تبدیلی دوسرے طرف کے تبدیلی کے برابر نہیں ہوگی اور یوں مساوات کے دونوں اطراف برابر نہیں رہیں گے۔ اسی طرح صرف y اور صرف z تبدیل کئے جا سکتا ہیں۔ یوں

$$(4.43) \quad \begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial V}{\partial x} \\ E_y &= -\frac{\partial V}{\partial y} \\ E_z &= -\frac{\partial V}{\partial z} \end{aligned}$$

لکھا جا سکتا ہے جسے مساوات 4.40 میں پُر کرتے

$$(4.44) \quad \mathbf{E} = - \left(\frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{a}_z \right)$$

لکھا جا سکتا ہے۔

اگر ہم

$$(4.45) \quad \nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{a}_z \quad \text{کار تیبسی محدود میں ڈھلوان کی مساوات}$$

لکھیں جہاں کسی بھی مقدار f کے لئے ∇f سے مراد $\frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{a}_z$ ہو تب مندرجہ بالا مساوات کو

$$(4.46) \quad \mathbf{E} = -\nabla V$$

لکھا جا سکتا ہے۔ ∇V کو برقی دباؤ کی ڈھلوان¹⁸ پڑھا جاتا ہے۔ مساوات 4.45 کا بایاں ہاتھ ڈھلوان کی علامت جبکہ اس کا دایاں ہاتھ ڈھلوان کے عمل کو ظاہر کرتا ہے۔ اگرچہ ہم نے ڈھلوان کا عمل برقی دباؤ اور برقی میدان کے لئے حاصل کیا، حقیقت میں یہ عمل سائنس کے دیگر متغیرات کے لئے بھی درست ثابت ہوتا ہے۔ اس کی مقبولیت اسی حقیقت کی وجہ سے ہے کہ یہ جگہ جگہ پیش آتا ہے۔ ڈھلوان کا عمل مقداری پر کیا جاتا ہے جبکہ اس کا حاصل جواب سمتیہ ہوتا ہے۔ صفحہ 115 پر مساوات 3.32 پھیلاؤ کی تعریف بیان کرتا ہے جہاں پھیلاؤ کا عمل سمتیہ پر کرتے ہوئے مقداری¹⁹ حاصل کی جاتی ہے۔ پھیلاؤ کے اس مساوات کو یہاں موازنے کے لئے دوبارہ پیش کرتے ہیں۔

$$(4.47) \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

¹⁸ gradient

¹⁹ طلباء و طالبات عموماً ڈھلوان کے حاصل جواب کے اکائی سمتیات کو غائب کرتے ہوئے انہیں پھیلاؤ کے ساتھ منسلک کر لیتے ہیں۔ ایسا کرنے سے گریز کریں۔

مشق 4.3: تقابل $f(x, y, z) = 3 + z^2 e^{yz} \sin x$ کا ڈھلوان حاصل کریں۔

جواب: $z^2 e^{yz} \cos x \mathbf{a}_x + z^2 e^{yz} \sin x \mathbf{a}_y + 2z e^{yz} \sin x \mathbf{a}_z$

مثال 4.4: نقطہ $N_1(x_1, y_1, z_1)$ سے نقطہ $N_2(x_2, y_2, z_2)$ کا سمتی فاصلہ

$$\mathbf{R}_{21} = (x_2 - x_1)\mathbf{a}_x + (y_2 - y_1)\mathbf{a}_y + (z_2 - z_1)\mathbf{a}_z$$

ہے جبکہ ان کے مابین فاصلہ $R_{21} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ ہے۔ نقطہ N_2 پر $\frac{1}{R_{21}}$ کی ڈھلوان حاصل کریں۔

حل: نقطہ N_2 پر ڈھلوان حاصل کرتے وقت x_2, y_2 اور z_2 کو متغیرات تصور کیا جاتا ہے جبکہ x_1, y_1 اور z_1 کو اٹل قیمتیں تصور کیا جاتا ہے۔ یوں ڈھلوان کی تعریف

$$\nabla_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} \mathbf{a}_x + \frac{\partial}{\partial y_2} \mathbf{a}_y + \frac{\partial}{\partial z_2} \mathbf{a}_z$$

لکھی جائے گی جہاں ∇_2 کے زیر نوشت میں 2 یاد دہانی کراتا ہے کہ نقطہ N_2 کے متغیرات ڈھلوان حاصل کرتے ہوئے استعمال کئے جائیں گے۔ ڈھلوان کا پہلا جزو

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{1}{R_{21}} &= \frac{\partial}{\partial x_2} [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]^{-\frac{1}{2}} \\ &= -\frac{1}{2} [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]^{-\frac{3}{2}} [2(x_2 - x_1)] \\ &= \frac{-(x_2 - x_1)}{[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

یعنی

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \frac{1}{R_{21}} = \frac{-(x_2 - x_1)}{R_{21}^3}$$

حاصل ہوتا ہے۔ بقایا دو اجزاء بھی بالکل اسی طرح حل کرتے ہوئے

$$\nabla^2 \frac{1}{R_{21}} = \frac{-(x_2 - x_1)\mathbf{a}_x - (y_2 - y_1)\mathbf{a}_y - (z_2 - z_1)\mathbf{a}_z}{R_{21}^3}$$

یعنی

$$(4.48) \quad \nabla^2 \frac{1}{R_{21}} = -\frac{\mathbf{R}_{21}}{R_{21}^3} = -\frac{\mathbf{a}_{R_{21}}}{R_{21}^2}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

مشق 4.4: مندرجہ بالا مساوات میں نقطہ N_2 پر ڈھلوان حاصل کی گئی۔ اب آپ نقطہ N_1 پر $\frac{1}{R_{21}}$ کی ڈھلوان حاصل کرتے ہوئے ثابت کریں کہ

$$(4.49) \quad \nabla_1 \frac{1}{R_{21}} = \frac{\mathbf{R}_{21}}{R_{21}^3}$$

کے برابر ہے۔ یوں

$$(4.50) \quad \nabla_1 \frac{1}{R_{21}} = -\nabla_2 \frac{1}{R_{21}}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

4.5.1 نکلی محدود میں ڈھلوان

نکلی محدود میں برقی دباؤ کے آزاد متغیرات نکلی محدود کے متغیرات ہوں گے اور یوں برقی دباؤ $V(\rho, \phi, z)$ لکھا جائے گا۔ مساوات 4.39، مساوات 4.40 اور مساوات 4.41 کو نکلی محدود میں یوں لکھ سکتے ہیں

$$(4.51) \quad dV = \frac{\partial V}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial V}{\partial \phi} d\phi + \frac{\partial V}{\partial z} dz$$

$$(4.52) \quad \mathbf{E} = E_\rho \mathbf{a}_\rho + E_\phi \mathbf{a}_\phi + E_z \mathbf{a}_z$$

$$(4.53) \quad dL = d\rho \mathbf{a}_\rho + \rho d\phi \mathbf{a}_\phi + dz \mathbf{a}_z$$

جہاں چھوٹی لمبائی dL کو صفحہ 39 پر مساوات 1.44 کی مدد سے لکھا گیا ہے۔ مندرجہ بالا تین مساوات کو مساوات 4.29 میں پُر کرتے ہوئے

$$(4.54) \quad \frac{\partial V}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial V}{\partial \phi} d\phi + \frac{\partial V}{\partial z} dz = - (E_\rho d\rho + E_\phi \rho d\phi + E_z dz)$$

حاصل ہوتا ہے۔ ϕ اور z تبدیل کئے بغیر (یعنی $d\phi = 0$ اور $dz = 0$ لیتے ہوئے) ρ تبدیل کرنے سے اس مساوات کے بائیں اور دائیں ہاتھ کا پہلا جزو یعنی $\frac{\partial V}{\partial \rho} d\rho$ اور $-E_\rho d\rho$ تبدیل ہوتے ہیں۔ اگر یہ اجزاء ہر صورت برابر رہیں صرف اور صرف اسی صورت مندرجہ بالا مساوات کے دونوں بازو برابر رہیں گے لہذا $\frac{\partial V}{\partial \rho} d\rho = -E_\rho d\rho$ ہو گا جس سے $E_\rho = -\frac{\partial V}{\partial \rho}$ حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح باری باری ϕ اور z تبدیل کرتے ہوئے

$$E_\phi \rho d\phi = -\frac{\partial V}{\partial \phi} d\phi$$

$$E_z dz = -\frac{\partial V}{\partial z} dz$$

لکھے جاسکتے ہیں جس سے E_ϕ اور E_z کے مساوات حاصل ہوتے ہیں۔ ان تمام جوابات کو یکجا کرتے ہیں۔

$$(4.55) \quad \begin{aligned} E_\rho &= -\frac{\partial V}{\partial \rho} \\ E_\phi &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \phi} \\ E_z &= -\frac{\partial V}{\partial z} \end{aligned}$$

انہیں مساوات 4.52 میں پُر کرتے ہوئے

$$(4.56) \quad \mathbf{E} = - \left(\frac{\partial V}{\partial \rho} \mathbf{a}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \phi} \mathbf{a}_\phi + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{a}_z \right)$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس کو مساوات 4.46 کی شکل میں لکھتے ہوئے نکلے محدود میں ڈھلوان کی مساوات

$$(4.57) \quad \nabla = \frac{\partial}{\partial \rho} \mathbf{a}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \mathbf{a}_\phi + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{a}_z \quad \text{نکلے محدود میں ڈھلوان کی مساوات}$$

حاصل ہوتی ہے۔ مساوات 4.45 اور مساوات 4.57 کا موازنہ کریں۔ کارتیسی محدود کی مساوات نسبتاً آسان ہے۔

4.5.2 کروئی محدود میں ڈھلوان

صفحہ 47 پر مساوات 1.64 کروئی محدود میں چھوٹی لمبائی dL کی مساوات ہے۔ کروئی محدود میں کسی بھی نقطے کے برقی دباؤ کو $V(r, \theta, \phi)$ لکھا جاسکتا ہے جبکہ کسی بھی سمتیہ کی طرح \mathbf{E} کو تین عمودی حصوں میں لکھا جاسکتا ہے۔ یوں ہم مساوات 4.39، مساوات 4.40 اور مساوات 4.41 کو کروئی محدود میں یوں لکھ سکتے ہیں۔

$$(4.58) \quad dV = \frac{\partial V}{\partial r} dr + \frac{\partial V}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial V}{\partial \phi} d\phi$$

$$(4.59) \quad \mathbf{E} = E_r \mathbf{a}_r + E_\theta \mathbf{a}_\theta + E_\phi \mathbf{a}_\phi$$

$$(4.60) \quad dL = dr \mathbf{a}_r + r d\theta \mathbf{a}_\theta + r \sin \theta d\phi \mathbf{a}_\phi$$

ان تین مساوات کو مساوات 4.29 میں پُر کرتے ہوئے

$$(4.61) \quad \frac{\partial V}{\partial r} dr + \frac{\partial V}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial V}{\partial \phi} d\phi = - \left(E_r dr + E_\theta r d\theta + E_\phi r \sin \theta d\phi \right)$$

حاصل ہوتا ہے۔ اب اگر ہم صرف r کو تبدیل کریں تب $d\theta = 0$ اور $d\phi = 0$ ہوں گے لہذا مندرجہ بالا مساوات کے بائیں دائیں بازو کا پہلا جزو یعنی $\frac{\partial V}{\partial r} dr$ اور $-E_r dr$ تبدیل ہوں گے۔ یہ اجزاء بالکل برابر ہونے کی صورت

میں ہی مساوات کے دونوں بازو برابر رہیں گے لہذا ہم $\frac{\partial V}{\partial r} dr = -E_r dr$ لکھ سکتے ہیں جس سے $E_r = -\frac{\partial V}{\partial r}$ حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح باری باری اور تبدیل کرتے ہوئے مساوات کے دونوں بازو کے اجزاء برابر لکھتے ہوئے

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial \theta} d\theta &= -E_\theta r d\theta \\ \frac{\partial V}{\partial \phi} d\phi &= -E_\phi r \sin \theta d\phi\end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے جس سے E_θ اور E_ϕ کے مساوات حاصل ہوتے ہیں۔ ان تمام جوابات کو یکجا کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}E_r &= -\frac{\partial V}{\partial r} \\ E_\theta &= -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \\ E_\phi &= -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi}\end{aligned}$$

ان قیمتوں کو مساوات 4.59 میں پُر کرتے ہوئے

$$(4.62) \quad \mathbf{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial r} \mathbf{a}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \mathbf{a}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \mathbf{a}_\phi \right)$$

لکھا جاسکتا ہے جس سے عمومی محدود میں ڈھلوان کی مساوات یوں لکھی جاسکتی ہے۔

$$(4.63) \quad \nabla = \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{a}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{a}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \mathbf{a}_\phi \quad \text{کروی محدود میں ڈھلوان کی مساوات}$$

مشق 4.5: عمومی محدود کے متغیرات (u, v, w) اور اکائی سمتیات $(\mathbf{a}_u, \mathbf{a}_v, \mathbf{a}_w)$ لیتے ہوئے صفحہ 118 پر حصہ 3.10 میں پھیلاؤ کی عمومی مساوات کا حصول دکھایا گیا۔ ایسا ہی کرتے ہوئے ڈھلوان کی عمومی مساوات حاصل کریں۔

جواب:

$$\nabla = \frac{1}{K_1} \frac{\partial}{\partial u} \mathbf{a}_u + \frac{1}{K_2} \frac{\partial}{\partial v} \mathbf{a}_v + \frac{1}{K_3} \frac{\partial}{\partial w} \mathbf{a}_w \quad \text{ڈھلوان کی عمومی مساوات}$$

مثال 4.5: صفحہ 4.15 پر مساوات 4.15 نقطہ بار کا برقی دباؤ دیتا ہے۔ مساوات 4.62 کے استعمال سے کروی محدود میں E کی مساوات حاصل کریں۔

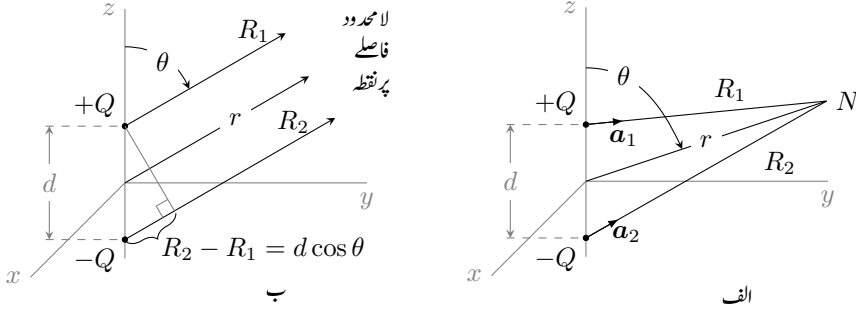
حل: برقی دباؤ $V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$ کروی محدود کے رداس پر منحصر ہے جبکہ θ اور ϕ کا اس میں کوئی کردار نہیں لہذا مساوات 4.62 میں $\frac{\partial V}{\partial \theta}$ اور $\frac{\partial V}{\partial \phi}$ صفر کے برابر ہوں گے۔ اس طرح $\frac{\partial V}{\partial r}$ لیتے ہوئے $E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r$ حاصل ہوتا ہے۔

یہاں بتلاتا چلوں کہ حقیقی دنیا میں عموماً برقی دباؤ معلوم ہوتی ہے جس سے برقی میدان کا حصول درکار ہوتا ہے۔ اس کی مثال بجلی کی دو تاریں ہو سکتی ہیں جن کے درمیان 220 V پایا جاتا ہے اور جن کے درمیان آپ برقی میدان جاننا چاہتے ہوں۔

4.6 جفت قطب

شکل 4.9- الف میں محدود کے مرکز سے $\frac{d}{2}$ فاصلے پہ z محدود پر ایک جانب $+Q$ اور دوسری جانب $-Q$ نقطہ بار دکھائے گئے ہیں۔ یوں برابر مقدار مگر الٹ علامت کے نقطہ باروں کے درمیان d فاصلہ ہے۔ ایسی جوڑی باروں کو جفت قطب²⁰ کہا جاتا ہے۔ ہمیں جفت قطب سے دور نقطہ N پر برقی میدان اور برقی دباؤ کی قیمتیں درکار ہیں۔ کسی بھی دور نقطے سے یہ دونوں بار تقریباً مرکز پر دکھائی دیتے ہیں۔ دور نقطے سے ایسا نقطہ مراد ہے جہاں مرکز سے نقطے تک کا فاصلہ r جفت قطب باروں کے درمیان فاصلہ d سے بہت زیادہ ہو یعنی جب $d \gg r$ ہو۔ ہم دیکھ سکتے ہیں کہ r یا θ تبدیل کرنے سے برقی میدان تبدیل ہو گا جبکہ ϕ تبدیل کرنے سے ایسا نہیں ہو گا۔ شکل 4.9- الف میں R_1 اور R_2 دونوں r کی جانب جھک کر N پر آ ملتے ہیں۔ نقطہ N کو جتنا دور لے جایا جائے اتنی ہی R_1 اور R_2 دونوں r کے متوازی صورت اختیار کرتے ہیں حتیٰ کہ آخر کار یہ شکل 4.9- ب کی طرح نظر آتے ہیں۔ آئیں اس شکل کی مدد سے دور نقطے پر برقی دباؤ اور برقی میدان حاصل کریں۔

dipole²⁰



شکل 4.9: جفت قطب

شکل 4.9-ب میں R_1 ، R_2 اور r تینوں z محدد کے ساتھ θ زاویہ بناتے ہیں۔ بار $+Q$ سے R_2 پر عمود بناتے ہوئے

$$(4.64) \quad \begin{aligned} R_2 - R_1 &= d \cos \theta \\ R_1 &= r - \frac{d}{2} \cos \theta \\ R_2 &= r + \frac{d}{2} \cos \theta \end{aligned}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ شکل 4.9-الف میں N پر برقی دباؤ V مساوات 4.22 کی مدد سے

$$(4.65) \quad V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{R_1} - \frac{Q}{R_2} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} \right)$$

لکھی جاسکتی ہے۔ مساوات 4.64 کی مدد سے اسے

$$\begin{aligned} V &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d \cos \theta}{\left(r - \frac{d}{2} \cos \theta\right) \left(r + \frac{d}{2} \cos \theta\right)} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d \cos \theta}{\left(r^2 - \frac{d^2}{4} \cos^2 \theta\right)} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{d \cos \theta}{\left(1 - \frac{d^2}{4r^2} \cos^2 \theta\right)} \end{aligned}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ نیچے تو سین میں $\cos \theta \leq 1$ اور $d \gg r$ کی وجہ سے $\frac{d^2}{4r^2} \cos^2 \theta \gg 1$ ہو گا اور یوں $\frac{d^2}{4r^2} \cos^2 \theta$ کو نظر انداز کیا جاسکتا ہے۔ یوں

$$(4.66) \quad V = \frac{Qd \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 4.62 کو استعمال کرتے ہوئے اس مساوات سے برقی میدان لکھتے ہیں۔

$$(4.67) \quad E = \frac{Qd}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos \theta \mathbf{a}_r + \sin \theta \mathbf{a}_\theta)$$

ہم پہلے برقی دباؤ اور پھر ڈھلوان کی مدد سے برقی میدان حاصل کرنے کے بجائے پہلے برقی میدان اور پھر تکمیل استعمال کرتے ہوئے برقی دباؤ حاصل کر سکتے ہیں البتہ ایسا کرنا اتنا آسان ثابت نہیں ہوتا۔ شوق رکھنے والوں کے لئے مثال 4.6 میں اسی طریقے کو استعمال کرتے ہوئے دور نقطے پر جفت قطب سے پیدا میدان اور برقی دباؤ حاصل کئے گئے ہیں۔

جفت قطب کا بار $|Q|$ ضرب باروں کے درمیان سمتی فاصلہ d کو معیار اثر جفت قطب²¹ کہتے ہیں اور اسے p سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ یوں

$$(4.68) \quad p = Qd$$

کے برابر ہے جہاں سمتی فاصلہ منفی بار سے مثبت بار کی سمت میں ہوتا ہے لہذا شکل 4.9 میں $d = da_z$ ہے۔ اس طرح چونکہ $\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_r = \cos \theta$ کے برابر ہے لہذا یوں ہم مساوات 4.66 کو

$$(4.69) \quad V = \frac{p \cdot \mathbf{a}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

لکھ سکتے ہیں۔ اسی مساوات کو مزید یوں بھی لکھا جا سکتا ہے

$$(4.70) \quad V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

جہاں r اس نقطے کی نشاندہی کرتا ہے جہاں برقی دباؤ حاصل کیا جا رہا ہو جبکہ r' جفت قطب کے مرکز کی نشاندہی کرتا ہے۔ یہ مساوات کسی بھی محدود نظام سے آزاد مساوات ہے۔

مساوات 4.66 کے تحت r بڑھانے سے برقی دباؤ r^2 گنا کم ہوتا ہے۔ یاد رہے کہ اکیلے بار کا برقی دباؤ ایسی صورت میں r گنا کم ہوتا ہے۔ ہمیں تعجب نہیں ہونا چاہیے چونکہ دور سے جفت قطب کے دو بار نہایت قریب قریب نظر آتے ہیں جس سے مثبت بار کا اثر منفی بار کا اثر تقریباً ختم کرتا ہے۔ یہی حقیقت مساوات 4.67 میں بھی نظر آتا ہے جہاں r بڑھانے سے E کی قیمت r^3 گنا کم ہوتی ہے۔

²¹dipole moment

جب تک Q ضرب d کی قیمت تبدیل نہ ہو اس وقت تک دور کسی بھی نقطے پر جفت قطب کے اثرات میں کوئی تبدیلی رونما نہیں ہوتی۔ یوں Q کو کم یا زیادہ کرتے ہوئے اگر d کو یوں تبدیل کیا جائے کہ Qd تبدیل نہ ہو تو جفت قطب سے دور نقطے پر جفت قطب کے اثرات میں کوئی تبدیلی نہیں پائی جائے گی۔ اب اگر ہم Qd کی قیمت محدود رکھتے ہوئے d کو اتنا کم کر دیں کہ اسے صفر تصور کیا جاسکے اور ساتھ ہی ساتھ Q کو اتنا بڑھا دیں کہ اسے لامحدود تصور کیا جاسکے تو ایسی صورت میں ہمیں نقطہ جفت قطب حاصل ہو گا۔

4.6.1 جفت قطب کے سمت بہاؤ خط

ہم پہلے صفحہ 90 پر حصہ 2.7 میں سمت بہاؤ خط²² پر غور کر چکے ہیں۔ انہیں جفت قطب کے سمت بہاؤ خط کھینچنا دیکھیں۔ برقی دباؤ کے سمت بہاؤ خط مساوات 4.66 کی مدد سے کھینچے جاسکتے ہیں۔ اس مساوات میں $\frac{Qd}{4\pi\epsilon_0}$ مستقل ہے جسے ایک کے برابر لیتے ہوئے $V = \frac{\cos\theta}{r^2}$ حاصل ہوتا ہے۔ مختلف برقی دباؤ کی قیمتوں کے لئے اسے کھینچ کر برقی دباؤ کے سمت بہاؤ خط حاصل کئے جاتے ہیں۔ شکل 4.10 میں $V = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ کے لئے اس مساوات کے خط دکھائے گئے ہیں۔ مساوات 4.65 کے تحت دونوں بار سے برابر فاصلہ پر $V = 0$ حاصل ہوتا ہے۔ یوں $z = 0$ لامحدود سطح پر برقی دباؤ صفر ہو گا اور یہ بطور برقی زمین کردار ادا کرے گی۔

جفت قطب کے میدان کے سمت بہاؤ خط مساوات 4.67 کی مدد سے کھینچے جاتے ہیں۔ اس مساوات کا پہلا جزو کسی بھی نقطے پر a_r سمت میں میدان E_r دیتا ہے جبکہ اس کا دوسرا جزو اسی نقطے پر a_θ سمت میں میدان E_θ دیتا ہے۔ اس طرح اس نقطے پر ہم

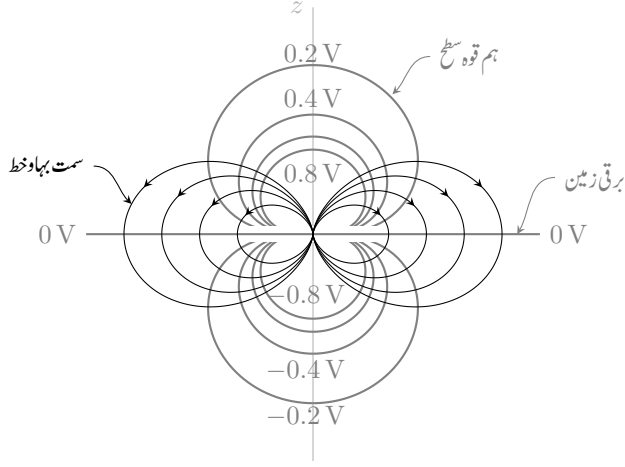
$$\frac{E_r}{E_\theta} = \frac{dr}{r d\theta} = \frac{2 \cos \theta}{\sin \theta}$$

یا

$$\frac{dr}{r} = \frac{2 \cos \theta}{\sin \theta} d\theta$$

لکھ کر عمل لیتے ہوئے

$$\ln r = 2 \ln \sin \theta + \ln M$$



شکل 4.10: جفت قطب کے ہم قوتہ اور سمت بہاؤ خط۔

حاصل کرتے ہیں جہاں $\ln M$ تکمیل کا مستقل ہے۔ اسے مزید یوں لکھ سکتے ہیں۔

$$(4.71) \quad r = M \sin^2 \theta$$

یہ مساوات جفت قطب کے میدان کے سمت بہاؤ خط دیتا ہے جنہیں شکل 4.10 میں $M = 1, 1.5, 2, 2.5$ کے لئے کھینچا گیا ہے۔ برقی زمین پر برقی میدان عمودی ہے۔

مثال 4.6: شکل 4.9-الف میں دکھائے گئے جفت قطب سے دور کسی نقطے N پر پہلے برقی میدان اور پھر اس برقی میدان کو استعمال کرتے ہوئے برقی دباؤ حاصل کریں۔

صفحہ 35 پر مثال 1.8 میں $R_1 = R_1 a_1$ اور $R_2 = R_2 a_2$ سمتیوں کو کروئی نظام میں لکھنا دکھایا گیا ہے۔ انہیں یہاں دوبارہ پیش کرتے ہیں۔

$$R_1 = \left(r - \frac{d}{2} \cos \theta \right) a_r + \frac{d}{2} \sin \theta a_\theta$$

$$R_2 = \left(r + \frac{d}{2} \cos \theta \right) a_r - \frac{d}{2} \sin \theta a_\theta$$

جس سے $R_1 = |\mathbf{R}_1| = \sqrt{\mathbf{R}_1 \cdot \mathbf{R}_1}$ حاصل کرتے ہیں۔

$$(4.72) \quad \begin{aligned} R_1 &= \sqrt{\left(r - \frac{d}{2} \cos \theta\right)^2 + \left(\frac{d}{2} \sin \theta a_\theta\right)^2} \\ &= r \sqrt{1 - \frac{d}{r} \cos \theta + \frac{d^2}{r^2}} \\ &\approx r \sqrt{1 - \frac{d}{r} \cos \theta} \quad (d \ll r) \end{aligned}$$

آخری قدم پر $r \ll d$ کی بنا پر $\frac{d^2}{r^2}$ کو رد کیا گیا ہے۔ ہم جانتے ہیں کہ

$$(a + b)^n = a^n + \frac{na^{n-1}b}{1!} + \frac{n(n-1)a^{n-2}b^2}{2!} + \dots$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اگر $a = 1$ اور $b = -\frac{d}{r} \cos \theta$ کے برابر ہوں تب مساوات 4.72 میں دئے R_1 کی طاقت تین کے لئے ہم لکھ سکتے ہیں

$$R_1^3 = r^3 \left(1 - \frac{d}{r} \cos \theta\right)^3 = r^3 \left(1 - \frac{3d}{2r} \cos \theta + \dots\right)$$

اس مساوات کے پہلے دو جزو دکھائے گئے ہیں۔ اس کے تیسرے جزو میں $\frac{d^3}{r^3}$ چوتھے جزو میں $\frac{d^4}{r^4}$ پائے جاتے ہیں لہذا پہلے دو اجزاء کے علاوہ تمام اجزاء کو نظر انداز کیا جاسکتا ہے۔ یوں

$$(4.73) \quad R_1^3 = r^3 \left(1 - \frac{3d}{2r} \cos \theta\right)$$

صورت اختیار کر لیتا ہے۔ یہی عمل R_2^3 کے لئے کرنے سے

$$(4.74) \quad R_2^3 = r^3 \left(1 + \frac{3d}{2r} \cos \theta\right)$$

حاصل ہوتا ہے۔ صفحہ 64 پر مساوات 2.18 کو استعمال کرتے ہوئے دونوں باروں سے کلہ برقی میدان ان کے علیحدہ علیحدہ میدان کے مجموعے کو یوں لکھا جاسکتا ہے۔

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{R}_1}{R_1^3} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{R}_2}{R_2^3} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\left[\left(r - \frac{d}{2} \cos \theta\right)\mathbf{a}_r + \frac{d}{2} \sin \theta \mathbf{a}_\theta\right]}{r^3 \left(1 - \frac{3d}{2r} \cos \theta\right)} - \frac{\left[\left(r + \frac{d}{2} \cos \theta\right)\mathbf{a}_r - \frac{d}{2} \sin \theta \mathbf{a}_\theta\right]}{r^3 \left(1 + \frac{3d}{2r} \cos \theta\right)} \right) \\ &= \frac{Qd}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left(\frac{2 \cos \theta \mathbf{a}_r + \sin \theta \mathbf{a}_\theta}{\left(1 - \frac{3d}{2r} \cos \theta\right)\left(1 + \frac{3d}{2r} \cos \theta\right)} \right) \end{aligned}$$

اس مساوات میں کسر کے نچلے حصے کو ضرب دیتے ہوئے $(1 - \frac{9d^2}{4r^2} \cos^2 \theta \approx 1)$ لکھا جاسکتا ہے جہاں $\frac{d^2}{r^2}$ والے جزو کو نظر انداز کیا گیا ہے۔ یوں

$$(4.75) \quad \mathbf{E} = \frac{Qd}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos \theta \mathbf{a}_r + \sin \theta \mathbf{a}_\theta)$$

حاصل ہوتا ہے جو مساوات 4.67 ہی ہے۔

برقی زمین کو لامحدود فاصلے پر رکھتے ہوئے مساوات 4.75 سے نقطہ $N_0(r, \theta, \phi)$ پر برقی دباؤ حاصل کرتے ہیں۔ لامحدود فاصلے پر نقطہ $N_3(\infty, \theta', \phi')$ سے کروی محدد کے مرکز کی جانب سیدھا چلتے ہوئے ہم پہلے $N_2(r, \theta', \phi')$ تک پہنچتے ہیں۔ اس کے بعد صرف θ تبدیل کرتے ہوئے ہم $N_1(r, \theta, \phi')$ پہنچیں گے اور آخر کار r اور θ تبدیل کئے بغیر $N_0(r, \theta, \phi)$ پہنچیں گے۔

صفحہ 47 پر مساوات 1.64 کروی محدد میں چھوٹی لمبائی dL کی مساوات ہے۔ اسے یہاں دوبارہ لکھتے ہیں۔

$$(4.76) \quad d\mathbf{L} = dr \mathbf{a}_r + r d\theta \mathbf{a}_\theta + r \sin \theta d\phi \mathbf{a}_\phi$$

N_2 سے N_3 تک چلتے ہوئے $d\theta = 0$ اور $d\phi = 0$ ہوں گے لہذا N_3 کے حوالے سے N_2 پر برقی دباؤ V_{23}

$$\begin{aligned} V_{23} &= - \int_{N_3}^{N_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = - \frac{Qd}{4\pi\epsilon_0} \int_{N_3}^{N_2} \frac{(2 \cos \theta \mathbf{a}_r + \sin \theta \mathbf{a}_\theta) \cdot dr \mathbf{a}_r}{r^3} \\ &= - \frac{Qd}{4\pi\epsilon_0} \int_{N_3}^{N_2} \frac{2 \cos \theta dr}{r^3} = \frac{Qd \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \Big|_{\infty, \theta', \phi'}^{r, \theta', \phi'} = \frac{Qd \cos \theta'}{4\pi\epsilon_0 r^2} \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اب N_2 سے N_1 چلتے ہیں۔ ہم اس راستے $dr = 0$ اور $d\phi = 0$ رکھتے ہیں لہذا

$$\begin{aligned} V_{12} &= - \int_{N_2}^{N_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = - \frac{Qd}{4\pi\epsilon_0} \int_{N_2}^{N_1} \frac{(2 \cos \theta \mathbf{a}_r + \sin \theta \mathbf{a}_\theta) \cdot r d\theta \mathbf{a}_\theta}{r^3} \\ &= - \frac{Qd}{4\pi\epsilon_0} \int_{N_2}^{N_1} \frac{\sin \theta d\theta}{r^2} = \frac{Qd \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \Big|_{r, \theta', \phi'}^{r, \theta, \phi'} = \frac{Qd (\cos \theta - \cos \theta')}{4\pi\epsilon_0 r^2} \end{aligned}$$

ہو گا۔ اب N_1 سے N_0 چلتے ہیں۔ اس راستے $dr = 0$ اور $d\theta = 0$ رکھے گئے ہیں لہذا

$$V_{01} = - \int_{N_1}^{N_0} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = - \frac{Qd}{4\pi\epsilon_0} \int_{N_1}^{N_0} \frac{(2 \cos \theta \mathbf{a}_r + \sin \theta \mathbf{a}_\theta) \cdot r \sin \theta d\phi \mathbf{a}_\phi}{r^3} = 0$$

حاصل ہوتا ہے جہاں $\mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}_\phi = 0$ اور $\mathbf{a}_\theta \cdot \mathbf{a}_\phi = 0$ کی بدولت مکمل صفر کے برابر لیا گیا ہے۔ یوں V_{12} ، V_{23} اور V_{01} جمع کرتے ہوئے N_3 سے N_0 تک کا برقی دباؤ

$$(4.77) \quad V_0 = V_{03} = V_{23} + V_{12} + V_{01} = \frac{Qd \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

حاصل ہوتا ہے جو مساوات 4.66 ہی ہے۔

مندرجہ بالا مثال سے آپ نے دیکھ لیا ہو گا کہ پہلے برقی میدان اور بعد میں برقی دباؤ حاصل کرنا زیادہ مشکل کام ہے۔ برقی دباؤ کی افادیت اس مثال سے صاف ظاہر ہے۔ حقیقی دنیا میں عموماً برقی دباؤ ہی معلوم ہوتی ہے جیسے دو متوازی دھاتی چادروں کے درمیان برقی دباؤ یا گھریلو صارفین کے ہاں دو برقی تاروں کے درمیان برقی دباؤ۔ ہم ایسی برقی دباؤ جانتے ہوئے اس سے مختلف متغیرات حاصل کرتے ہیں۔

4.7 ساکن برقی میدان کی کثافت توانائی

برقی دباؤ پر غور کرتے ہوئے ہم نے دیکھا کہ برقی میدان میں لامحدود فاصلے سے بار کو کسی نقطہ منتقل کرنے کے لئے توانائی درکار ہوتی ہے۔ یہ توانائی بار کو حرکت دینے والا محرک مہیا کرتا ہے۔ چونکہ توانائی اٹل ہے لہذا یہ توانائی بصورت مخفی توانائی بار میں منتقل ہو جاتی ہے۔ جب تک بیرونی قوت بار کو اس نقطے پر روکے رکھے یہ توانائی بار میں بطور مخفی توانائی رہے گی۔ اگر بار کو بیرونی طاقت نہ روکے تو مخفی توانائی حسی²³ توانائی میں تبدیل ہوتے ہوئے بار کو حرکت دے گی۔ یوں اب بار از خود کام کرنے کے قابل ہو گا۔

آئیں دیکھیں کہ اگر اسی طرح مختلف بار کو لامحدود فاصلے سے مختلف مقامات پر لا کر وہیں روکے رکھا جائے تو اس پورے نظام کی کل مخفی توانائی کتنی ہوگی۔ یہ توانائی ان باروں کو اپنی اپنی جگہوں پر منتقل کرنے کے لئے درکار بیرونی توانائی کے مجموعے سے حاصل کی جاسکتی ہے۔

شروع خالی خلاء سے کرتے ہیں۔ خالی خلاء میں چونکہ کوئی بار نہیں پایا جاتا لہذا اس میں برقی میدان صفر کے برابر ہو گا۔ یوں پہلے بار Q_1 کو لامحدود فاصلے سے نقطہ N_1 منتقل کرنے کے لئے صفر توانائی درکار ہوگی۔ اب چونکہ خلاء میں Q_1 موجود ہے لہذا دوسرے بار Q_2 کو نقطہ N_2 منتقل کرنے کے لئے $Q_2 V_{2,1}$ توانائی درکار ہوگی جہاں N_2 پر پہلے بار کی وجہ سے پیدا برقی دباؤ کو $V_{2,1}$ لکھا گیا ہے۔ $V_{2,1}$ لکھتے ہوئے زیر نوشت میں پہلا عدد منتقل کئے جانے والے بار کی نشاندہی کرتا ہے جبکہ پہلا عدد منتقلی کے نقطے پر برقی دباؤ پیدا کرنے والے بار کی نشاندہی کرتا ہے۔ یوں

$$Q_2 \text{ بار} = Q_2 V_{2,1} \text{ منتقل کرنے کے لئے درکار توانائی}$$

لکھا جائے گا۔ اب خلاء میں دو عدد بار پائے جاتے ہیں لہذا نقطہ N_3 پر Q_1 سے پیدا $V_{3,1}$ اور Q_2 سے پیدا $V_{3,2}$ برقی دباؤ ہوں گے۔ یوں N_3 پر کل $V_{3,1} + V_{3,2}$ برقی دباؤ ہو گا لہذا

$$Q_3 \text{ بار} = Q_3 V_{3,1} + Q_3 V_{3,2} \text{ منتقل کرنے کے لئے درکار توانائی}$$

اور اسی طرح

$$Q_4 \text{ بار} = Q_4 V_{4,1} + Q_4 V_{4,2} + Q_4 V_{4,3} \text{ منتقل کرنے کے لئے درکار توانائی}$$

ہو گا۔ یہی طریقہ کار مزید بار منتقل کرنے کے لئے درکار توانائی دریافت کرنے کے لئے استعمال کیا جائے گا۔ کل مخفی توانائی W تمام باروں کو منتقل کرنے کے لئے درکار توانائی کے برابر ہو گا جو مندرجہ بالا طرز کے تمام جوابات کا مجموعہ ہو گا یعنی

$$(4.78) \quad W = Q_2 V_{2,1} + Q_3 V_{3,1} + Q_3 V_{3,2} + Q_4 V_{4,1} + Q_4 V_{4,2} + Q_4 V_{4,3} + \dots \\ = Q_2 (V_{2,1}) + Q_3 (V_{3,1} + V_{3,2}) + Q_4 (V_{4,1} + V_{4,2} + V_{4,3}) + \dots$$

مندرجہ بالا مساوات میں کسی رکن مثلاً $Q_4 V_{4,2}$ کو دیکھیں۔ اسے یوں

$$Q_4 V_{4,2} = Q_4 \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_{42}} = Q_2 \frac{Q_4}{4\pi\epsilon_0 R_{24}} = Q_2 V_{2,4}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں Q_2 اور Q_4 کے درمیان مقداری فاصلے کو R_{42} یا R_{24} لکھا جا سکتا ہے۔ اس طرح $Q_4 V_{4,2}$ کو $Q_2 V_{2,4}$ لکھا جا سکتا ہے۔ اس طرح مساوات 4.78 کے ہر جزو کو تبدیل کرتے ہوئے اسے

$$(4.79) \quad W = Q_1 V_{1,2} + Q_1 V_{1,3} + Q_2 V_{2,3} + Q_1 V_{1,4} + Q_2 V_{2,4} + Q_3 V_{3,4} + \dots \\ = Q_1 (V_{1,2} + V_{1,3} + V_{1,4} + \dots) + Q_2 (V_{2,3} + V_{2,4} + \dots) + Q_3 (V_{3,4} + \dots)$$

لکھا جا سکتا ہے۔ مساوات 4.78 اور مساوات 4.79 کو جمع کرتے ہوئے

$$(4.80) \quad \begin{aligned} 2W = & Q_1(V_{1,2} + V_{1,3} + V_{1,4} + \dots) \\ & + Q_2(V_{2,1} + V_{2,3} + V_{2,4} + \dots) \\ & + Q_3(V_{3,1} + V_{3,2} + V_{3,4} + \dots) \\ & + \dots \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس مساوات کے پہلے قوسین میں $V_{1,2}$ نقطہ N_1 پر Q_2 کا پیدا کردہ برقی دباؤ ہے۔ اسی طرح $V_{1,3}$ نقطہ N_1 پر Q_3 کا پیدا کردہ برقی دباؤ ہے جبکہ $V_{1,4}$ یہیں پر Q_4 کا پیدا کردہ برقی دباؤ ہے۔ یوں قوسین میں بند قیمت نقطہ N_1 پر تمام باروں کا مجموعی برقی دباؤ V_1 ہے۔ یاد رہے کہ N_1 پر برقی دباؤ حاصل کرتے وقت یہیں پر پائے جاتے بار Q_1 کو شامل نہیں کیا جاتا۔ یوں

$$V_1 = V_{1,2} + V_{1,3} + V_{1,4} + \dots$$

کے برابر ہے۔ اس طرح مندرجہ بالا مساوات سے

$$(4.81) \quad W = \frac{1}{2} (Q_1 V_1 + Q_2 V_2 + Q_3 V_3 + \dots) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^n Q_m V_m$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

$$V_1 = V_{1,2} + V_{1,3} + V_{1,4} + \dots$$

$$V_2 = V_{2,1} + V_{2,3} + V_{2,4} + \dots$$

$$V_3 = V_{3,1} + V_{3,2} + V_{3,4} + \dots$$

لکھے گئے ہیں۔

ایسی حجم جس میں حجمی کثافت بار ρ_h پائی جائے کی کل مخفی توانائی حاصل کرنے کی غرض سے چھوٹے چھوٹے حجم dh میں بار $dQ = \rho_h dh$ کو نقطہ بار تصور کرتے ہوئے مساوات 4.81 کا استعمال کیا جا سکتا ہے۔ ایسی صورت میں یہ مساوات مکمل کی شکل اختیار کر لے گی یعنی

$$(4.82) \quad W = \frac{1}{2} \int_h \rho_h V dh$$

جہاں مکمل پورے حجم h کے لئے حاصل کیا گیا ہے۔

مثال 4.7 میں کارتیسی محدود استعمال کرتے ہوئے مندرجہ ذیل مساوات کا ثبوت دکھایا گیا ہے۔

$$(4.83) \quad \nabla \cdot (VD) = V(\nabla \cdot D) + D \cdot (\nabla V)$$

مساوات 4.83 اور صفحہ 115 پر مساوات 3.33 کے استعمال سے مساوات 4.82 کو یوں لکھا جاسکتا ہے۔

$$(4.84) \quad \begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \int_h (\nabla \cdot D) V dh \\ &= \frac{1}{2} \int_h [\nabla \cdot (VD) - D \cdot (\nabla V)] dh \end{aligned}$$

اس مساوات میں تکمیل کے دو اجزاء ہیں۔ پہلے جزو کو مسئلہ پھیلاؤ، جسے صفحہ 122 پر مساوات 3.43 دیتا ہے، کی مدد سے بند سطحی تکمیل کی صورت میں یوں لکھا جاسکتا ہے۔

$$(4.85) \quad \frac{1}{2} \int_h \nabla \cdot (VD) dh = \frac{1}{2} \oint_S (VD) \cdot dS$$

یہاں بائیں جانب حجم h جبکہ دائیں جانب اس حجم کی سطح S پر تکمیل حاصل کیا جاتا ہے۔ اس حجم کو ظاہر کرتا ہے جس میں مساوات 4.82 کے تمام بار پائے جاتے ہیں۔ مساوات 4.82 میں حجم کے ایسے حصے بھی ہوں گے جہاں کثافت ρ_h کی قیمت صفر ہوگی۔ ایسے حصوں کا تکمیل $\rho_h = 0$ کی بنا پر صفر کے برابر ہوگا۔ یوں اگر حجم کو لامحدود کر دیا جائے تب بھی تکمیل کی قیمت وہی رہے گی چونکہ ایسی اضافی حجم میں $\rho_h = 0$ ہوگا۔ مساوات 4.85 میں یوں حجم کو لامحدود لیا جاسکتا ہے۔ لامحدود حجم کو گھیرتی سطح کو کرہ شکل کا تصور کرتے ہوئے ایسی سطح $4\pi r^2$ کے برابر ہوگی جہاں $r \rightarrow \infty$ ہوگا۔ لامحدود رداس کی سطح سے دیکھتے ہوئے کسی بھی شکل کا کثافت بار نقطہ مانند بار Q نظر آئے گا جو سطح پر $D = \frac{Q}{4\pi r^2}$ میدان اور $V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$ برقی دباؤ پیدا کرے گا۔ یوں مساوات 4.85 کے دائیں جانب بند تکمیل رداس کے ساتھ $\frac{1}{r}$ کا تعلق رکھتا ہے اور $r \rightarrow \infty$ کی صورت میں ایسا تکمیل صفر کے برابر ہوگا۔ یوں مساوات 4.84 کو

$$W = -\frac{1}{2} \int_h D \cdot (\nabla V) dh$$

یا

$$(4.86) \quad W = \frac{1}{2} \int_h D \cdot E dh = \frac{\epsilon_0}{2} \int_h E^2 dh$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں مساوات 4.46 اور صفحہ 98 پر مساوات 3.3 کی مدد لی گئی ہے۔

مثال 4.7: مساوات 4.83

$$\nabla \cdot (VD) = V(\nabla \cdot D) + D \cdot (\nabla V)$$

کو ثابت کریں۔

حل: مساوات 4.83 کا بائیں بازو حل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (VD) &= \nabla \cdot (V[D_x \mathbf{a}_x + D_y \mathbf{a}_y + D_z \mathbf{a}_z]) \\ &= \nabla \cdot (VD_x \mathbf{a}_x + VD_y \mathbf{a}_y + VD_z \mathbf{a}_z) \\ &= \frac{\partial(VD_x)}{\partial x} + \frac{\partial(VD_y)}{\partial y} + \frac{\partial(VD_z)}{\partial z} \\ &= \frac{\partial V}{\partial x} D_x + V \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} D_y + V \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z} D_z + V \frac{\partial D_z}{\partial z} \end{aligned}$$

ایک جیسے اجزاء کو اکٹھے کرتے ہوئے

$$\nabla \cdot (VD) = V \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) + \frac{\partial V}{\partial x} D_x + \frac{\partial V}{\partial y} D_y + \frac{\partial V}{\partial z} D_z$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اب مساوات 4.83 کا دایاں بازو حل کرتے ہیں جہاں

$$V \nabla \cdot D = V \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right)$$

اور

$$\begin{aligned} D \cdot \nabla V &= (D_x \mathbf{a}_x + D_y \mathbf{a}_y + D_z \mathbf{a}_z) \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{a}_z \right) \\ &= D_x \frac{\partial V}{\partial x} + D_y \frac{\partial V}{\partial y} + D_z \frac{\partial V}{\partial z} \end{aligned}$$

کے برابر ہیں۔ انہیں جمع کرتے ہوئے مساوات 4.83 کا بائیں بازو ہی ملتا ہے۔ یاد رہے کہ $D_x \frac{\partial V}{\partial x}$ کو $\frac{\partial V}{\partial x} D_x$ لکھا جا سکتا ہے۔

مثال 4.8: صفحہ 78 پر مساوات 2.44 دو لامحدود چادروں کے درمیان برقی میدان دیتا ہے جہاں ایک چادر پر ρ_S اور دوسری چادر پر $-\rho_S$ سطحی کثافت بار پایا جاتا ہے۔ اگر ان چادروں کے مابین فاصلہ a ہو تب چادروں پر آنے والے S سطح لیتے ہوئے حجم aS میں کل مخفی توانائی حاصل کریں۔

حل: چادروں کے مابین $E = \frac{\rho_S}{\epsilon_0}$ ہے جو اٹل مقدار ہے لہذا اسے مساوات 4.86 میں تکمیل سے باہر لے جایا جا سکتا ہے۔ یوں

$$(4.87) \quad W = \frac{\epsilon_0 \rho_S^2}{2 \epsilon_0^2} \int_h dh = \frac{\rho_S^2 S a}{2 \epsilon_0}$$

حاصل ہوتا ہے۔ انہیں اسی نتیجے کو مساوات 4.82 کی مدد سے حاصل کریں۔ منفی چادر کو برقی زمین تصور کرتے ہوئے مثبت چادر پر $Ea = \frac{\rho_S a}{\epsilon_0}$ برقی دباؤ ہو گا۔ منفی چادر پر برقی دباؤ چونکہ صفر لیا گیا ہے لہذا مساوات 4.82 کا تکمیل لیتے ہوئے منفی چادر پر تکمیل صفر کے برابر ہو گا۔ اسی طرح دونوں چادروں کے درمیان برقی بار نہیں پایا جاتا لہذا اس حجم پر بھی تکمیل صفر کے برابر ہو گا۔ مثبت چادر پر سطحی کثافت بار کو حجمی کثافت بار میں یوں تبدیل کیا جا سکتا ہے۔ الٹ قطب کے باروں کے مابین قوت کشش پایا جاتا ہے لہذا چادروں پر آپس میں قریبی سطحوں پر بار پایا جائے گا۔ یوں مثبت چادر کے S حصے پر بار $\rho_S S$ کو t موٹائی اور S رقبے کے حجم پر تقسیم کرتے ہوئے $\frac{\rho_S}{t}$ حجمی کثافت بار تصور کیا جا سکتا ہے جہاں t نہایت کم موٹائی ہے یعنی $t \rightarrow 0$ ہے۔ اس بار کو $(a - t/2)$ تا $(a + t/2)$ خطے میں تصور کرتے ہوئے یوں

$$(4.88) \quad W = \frac{1}{2} \int_S \int_{a-t/2}^{a+t/2} \frac{\rho_S}{t} \frac{\rho_S a}{\epsilon_0} dx dS = \frac{\rho_S^2 S a}{2 \epsilon_0}$$

یہ دوبارہ حاصل ہوتا ہے۔

اس باب میں ہم مخفی توانائی کی بات کرتے رہے لیکن کہیں پر بھی یہ ذکر نہیں کیا کہ مخفی توانائی آخر کہاں ذخیرہ ہوتی ہے۔ اس کا جواب آج تک کوئی نہیں بتلا سکا ہے۔ آئیں دیکھیں کہ یہ بتلانا اتنا مشکل کیوں ہے۔

مساوات 4.87 سے ایسا معلوم ہوتا ہے کہ مخفی توانائی دو چادروں کے درمیان برقی میدان میں ذخیرہ ہے البتہ مساوات 4.88 کے حصول کو دیکھتے ہوئے ایسا معلوم ہوتا ہے کہ مخفی چادر اور چادروں کے درمیان صفر توانائی پائی جاتی ہے جبکہ تمام کی تمام مخفی توانائی مثبت چادر پر ہے۔ اسی طرح اگر ہم مثبت چادر کو برقی زمین تصور کرتے تب مخفی چادر پر برقی دباؤ $-Ea$ ہوتا اور مخفی توانائی منفی چادر میں نظر آتی۔ ہم دو چادروں کے بالکل درمیانی نقطے کو برقی زمین لے سکتے ہیں۔ ایسا کرتے ہوئے مثبت چادر پر $\frac{Ea}{2}$ اور منفی چادر پر $-\frac{Ea}{2}$ برقی دباؤ حاصل ہوتی ہے اور مخفی توانائی برابر دونوں چادروں میں نظر آئے گی۔ برقی زمین کو دو چادروں کے درمیان کسی بھی نقطے پر رکھا جاسکتا ہے اور ایسا کرنے سے مثبت اور منفی چادروں میں مخفی توانائی کی تقسیم کے جوابات تبدیل ہوتے رہیں گے۔ اگرچہ ان تمام طریقوں سے کل مخفی توانائی کی صحیح قیمت حاصل ہوتی ہے لیکن ان سے کسی صورت یہ معلوم نہیں کیا جاسکتا ہے کہ مخفی توانائی ذخیرہ کہاں ہوتی ہے۔ اس حقیقت کے ساتھ ہی زندگی بسر کرنا سیکھ لیں۔

سوالات

سوال 4.1: میدان $E = 5a_\rho - 3a_\phi + 2a_z \frac{V}{m}$ میں $1 \mu C$ بار کو نقطہ $N(5, 45^\circ, 4)$ سے نقطہ $M(5, 45^\circ, 6)$ کی جانب نہایت کم فاصلہ $1 \mu m$ منتقل کرنے کے لئے درکار توانائی دریافت کریں۔ اسی طرح $(5, 45.3^\circ, 4)$ ، $(7, 45^\circ, 4)$ اور $(10, 66^\circ, 12)$ کی جانب منتقل کرنے کے لئے درکار توانائی بھی حاصل کریں۔

جوابات: $-2 pJ$ ، $3.013 pJ$ ، $-2.753 pJ$ ، $3.013 pJ$

سوال 4.2: میدان $E = 100a_x - 250a_y + 50a_z \frac{V}{m}$ دیا گیا ہے۔ بار $25 C$ کو نہایت کم فاصلہ $1 mm$ نقطہ $(3, 4, 6)$ سے نقطہ $(5, 10, -2)$ کی سمت میں منتقل کرنے کے لئے کتنی توانائی درکار ہے۔ اسی طرح a_x ، a_y اور $a_x + a_y + 2a_z$ سمت میں منتقل کرنے کے لئے درکار توانائی بھی حاصل کریں۔

جوابات: $-0.2 J$ ، $0.5 J$ ، $0.115 J$

سوال 4.3: میدان $E = 0.2x(\sin 0.1z a_x - 2 \cos 0.15x a_y + 0.02z a_z) \frac{V}{m}$ دیا گیا ہے۔ نقطہ $N(3, 2, 4)$ پر E حاصل کریں۔ اس نقطے سے $(5, 6, -2)$ جانب $12 C$ بار نہایت کم فاصلہ $2.5 \mu m$ منتقل کرنے کے لئے درکار توانائی حاصل کریں۔

جوابات: $17.06 \mu J$ ، $0.177 a_x - 1.081 a_y + 0.048 a_z$

سوال 4.4: میدان $E = (2x^3 + yz^2)a_x - 3z^2a_y + xy^2za_z \frac{V}{m}$ کا لکیری مکمل $\int E \cdot dL$ نقطہ $N(1, 2, 3)$ تا نقطہ $P(6, 1, 2)$ مندرجہ ذیل دو راستوں پر حاصل کریں۔ (الف) پہلے x محدد کے متوازی چلیں، اس کے بعد y محدد کے متوازی چلیں اور آخر میں z محدد کے متوازی چلیں۔ (ب) پہلے نقطہ سے بالکل سیدھا دوسرے نقطے کی طرف چلتے ہوئے مکمل حاصل کریں۔ ایسا مساوات $z = y + 1$ اور مساوات $x = 11 - 5y$ پر بیک وقت چلتے ہوئے ممکن ہو گا۔

جوابات: 749.5 ، 698.9

سوال 4.5: میدان $E = 2xa_x - 3za_y + 2a_z \frac{V}{m}$ میں $5 \mu C$ کا بار نقطہ $(0, 2, -4)$ تا نقطہ $(2, 4, -12)$ منتقل کرنے کے لئے درکار توانائی حاصل کریں۔ (الف) باری باری x ، y اور z محدد کے متوازی چلیں۔ (ب) ابتدائی نقطے سے اختتامی نقطے تک بہ راستہ $z = x^2 - y^2$ ، $y = x + 2$ چلیں۔

جوابات: $-60 \mu\text{J}$ ، $-180 \mu\text{J}$

سوال 4.6: برقی میدان $E = (y+z)a_x + (x+z)a_y + (x+y)a_z$ میں -0.1 C کے بار کو نقطہ $(1, 0, 2)$ سے نقطہ $(0, 0, 2)$ اور یہاں سے نقطہ $(0, 1, 2)$ لایا جاتا ہے۔ دونوں راستوں کی علیحدہ علیحدہ اور کل درکار توانائی حاصل کریں۔

جوابات: 0 J اور -0.2 J ، 0.2 J

سوال 4.7: میدان $E = 2x^2y a_x + y^2 a_y + (x+z)a_z$ میں بار $-2.2 \mu\text{C}$ کو نقطہ $N(2, 1, 1)$ سے $P(4, 3, 1)$ منتقل کرنے کے لئے درکار توانائی دریافت کریں۔ راستہ $z = 1$ ، $6y = x^2 + 2$ اختیار کیا گیا ہے۔

جواب: $191.9 \mu\text{J}$

سوال 4.8: محدود کے مرکز پر Q بار پایا جاتا ہے۔ اس کے میدان میں بار q کو نقطہ N سے P منتقل کرنے کے لئے درکار توانائی حاصل کریں جہاں ان نقطوں کی تفصیل اور راستے کی تفصیل کچھ یوں ہے۔
الف) $N(r_1, \theta_1, \phi_1)$ تا $P(r_2, \theta_1, \phi_1)$ ایسے راستے پر جس پر θ اور ϕ تبدیل نہیں ہوتے۔ (ب)
 $N(r_1, \theta_1, \phi_1)$ تا $P(r_1, \theta_2, \phi_1)$ ایسے راستے پر جس پر r اور ϕ تبدیل نہیں ہوتے۔ (پ)
 $N(r_1, \theta_1, \phi_1)$ تا $P(r_1, \theta_1, \phi_2)$ ایسے راستے پر جس پر r اور θ تبدیل نہیں ہوتے۔

جوابات: 0 ، 0 ، $\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$

سوال 4.9: محدود کے مرکز پر $r = 5 \text{ mm}$ رداس کے کرہ پر سطحی کثافت بار $25 \frac{\text{nC}}{\text{m}^2}$ پایا جاتا ہے۔ نقطہ $A(0.015, 30^\circ, 45^\circ)$ پر حتمی برقی دباؤ V_A اور نقطہ $B(0.035, 60^\circ, 15^\circ)$ پر حتمی برقی دباؤ V_B حاصل کریں۔ نقطہ A کو برقی زمین تصور کرتے ہوئے برقی دباؤ V_{BA} حاصل کریں۔

جوابات: 4.706 V ، 2.017 V ، -2.689 V

سوال 4.10: میدان $E = 50z \sin \phi a_\rho + 50z \cos \phi a_\phi + 50\rho \sin \phi a_z$ میں محدود کے مرکز پر صفر ولٹ تصور کرتے ہوئے نقطہ $N(2, 150^\circ, 3)$ پر برقی دباؤ حاصل کریں۔ ایسا کرتے ہوئے مکمل بہ راستہ $z = \frac{18\phi}{5\pi}$ ، $\rho = \frac{12\phi}{5\pi}$ حاصل کریں۔

جواب: -150 V

سوال 4.11: سطح $x = 0$ پر سطحی کثافت بار $2 \frac{\text{nC}}{\text{m}^2}$ پائی جاتی ہے۔ نقطہ $A(5, 3, -6)$ کو صفر وولٹ لیتے ہوئے نقطہ $N(6, -2, 9)$ پر برقی دباؤ V_{NA} حاصل کریں۔

جواب: 112.94 V

سوال 4.12: کارٹیس y محدود پر لکیری کثافت بار $15 \frac{\text{nC}}{\text{m}}$ پایا جاتا ہے۔ نقطہ $P(5, 2, 6)$ کو صفر وولٹ اور $N(10, 8, 10)$ پر برقی دباؤ حاصل کریں۔ اگر نقطہ $P(5, 2, 6)$ پر 200 V وولٹ کا برقی دباؤ ہوتا تب نقطہ $N(10, 8, 10)$ پر برقی دباؤ کیا ہوتا؟

جواب: 40 V ، -160 V

سوال 4.13: کارٹیس z محدود پر $5 \frac{\text{nC}}{\text{m}}$ اور x محدود پر $-2 \frac{\text{nC}}{\text{m}}$ لکیری کثافت بار پائے جاتے ہیں۔ نقطہ $A(5, 3, 6)$ پر 50 V ہونے کی صورت میں نقطہ $N(8, -2, 5)$ پر برقی دباؤ حاصل کریں۔

جواب: 10.954 V

سوال 4.14: سطح $z = 0$ پر رداس a کی گول ٹکلیا پر سطحی کثافت بار ρ_S پائی جاتی ہے۔ نقطہ $(0, 0, z)$ پر حتمی برقی دباؤ حاصل کریں۔

جواب: $\frac{\rho_S}{2\epsilon_0} (\sqrt{z^2 + a^2} - z)$

سوال 4.15: سطح $z = 0$ پر رداس $a \leq \rho \leq b$ کی گول ٹکلیا پر سطحی کثافت بار ρ_S پائی جاتی ہے۔ نقطہ $(0, 0, z)$ پر حتمی برقی دباؤ حاصل کریں۔

جواب: $\frac{\rho_S}{2\epsilon_0} (\sqrt{z^2 + b^2} - \sqrt{z^2 + a^2})$

سوال 4.16: لکیری کثافت بار $15x \frac{\text{nC}}{\text{m}}$ محدود x کے متوازی $0 \leq x \leq 2$ ، $y = 4$ ، $z = 2$ پر پائی جاتی ہے۔ محدود کے مرکز پر حتمی برقی دباؤ حاصل کریں۔

جواب: 57.54 V

سوال 4.17: ہمیں برقی دباؤ $V(x, y, z) = 3x^2y^2 + 5xz^2 - 10 \ln(x - y)$ معلوم ہے۔ نقطہ $N(5, -3, 8)$ پر V ، E ، D اور ρ_h کی قیمتیں حاصل کریں۔

جوابت: 2254 V ، $-589a_x + 449a_y - 400a_z \frac{\text{V}}{\text{m}}$ ، $-5.21a_x + 3.97a_y - 3.54a_z \frac{\text{nC}}{\text{m}^2}$ ، 1.48 nC/m^3

سوال 4.18: ہمیں $V(\rho, \phi, z) = 10\rho^2 \sin \phi$ معلوم ہے۔ E اور ρ_h کے مساوات حاصل کریں۔

جوابت: $-30\epsilon_0 \sin \phi$ ، $-20\rho \sin \phi a_\rho - 10\rho \cos \phi a_\phi$

سوال 4.19: مکعب $0 < x < 1$ ، $0 < y < 1$ ، $0 < z < 1$ میں $V(x, y, z) = x^3 + y^3 + 3z$ ہے۔ اس مکعب میں کل بار حاصل کریں۔

جواب: -53 pC

سوال 4.20: سطح $2x^2 - 4y^3 + 2z = -100$ ہم قوہ سطح ہے جس پر برقی دباؤ 220 V ہے۔ نقطہ $N(7, 4, 29)$ پر $|E| = 30 \frac{\text{V}}{\text{m}}$ ہونے کی صورت میں اس نقطے پر E کی مساوات حاصل کریں۔

جواب: $4.3a_x - 29.7a_y + 0.31a_z$

سوال 4.21: نقطہ $(0, 0, -10)$ پر $p_1 = 15a_z \text{ nC m}$ اور نقطہ $(0, 0, 5)$ پر $p_2 = -25a_z \text{ nC m}$ جفت قطب پائے جاتے ہیں۔ نقطہ $(0, 0, -5)$ پر V اور E حاصل کریں۔

جوابت: $1.71a_z \frac{\text{V}}{\text{m}}$ ، 7.64 V

سوال 4.22: محور کے مرکز پر $p = 15\epsilon_0 a_z$ جفت قطب پایا جاتا ہے۔ ان سطحوں کی مساوات حاصل کریں جن پر $E_z = 0$ کے برابر ہے۔ صرف $E \neq 0$ کی صورت پر غور کریں۔

جواب: $x^2 + y^2 - 2z^2 = 0$ یعنی ایسی مخروط جس کا $\theta = 54.7^\circ$ یا $\theta = 125.3^\circ$ ہو۔

سوال 4.23: سیدھی لکیر پر تین یکساں بار Q پائے جاتے ہیں۔ قریبی باروں کے درمیان فاصلہ d ہے۔ اس نظام میں کل توانائی دریافت کریں۔ اگر چار عدد بار اسی طرح رکھے جائیں تب توانائی کتنی ہوگی؟

جوابت: $\frac{13}{3} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 d} \text{ J}$ ، $\frac{5}{2} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 d} \text{ J}$

باب 4. توانائی اور برقی دباؤ

سوال 4.24: مثال 4.8 کے طرز پر L لمبائی ہم محوری تار میں مخفی توانائی حاصل کریں۔ اندرونی تار کا رداس a جبکہ بیرونی تار کا رداس b ہے۔

$$\text{جواب: } W = \frac{\pi L a^2 \rho_s^2}{\epsilon_0} \ln \frac{b}{a}$$

سوال 4.25: خطہ $a \leq r \leq b$ میں $V = \frac{0.1}{r^2} V$ برقی دباؤ پایا جاتا ہے جہاں $a < 0$ ، $b < 0$ ہیں۔ اس خطے میں کل مخفی توانائی دریافت کریں۔

$$\text{جواب: } \frac{0.08\pi\epsilon_0}{3} \left(\frac{1}{a^3} - \frac{1}{b^3} \right)$$

باب 5

موصل، ذوبرق اور برق گیر

اس باب میں ہم برقی رو اور کثافت برقی رو سے شروع ہو کر بنیادی استمراری مساوات¹ حاصل کریں گے۔ اس کے بعد اوہم کے قانون کی نقطہ شکل اور اس کی بڑی شکل حاصل کریں گے۔ دو اجسام کے سرحد پر سرحدی شرائط² حاصل کرتے ہوئے عکس³ کے طریقے کا استعمال دیکھیں گے۔

ذوبرق⁴ کی تقطیب⁵ پر غور کرتے ہوئے جزو برقی مستقل حاصل کریں گے۔ اس کے بعد اصطلاحی برق گیر⁶ (کپیسٹر) پر غور کیا جائے گا۔ گزشتہ بابوں میں حاصل کئے گئے نتیجوں کو استعمال کرتے ہوئے سادہ شکل و صورت رکھنے والے برق گیروں (کپیسٹر) کی قیمتیں حاصل کی جائیں گی۔

5.1 برقی رو اور کثافت برقی رو

جیسے پانی کے حرکت کو پانی کا بہاؤ کہتے ہیں، اسی طرح برقی بار کے حرکت کو برقی رو کہتے ہیں۔ برقی رو کو i اور I سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ برقی رو کی اکائی ایمپیر (A) ہے۔ کسی نقطے یا سطح سے ایک کولمب بارنی سینٹڈ کے گزر کو ایک ایمپیر ظاہر کیا جاتا ہے۔

¹ continuity equation
² boundary conditions
³ images
⁴ dielectric
⁵ polarization
⁶ capacitor

کہتے ہیں۔ یوں

$$(5.1) \quad I = \frac{dQ}{dt}$$

لکھا جائے گا۔

ایسی موصل تار جس کی ایک سرے سے دوسری سرے تک موٹائی مسلسل کم ہوتی ہو کے بالکل محور پر برقی بار محوری سمت میں حرکت کرے گا جبکہ محور سے دور بار کی حرکت تار کی موٹائی کم یا زیادہ ہونے کی وجہ سے قدرِ ترجیحی ہو گی۔ یوں اگرچہ تار میں ہر مقام پر برقی رو کی مقدار برابر ہے لیکن برقی رو کی سمتیں مختلف ہو سکتی ہیں۔ اسی بنا پر ہم برقی رو کو مقداری تصور کریں گے۔ اگر تار کی موٹائی انتہائی کم ہو تب برقی رو سمتیہ مانند ہو گا لیکن ایسی صورت میں بھی ہم اسے مقداری ہی تصور کرتے ہوئے تار کی لمبائی کو سمتیہ لیں گے۔

کثافت برقی دو⁷ سے مراد برقی رونی اکائی مربع سطح $\left(\frac{A}{m^2}\right)$ ہے اور اسے J سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ اگر چھوٹی سطح ΔS سے عمودی سمت میں ΔI برقی رو گزرے تب

$$(5.2) \quad \Delta I = J_n \Delta S$$

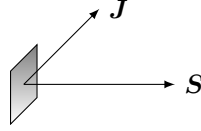
کے برابر ہو گا۔ اگر کثافت برقی رو اور سمتی رقبہ کی سمتیں مختلف ہوں تب

$$(5.3) \quad \Delta I = J \cdot \Delta S$$

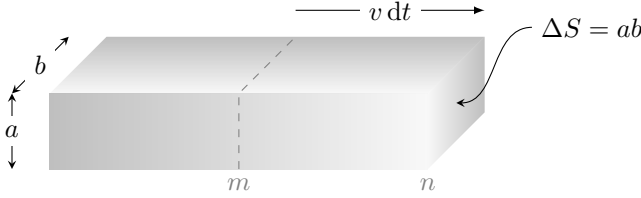
لکھا جائے گا اور پوری سطح سے کل گزرتی برقی رو عمل کے ذریعہ حاصل کی جائے گی۔

$$(5.4) \quad I = \int_S J \cdot dS$$

مثال 5.1: شکل 5.1 میں سیدھی سطح $S = 2a_x$ دکھائی گئی ہے جہاں کثافت برقی رو $J = 1a_x + 1a_y$ پائی جاتی ہے۔ سطح سے گزرتی برقی رو اور اس کی سمت دریافت کریں۔ اگر سطح کی دوسری سمت کو سطح کی سمت لی جائے تب برقی رو کی مقدار اور اس کی سمت کیا ہوں گے۔



شکل 5.1: سطح سے گزرتی برقی رو۔



شکل 5.2: حرکت کرتے ہوئے رفقار اور کثافت برقی رو۔

حل: چونکہ یہاں J مستقل مقدار ہے لہذا اسے مساوات 5.4 میں تکمیل کے باہر لایا جاسکتا ہے اور یوں اس تکمیل سے

$$I = J \cdot S = 2A$$

حاصل ہوتا ہے۔ برقی رو چونکہ مثبت ہے لہذا یہ سطح کی سمت میں ہی سطح سے گزر رہی ہے۔

اگر سطح کی دوسری طرف کو سطح کی سمت لی جائے تب $S = -2a_x$ لکھا جائے گا اور یوں

$$I = J \cdot S = -2A$$

حاصل ہو گا۔ برقی رو کی مقدار اب بھی دو ایمپیئر ہی ہے البتہ اس کی علامت منفی ہے جس کا مطلب یہ ہے کہ برقی رو سطح کے سمت کی الٹی سمت میں ہے۔ یوں اب بھی برقی رو بائیں سے دائیں ہی گزر رہی ہے۔

اس مثال سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ S کی سمت میں برقی رو کو مثبت برقی رو کہا جاتا ہے۔

شکل 5.2 میں a اور b اطراف کی تار میں لمبائی کی سمت میں v رفقار سے بار حرکت کر رہا ہے۔ شکل میں اس تار کا کچھ حصہ دکھایا گیا ہے۔ یوں dt دورانیہ میں بار $v dt$ فاصلہ طے کرے گا۔ اس طرح اس دورانیہ میں m پر لگائی گئی نقطہ دار لکیر n پہنچ جائے گی۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اس دورانیہ میں m اور n کے درمیان موجود بار سطح ΔS سے

گزر جائے گا۔ m سے n تک حجم $abv dt$ کے برابر ہے۔ اگر تار میں بار کی حجمی کثافت ρ_h ہو تب اس حجم میں کل بار $\rho_h abv dt$ ہو گا۔ یوں برقی رو

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{\rho_h abv dt}{dt} = \rho_h \Delta S v$$

لکھتے ہوئے کثافت برقی رو

$$J = \frac{I}{\Delta S} = \rho_h v$$

حاصل ہوتی ہے جس کی سمتی شکل

$$(5.5) \quad \mathbf{J} = \rho_h \mathbf{v}$$

ہے۔ اس مساوات میں J کثافت اتصالی رو⁸ کو ظاہر کرتی ہے۔

یہ مساوات کہتا ہے کہ حجمی کثافتِ بار بڑھانے سے کثافت برقی رو اسی نسبت سے بڑھتی ہے۔ اسی طرح بار کی رفتار بڑھانے سے کثافت برقی رو اسی نسبت سے بڑھتی ہے۔ یہ ایک عمومی نتیجہ ہے۔ یوں سڑک پر زیادہ لوگ گزارنے کا ایک طریقہ انہیں تیز چلنے پر مجبور کرنے سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ دوسرا طریقہ یہ ہے کہ انہیں قریب قریب کر دیا جائے۔

5.2 استمراری مساوات

قانون بقائے برقی بار کہتا ہے کہ برقی بار کو نہ تو پیدا اور نہ ہی اسے ختم کیا جاسکتا ہے، اگرچہ برابر مقدار میں مثبت اور منفی برقی بار کو ملا کر انہیں ختم کیا جاسکتا ہے اور اسی طرح برابر مقدار میں انہیں پیدا بھی کیا جاسکتا ہے۔

یوں اگر ڈبے میں ایک جانب 5C اور دوسری جانب 3C- بار موجود ہو تو اس ڈبے میں کل 2C بار ہے۔ اگر ہم 3C کو 3C- کے ساتھ ملا کر ختم کر دیں تب بھی ڈبے میں کل 2C ہی بار رہے گا۔

convection current density⁸

مثال 5.2: ایک ڈبہ جس کا حجم 5 m^3 ہے میں حجمی کثافت بار 3 C/m^3 ہے۔ اس ڈبے سے بار کی نکاسی ہو رہی ہے۔ دو سیکنڈ میں حجمی کثافت بار 1 C/m^3 رہ جاتی ہے۔ ان دو سیکنڈوں میں ڈبے سے خارج برقی رو کا تخمینہ لگائیں۔

حل: شروع میں ڈبے میں $Q_1 = 3 \times 5 = 15 \text{ C}$ بار ہے جبکہ دو سیکنڈ بعد اس میں $Q_2 = 1 \times 5 = 5 \text{ C}$ بار رہ جاتا ہے۔ یوں دو سیکنڈ میں ڈبے سے 10 C بار خارج ہوتا ہے۔ اس طرح ڈبے سے خارج برقی رو $\frac{10}{2} = 5 \text{ A}$ ہے۔ اسی کو یوں لکھا جاسکتا ہے۔

$$I = -\frac{\Delta Q}{\Delta t} = -\frac{(5 - 15)}{2} = 5 \text{ A}$$

اس مثال میں آپ نے دیکھا کہ ڈبے میں ΔQ منفی ہونے کی صورت میں خارجی برقی رو کی قیمت مثبت ہوتی ہے۔ آئیں اس حقیقت کو بہتر شکل دیں۔

حجم کو مکمل طور پر گھیرتی سطح کو بند سطح کہتے ہیں۔ کسی بھی مقام پر ایسی سطح کی سمت سطح کے عمودی باہر کو ہوتی ہے۔ مساوات 5.4 کے تحت برقی رو کو کثافت برقی رو کے سطحی مکمل سے بھی حاصل کیا جاسکتا ہے۔ یوں

$$(5.6) \quad I = \oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{dQ}{dt}$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں حجم کی سطح بند سطح ہونے کی بنا پر بند مکمل کی علامت استعمال کی گئی ہے اور Q حجم میں کل بار ہے۔

مساوات 5.6 استمراری مساوات⁹ کی مکمل شکل ہے۔ آئیں اب اس کی نقطہ شکل حاصل کریں۔

مسئلہ پھیلاؤ کو صفحہ 122 پر مساوات 3.43 میں بیان کیا گیا ہے۔ مسئلہ پھیلاؤ کسی بھی سمتی تفاعل کے لئے درست ہے لہذا اسے استعمال کرتے ہوئے مساوات 5.6 میں بند سطحی مکمل کو حجمی مکمل میں تبدیل کرتے ہیں۔

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \int_h (\nabla \cdot \mathbf{J}) dh$$

اگر حجم میں حجمی کثافت بار ρ_h ہو تب اس میں کل بار

$$Q = \int_h \rho_h dh$$

ہو گا۔ ان دو نتائج کو استعمال کرتے ہوئے

$$\int_h (\nabla \cdot \mathbf{J}) dh = -\frac{d}{dt} \int_h \rho_h dh$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس مساوات میں $\frac{d}{dt}$ دو متغیرات پر لاگو ہو گا۔ یہ متغیرات مکمل کے اندر حجمی کثافت بار ρ_h اور حجم h ہے۔

آپ جانتے ہیں کہ دو متغیرات کے تفرق کو جزوی تفرق کی شکل میں

$$\frac{d(uv)}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} v + u \frac{\partial v}{\partial t}$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں v کو مستقل رکھتے ہوئے $\frac{\partial u}{\partial t}$ اور u کو مستقل رکھتے ہوئے $\frac{\partial v}{\partial t}$ حاصل کیا جاتا ہے۔

اگر ہم یہ شرط لاگو کریں کہ حجم کی سطح تبدیل نہیں ہوگی تب حجم بھی تبدیل نہیں ہوگا اور یوں $\frac{d}{dt}$ کو جزوی تفرق میں تبدیل کرتے ہوئے مکمل کے اندر لکھتے ہوئے

$$\int_h (\nabla \cdot \mathbf{J}) dh = \int_h -\frac{\partial \rho_h}{\partial t} dh$$

حاصل ہوتا ہے۔ یہ مساوات ہر ممکنہ حجم کے لئے درست ہے لہذا یہ نہایت چھوٹی حجم کے لئے بھی درست ہے۔ نہایت چھوٹی حجم dh کے لئے مکمل

$$(\nabla \cdot \mathbf{J}) dh = -\frac{\partial \rho_h}{\partial t} dh$$

ہی ہے جس سے

$$(5.7) \quad \nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho_h}{\partial t}$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 5.7 استمراری مساوات کی نقطہ شکل ہے۔

پھیلاؤ کی تعریف کو ذہن میں رکھتے ہوئے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مساوات 5.7 کہتا ہے کہ ہر نقطے پر چھوٹی سی حجم سے فی سینڈ بار کا اخراج، یعنی برقی رو، فی اکائی حجم مساوی ہے بار کے گھٹاؤنی سینڈ فی اکائی حجم۔

5.3 موصل

بے بار موصل میں منفی الیکٹران اور مثبت ساکن ایٹموں کی تعداد برابر ہوتی ہے البتہ اس میں برقی رو آزاد الیکٹران کے حرکت سے پیدا ہوتا ہے۔ موصل میں الیکٹران آزادی سے بے ترتیب حرکت کرتا رہتا ہے۔ یہ حرکت کرتا ہوا لمحہ بہ لمحہ ساکن ایٹم سے ٹکراتا ہے اور ہر ٹکر سے اس کے حرکت کی سمت تبدیل ہو جاتی ہے۔ یوں ایسے الیکٹران کی اوسط رفتار صفر کے برابر ہوتی ہے۔ آئیں دیکھیں کہ برقی میدان کے موجودگی میں کیا ہوتا ہے۔

برقی میدان E میں الیکٹران پر قوت

$$(5.8) \quad F = -eE$$

عمل کرے گی جہاں الیکٹران کا بار e ہے۔ الیکٹران کی رفتار اس قوت کی وجہ سے اسراع کے ساتھ قوت کی سمت میں بڑھنے شروع ہو جائے گی۔ یوں بلا ترتیب رفتار کے ساتھ ساتھ قوت کے سمت میں الیکٹران رفتار پڑے گا۔ موصل میں پائے جانے والا الیکٹران جلد کسی ایٹم سے ٹکرا جاتا ہے اور یوں اس کی سمت تبدیل ہو جاتی ہے۔ جس لمحہ الیکٹران کسی ایٹم سے ٹکراتا ہے اگر لاگو میدان کو صفر کر دیا جائے تو الیکٹران دوبارہ بلا ترتیب حرکت کرتا رہے گا اور اس کی اوسط رفتار دوبارہ صفر ہی ہوگی، البتہ اس کی رفتار اب پہلے سے زیادہ ہوگی۔ اگر الیکٹران ایٹم سے نہ ٹکراتا تب برقی میدان صفر کرنے کے بعد یہ برقرار قوت کی سمت میں حاصل کردہ رفتار سے حرکت کرتا رہتا۔ یوں آپ دیکھ سکتے ہیں کہ ہر ٹکر سے الیکٹران کی اوسط رفتار صفر ہو جاتی ہے۔ اس طرح ہم دیکھتے ہیں کہ E کے موجودگی میں موصل میں الیکٹران کی رفتار مسلسل نہیں بڑھتی بلکہ یہ قوت کی سمت میں اوسط رفتار v_d حاصل کرتا ہے اور جیسے ہی میدان صفر کر دیا جائے الیکٹران کی اوسط رفتار بھی صفر ہو جاتی ہے۔ v_d کو رفتار بہا¹⁰ کہتے ہیں۔ رفتار بہا کا دارومدار E کی قیمت پر ہے لہذا ہم

$$(5.9) \quad v_d = -\mu_e E$$

لکھ سکتے ہیں جہاں مساوات کے مستقل μ_e کو الیکٹران کی حرکت پذیری¹¹ کہتے ہیں۔ حرکت پذیری کی مقدار مثبت ہے۔ چونکہ v_d کو میٹر فی سیکنڈ اور E کو ولٹ فی میٹر میں ناپا جاتا ہے لہذا حرکت پذیری کو $\frac{m^2}{Vs}$ میں ناپا جائے گا۔

مساوات 5.9 کو صفحہ 178 پر دئے مساوات 5.5 میں پر کرتے ہوئے

$$(5.10) \quad J = -\rho_e \mu_e E$$

drift velocity¹⁰
mobility¹¹

حاصل ہوتا ہے جہاں موصل میں آزاد الیکٹران کی حتمی کثافت بار کو ρ_e لکھا گیا ہے۔ ρ_e منفی مقدار ہے۔ یاد رہے کہ بے بار موصل میں حتمی کثافت بار صفر کے برابر ہے چونکہ اس میں منفی الیکٹران اور مثبت ایٹم کے بار برابر ہوتے ہیں۔ اس مساوات کو عموماً

$$(5.11) \quad J = \sigma E$$

لکھا جاتا ہے جو اوہم کے قانون کی نقطہ شکل ہے اور جہاں

$$(5.12) \quad \sigma = -\rho_e \mu_e$$

لکھا گیا ہے۔ مساوات 5.11 میں J کو کثافت ایصالی برقی رو یا 12 ہے جبکہ σ کو موصلیت کا مستقل 13 کہتے ہیں اور اس کی اکائی 14 سینمز فی میٹر $\frac{S}{m}$ ہے۔ سینمز کو بڑے S سے جبکہ سینڈ کو چھوٹے s سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ آپ ان میں غلطی نہیں کریں گے۔ اس کتاب کے آخر میں صفحہ 831 پر دیے ضمیمے میں کئی موصل اور غیر موصل اشیاء کی موصلیت پیش کی گئی ہیں۔

مثال 5.3: تانبے 15 کی موصلیت کے مستقل کی قیمت $5.8 \times 10^7 \frac{S}{m}$ ہے جبکہ اس کی کمیتی کثافت 8940 kg/m^3 اور ایٹمی کمیت 63.5 g ہیں۔ اگر ہر ایٹم ایک عدد الیکٹران آزاد کرتا ہو تب تانبے میں الیکٹران کی حرکت پذیری حاصل کریں۔ برقی میدان $E = 0.1 \frac{V}{m}$ کی صورت میں الیکٹران کا رفتار بہا حاصل کریں۔

حل: ایٹمی کمیت 6.023×10^{23} یعنی ایک مول 16 ایٹم کی کمیت کو کہتے ہیں۔ چونکہ ایک مربع میٹر میں 8940 kg ہیں لہذا ایک مربع میٹر میں

$$\frac{8940 \times 6.023 \times 10^{23}}{0.0635} = 8.48 \times 10^{28}$$

ایٹم پائیں جائیں گے۔ ہر ایٹم ایک الیکٹران آزاد کرتا ہے لہذا 0.1 nm اطراف کے مربع میں اوسطاً 0.848 یعنی تقریباً ایک عدد آزاد الیکٹران پایا جائے گا۔ اس طرح ایک مربع میٹر میں کل آزاد الیکٹران بار یعنی حتمی آزاد کثافت بار

$$(5.13) \quad \rho_e = -1.6 \times 10^{-19} \times 8.48 \times 10^{28} = -1.36 \times 10^{10} \text{ C/m}^3$$

conduction current density¹²

conductivity¹³

¹⁴ یہ اکائی جرمنی کے جناب ارنست ورنر ان سینمز (1816-1892) کے نام ہے جنہوں نے موجودہ سینمز ادارے کی بنیاد رکھی۔

copper¹⁵

mole¹⁶

ہوگی۔ ایک مربع میٹر میں یوں انتہائی زیادہ آزاد بار پایا جاتا ہے۔ اس طرح مساوات 5.12 کی مدد سے

$$\mu_e = -\frac{\sigma}{\rho_e} = \frac{5.8 \times 10^7}{-1.36 \times 10^{10}} = 0.00427 \frac{\text{m}^2}{\text{V s}}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں $0.00427 \frac{\text{m}^2}{\text{V s}}$ کو $0.00427 \frac{\text{m}^2}{\text{V s}}$ لکھا گیا ہے۔ آپ تسلی کر سکتے ہیں کہ یہ برابر مقدار ہیں۔ اب مساوات 5.9 استعمال کرتے ہوئے الیکٹران کی رفتار بہاؤ

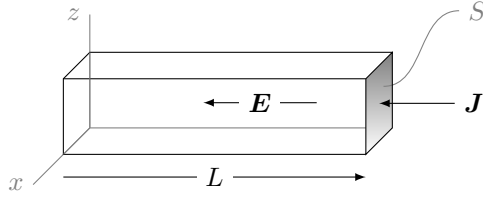
$$v_d = -0.00427 \times 0.1 = -0.000427 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

حاصل ہوتی ہے۔ منفی رفتار کا مطلب ہے کہ الیکٹران E کے الٹ سمت حرکت کر رہا ہے۔ اس رفتار 17 سے الیکٹران ایک کلو میٹر کا فاصلہ ستائیس دن و رات چل کر طے کرے گا۔ یہاں یہ بتلاتا چلوں کہ عام درجہ حرارت مثلاً 300 K پر تانبے میں حرارتی توانائی سے حرکت کرتے الیکٹران کی رفتار تقریباً $1000 \frac{\text{km}}{\text{s}}$ ہوتی ہے۔

یوں موصل میں آزاد الیکٹرانوں کو نئی جگہ منتقل ہوتے شہد کے مکھیوں کا جھنڈ سمجھا جا سکتا ہے۔ ایسے جھنڈ میں کوئی ایک مکھی نہایت تیز رفتار سے آگے پیچھے اڑتی ہے جبکہ پورا جھنڈ نسبتاً آہستہ رفتار سے ایک سمت میں حرکت کرتا ہے۔ موصل میں بھی کوئی ایک الیکٹران نہایت تیز رفتار سے ایٹموں سے ٹکراتا ہوا حرارتی توانائی کی وجہ سے نہایت تیزی سے ادھر ادھر حرکت کرتا ہے جبکہ بیرونی لاگو میدان کی وجہ سے ایسے تمام الیکٹران نہایت آہستہ رفتار سے میدان کی سمت میں حرکت کرتے ہیں۔

اگر موصل میں آزاد الیکٹران اتنے کم رفتار سے بیرونی لاگو میدان کی سمت میں صفر کرتے ہیں تب بجلی چالو کرتے ہی بلب کس طرح روشن ہوتا ہے۔ اس کو سمجھنے کی خاطر برقی تار کو پانی بھرے ایک لمبے پائپ سمجھیں۔ ایسے پائپ میں جیسے ہی ایک جانب سے مزید پانی داخل کیا جائے، اسی وقت پائپ کے دوسرے سرے سے برابر پانی خارج ہو گا۔ امید ہی سمجھ آگئی ہوگی۔

مندرجہ بالا مثال میں بتلایا گیا کہ تانبے کا ہر ایٹم ایک عدد الیکٹران آزاد کرتا ہے۔ اس حقیقت کو یوں سمجھا جا سکتا ہے کہ تانبے کا ایٹمی عدد 29 ہے۔ ایٹم کے کسی بھی مدار میں $2n^2$ الیکٹران ہو سکتے ہیں جہاں پہلے مدار کے لئے $n = 1$ ، دوسرے مدار کے لئے $n = 2$ وغیرہ لیا جاتا ہے۔ یوں اس کے پہلے مدار میں 2، دوسرے مدار میں 8، تیسرے مدار



شکل 5.3: اوہم کے قانون کی بڑی شکل۔

میں 18 اور آخری مدار 18¹⁸ میں 1 الیکٹران ہو گا۔ ایٹم آخری مدار میں واحد الیکٹران کو آزاد کرتا ہے۔ آئیں اب بڑی شکل میں اوہم کا قانون حاصل کریں۔

شکل 5.3 میں موصل سلاخ دکھایا گیا ہے جس کی لمبائی L اور رقبہ عمودی تراش S ہیں۔ سلاخ کو a_y سمت میں لیٹا تصور کریں۔ سلاخ میں لمبائی کی سمت میں مستقل اور یکساں برقی میدان $E = -Ea_y$ اور کثافت برقی رو $J = -Ja_y$ پائے جاتے ہیں۔ یوں اگر سلاخ کا بائیں سرا برقی زمین تصور کیا جائے تب اس کے دائیں سرے پر برقی دباؤ کو صفحہ 138 پر دئے مساوات 4.11 سے یوں

$$V = - \int_0^L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = \int_0^L E a_y \cdot dy a_y = \int_0^L E dy = E \int_0^L dy = EL$$

حاصل کرتے ہیں۔ رقبہ عمودی تراش کو شکل میں گہرے رنگ سے اجاگر کیا گیا ہے۔ سمتی رقبہ عمودی تراش بند سطح نہیں ہے لہذا اس کے دو ممکنہ رخ ہیں۔ سلاخ کے دائیں سرے سے داخل برقی رو حاصل کرنے کی غرض سے رقبہ عمودی تراش کو $S = -Sa_y$ لکھتے ہیں۔ یوں دائیں سرے سے داخل برقی رو کی مقدار مثبت ہوگی۔ برقی رو

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = JS$$

حاصل ہوتی ہے۔ ان معلومات کو شکل 5.11 میں پُر کرتے ہوئے

$$\frac{I}{S} = \sigma \frac{V}{L}$$

یا

$$V = I \frac{L}{\sigma S}$$

¹⁷ کھودا پہاڑ، نکلا چوہا۔ آزاد الیکٹران تو پھوسے سے بھی آہستہ چلتا ہے۔

¹⁸ چوتھے مدار میں 32 الیکٹران ممکن ہیں لیکن تانے کے ایٹم میں اس مدار کے لئے صرف ایک مدار الیکٹران بچتا ہے۔

حاصل ہوتا ہے جہاں

$$(5.14) \quad R = \frac{L}{\sigma S}$$

کو مزاحمت لکھتے ہوئے

$$(5.15) \quad V = IR$$

حاصل ہوتا ہے جو اوہم کے قانون کی جانی پہچانی شکل ہے۔

مساوات 5.14 یکساں رقبہ عمودی تراش رکھنے والے موصل سلاخ کی مزاحمت¹⁹ دیتا ہے جہاں مزاحمت کی اکائی اوہم²⁰ ہے جسے Ω سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ یکساں رقبہ عمودی تراش کے سلاخ میں برقی میدان یکساں ہوتا ہے۔ اگر سلاخ کا رقبہ عمودی تراش یکساں نہ ہو تب اس میں برقی میدان بھی یکساں نہ ہو گا اور ایسی صورت میں مساوات 5.14 استعمال نہیں کیا جا سکتا البتہ ایسی صورت میں بھی مزاحمت کو مساوات 5.15 کی مدد سے برقی دباؤ فی اکائی برقی رو سے بیان کیا جاتا ہے۔ یوں مساوات 4.11 اور مساوات 5.4 استعمال کرتے ہوئے سلاخ کے b سے a سرے تک مزاحمت

$$(5.16) \quad R = \frac{V}{I} = \frac{-\int_b^a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}}{\int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}} = \frac{-\int_b^a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}}{\int_S \sigma \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}}$$

سے حاصل ہو گی جہاں برقی رو سلاخ کے مثبت برقی دباؤ والے سرے سے سلاخ میں داخل ہوتے برقی رو کو کہتے ہیں۔ یوں مندرجہ بالا مساوات میں سطحی کھلم سلاخ کے مثبت سرے پر حاصل کیا جائے گا جہاں سطح عمودی تراش کی سمت سلاخ کی جانب لی جائے گی۔

مثال 5.4: تانبے کی ایک کلو میٹر لمبی اور تین ملی میٹر رداس کے تار کی مزاحمت حاصل کریں۔

حل: یہاں $L = 1000 \text{ m}$ جبکہ $S = \pi r^2 = 2.83 \times 10^{-7} \text{ m}^2$ اور $\sigma = 5.8 \times 10^7$ ہے لہذا

$$R = \frac{1000}{5.8 \times 10^7 \times 2.83 \times 10^{-7}} = 0.61 \Omega$$

resistance¹⁹
ohm²⁰

حاصل ہوتا ہے۔

مشق 5.1: المونیم میں کثافت برقی رو مندرجہ ذیل صورتوں میں حاصل کریں۔ (الف) برقی میدان کی شدت $50 \frac{mV}{m}$ ہے۔ (ب) آزاد الیکٹران کی رفتار بہاؤ $0.12 \frac{mm}{s}$ ہے۔ (پ) ایک ملی میٹر موٹی تار جس میں $2 A$ برقی رو گزر رہی ہے۔

جوابات: $1.91 \frac{MA}{m^2}$ ، $3.82 \frac{MA}{m^2}$ اور $2.55 \frac{MA}{m^2}$

ہم دیکھ چکے ہیں کہ موصل کے اندر داخل کیا گیا بار جلد موصل کے سطح پر پہنچ کر سطحی کثافتِ بار پیدا کرتا ہے۔ یہ جانتے ہوئے کہ حقیقت میں موصل کے اندر بار کا پیدا ہونا یا وہاں بار داخل کرنا معمول کی بات ہرگز نہیں، ہم ایسے داخل کئے گئے بار کی حرکت پر غور کرتے ہیں۔

اوہم کے قانون

$$J = \sigma E$$

اور استمراری مساوات

$$\nabla \cdot J = -\frac{\partial \rho_h}{\partial t}$$

دونوں میں صرف آزاد بار کی بات کی جاتی ہے۔ ان مساوات سے

$$\nabla \cdot \sigma E = -\frac{\partial \rho_h}{\partial t}$$

یا

$$\nabla \cdot \frac{\sigma}{\epsilon} D = -\frac{\partial \rho_h}{\partial t}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اگر موصل میں σ اور ϵ کی قیمتیں اٹل ہوں تب اس مساوات کو

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = -\frac{\epsilon}{\sigma} \frac{\partial \rho_h}{\partial t}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ صفحہ 115 پر مساوات 3.33 جو میکس ویل کی پہلی مساوات ہے کی مدد سے یوں

$$\rho_h = -\frac{\epsilon}{\sigma} \frac{\partial \rho_h}{\partial t}$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 5.12 کہتا ہے کہ موصلیت کی قیمت آزاد الیکٹران کی حجمی کثافت ρ_e اور الیکٹران کی حرکت پذیری پر منحصر ہے۔ مساوات 5.13 تانبے میں $\rho_e = -1.36 \times 10^{10} \text{ C/m}^3$ دیتا ہے جو انتہائی بڑی مقدار ہے۔ اتنے بار میں بیرونی داخل بار نمک برابر بھی حیثیت نہیں رکھتا لہذا σ کی قیمت کو اٹل تصور کیا جاسکتا ہے۔ یوں مندرجہ بالا مساوات کو نئی شکل

$$\frac{\partial \rho_h}{\rho_h} = -\frac{\sigma}{\epsilon} dt$$

میں لکھتے ہوئے، اس کا تکمل

$$\rho_h = \rho_0 e^{-\frac{\sigma}{\epsilon} t}$$

حاصل کرتے ہیں جہاں وقت $t = 0$ پر داخل کئے گئے بار کا حجمی کثافت ρ_0 ہے۔ اس مساوات کے تحت حجمی کثافت ρ_h بار $\frac{\sigma}{\epsilon}$ وقتی مستقل²¹ رکھتا ہے۔ تقطیر شدہ پانی کا وقتی مستقل صفحہ 831 پر دیے ضمیمے کی مدد سے

$$\frac{\epsilon}{\sigma} = \frac{80}{36\pi \times 10^9 \times 10^{-4}} = 7.07 \mu\text{s}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اگرچہ تقطیر شدہ پانی انتہائی کم موصل ہے لیکن اس میں بھی کثافت بار صرف سات مائیکرو سیکنڈ میں ابتدائی قیمت کے صرف 37 فی صد رہ جاتا ہے۔ یوں کسی بھی موصل کے اندر انتہائی کم دورانیے کے لئے اضافی بار پایا جاسکتا ہے۔ اس لمبائی کثافت بار کے علاوہ اندرون موصل کو بار سے پاک تصور کیا جاسکتا ہے۔

ذو برق میں مختلف وجوہات کی بنا پر لگاتار آزاد بار پیدا ہوتے رہتے ہیں جس کی بنا پر ذو برق صفر سے زیادہ موصلیت رکھتے ہوئے برقی رو گزارتا ہے۔ ذو برق کے اندر بار بھی آخر کار سطح پر پہنچ جاتا ہے۔

²¹time constant

5.4 موصل کے خصوصیات اور سرحدی شرائط

بے بار موصل میں کل آزاد الیکٹران اور مثبت ایٹم برابر تعداد میں پائے جاتے ہیں۔ یوں اس میں برقی میدان صفر کے برابر ہوتا ہے۔ فرض کریں کہ بے بار موصل کے اندر کسی طرح چند الیکٹران نمودار ہو جاتے ہیں۔ یہ الیکٹران برقی میدان E پیدا کریں گے جس کی وجہ سے موصل میں آزاد الیکٹران موصل کے سطح کی جانب چل پڑیں گے۔ سطح کے باہر غیر موصل خلاء پائی جاتی ہے جس میں الیکٹران حرکت نہیں کر سکتے لہذا الیکٹران موصل کے سطح پر پہنچ کر رک جائیں گے۔ موصل میں نمودار ہونے والے الیکٹران کے برابر تعداد میں الیکٹران موصل کے سطح پر منتقل ہوں گے جس کے بعد موصل میں دوبارہ منفی الیکٹران اور مثبت ایٹموں کی تعداد برابر ہو جائے گی اور یہ بے بار صورت اختیار کر لے گا۔

آپ نے دیکھا کہ اضافی بار موصل میں زیادہ دیر نہیں رہ سکتا اور یہ جلد سطح پر منتقل ہو جاتا ہے۔ یوں اضافی بار موصل کے سطح پر بیرونی جانب چمٹا رہتا ہے۔ یہ موصل کی پہلی اہم خاصیت ہے۔

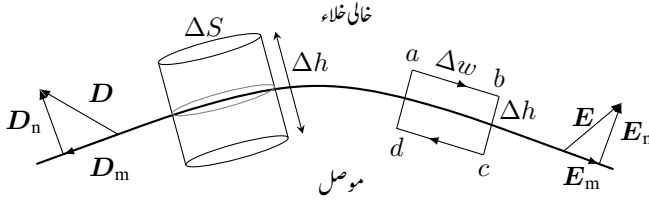
موصل کی دوسری خاصیت برقی سکون²² کی حالت کے لئے بیان کرتے ہیں۔ برقی سکون سے مراد ایسی صورت ہے جب بار حرکت نہ کر رہا ہو یعنی جب برقی رو صفر کے برابر ہو۔ برقی سکون کی حالت میں موصل کے اندر ساکن برقی میدان صفر رہتا ہے۔ اگر ایسا نہ ہوتا تو میدان کی وجہ سے اس میں آزاد الیکٹران حرکت کر کے برقی رو کو جنم دیتے جو غیر ساکن حالت ہے۔

یوں برقی سکون کی حالت میں موصل کے اندر اضافی بار اور برقی میدان دونوں صفر کے برابر ہوتے ہیں البتہ اس کے سطح پر بیرونی جانب بار پایا جاسکتا ہے۔ انہیں دیکھیں کہ سطح پر پائے جانے والا بار موصل کے باہر کس قسم کا برقی میدان پیدا کرتا ہے۔

موصل کے سطح پر بار، موصل کے باہر برقی میدان پیدا کرتا ہے۔ سطح پر کسی بھی نقطے پر ایسے میدان کو دو اجزاء کے مجموعے کی شکل میں لکھا جاسکتا ہے۔ پہلا جزو سطح کے مماسی اور دوسرا جزو سطح کے عمودی رکھتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ مماسی جزو صفر ہو گا۔ اگر ایسا نہ ہو تو اس میدان کی وجہ سے سطح پر پائے جانے والے آزاد الیکٹران حرکت میں آئیں گے جو غیر ساکن حالت ہو گی۔ یوں ہم

(5.17)

$$E_{\text{مماسی}} = 0$$



شکل 5.4: موصل اور خلاء کے سرحد پر برقی شرائط۔

لکھ سکتے ہیں۔ سطح پر عمودی برقی میدان گاوس کے قانون کی مدد سے حاصل کیا جاسکتا ہے جو کہتا ہے کہ کسی بھی بند سطح سے کل برقی بہاؤ کا اخراج، سطح میں گھیرے بار کے برابر ہوتا ہے۔ چونکہ سطح پر مماسی برقی میدان صفر ہے اور موصل کے اندر بھی برقی میدان صفر ہے لہذا سطح پر بار سے برقی بہاؤ کا اخراج صرف عمودی سمت میں ہو سکتا ہے۔ یوں ΔS سطح سے عمودی اخراج $D\Delta S$ اسی سطح پر چار $\rho_S\Delta S$ کے برابر ہو گا جس سے

$$(5.18) \quad D_{\text{عمودی}} = \rho_S$$

حاصل ہوتا ہے۔ انہیں اسی بحث کو بہتر جامہ پہنائیں۔ ایسا کرتے ہوئے ہم ایک عمومی ترکیب سیکھ لیں گے جو مختلف اقسام کے اشیاء کے سرحد پر میدان کے حصول کے لئے استعمال کیا جاتا ہے۔

شکل 5.4 میں موصل اور خالی خلاء کے درمیان سرحد موٹی لکیر سے دکھایا گیا ہے۔ اس سرحد پر خلاء میں E اور D دکھائے گئے ہیں۔ خلاء میں E کو E_m اور E_n کے مجموعے کے طور پر بھی دکھایا گیا ہے جو بالترتیب سرحد کے مماسی اور عمودی اجزاء ہیں۔ اسی طرح D کو بھی مماسی اور عمودی اجزاء کے مجموعے کے طور پر دکھایا گیا ہے۔ ہم صرف اس حقیقت کو لے کر آگے بڑھتے ہیں کہ موصل کے اندر E اور D دونوں صفر کے برابر ہیں۔ انہیں اس حقیقت کی بنا پر خلاء میں E کی قیمت حاصل کریں۔ ہم E کے مجموعے E_m اور E_n حاصل کریں گے۔ پہلے E_m حاصل کرتے ہیں۔

سرحد پر مستطیل بنایا گیا ہے جہاں ab اور cd سرحد کے مماسی جبکہ da اور bc سرحد کے عمودی ہیں۔ ab خالی خلاء میں سرحد سے $\Delta h/2$ فاصلے پر جبکہ cd موصل میں سرحد سے $\Delta h/2$ فاصلے پر ہیں۔ ab اور cd کی لمبائیاں Δw ہیں جبکہ da اور bc کی لمبائیاں Δh ہے۔ صفحہ 147 پر دئے مساوات 4.28

$$\oint E \cdot dL = 0$$

کو $abcd$ پر لاگو کرتے ہیں۔ اس کھلم کو چار ٹکڑوں کا مجموعہ لکھا جاسکتا ہے۔

$$\oint E \cdot dL = \int_a^b E \cdot dL + \int_b^c E \cdot dL + \int_c^d E \cdot dL + \int_d^a E \cdot dL = 0$$

اب a سے b تک

$$\int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = E_m \Delta w$$

حاصل ہوتا ہے۔ خلاء میں نقطہ b پر عمودی میدان کو $E_{n,b}$ لکھتے ہوئے b سے c تک

$$\int_b^c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = -E_{n,b} \frac{\Delta h}{2}$$

حاصل ہوتا ہے۔ یاد رہے کہ bc کی آدھی لمبائی موصل کے اندر ہے جہاں $\mathbf{E} = 0$ ہے۔ c سے d تک مکمل صفر کے برابر ہے چونکہ یہ راستہ موصل کے اندر ہے جہاں $\mathbf{E} = 0$ ہے۔

$$\int_c^d \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = 0$$

خلاء میں نقطہ a پر عمودی میدان کو $E_{n,a}$ لکھتے ہوئے d سے a تک

$$\int_d^a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = E_{n,a} \frac{\Delta h}{2}$$

ان چار نتائج سے

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = E_m \Delta w + (E_{n,a} - E_{n,b}) \frac{\Delta h}{2} = 0$$

لکھا جاسکتا ہے۔ سرحد کے قریب میدان حاصل کرنے کی خاطر ہمیں سرحد کے قریب تر ہونا ہو گا یعنی Δh کو تقریباً صفر کے برابر کرنا ہو گا۔ ایسا کرنے سے $(E_{n,a} - E_{n,b}) \frac{\Delta h}{2}$ کو نظر انداز کیا جاسکتا ہے۔ ہم Δw کو اتنا چھوٹا لیتے ہیں کہ اس کی پوری لمبائی پر میدان کو یکساں تصور کرنا ممکن ہو۔ ایسا کرتے ہوئے اس مساوات سے

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = E_m \Delta w = 0$$

یعنی

$$(5.19) \quad E_m = 0$$

حاصل ہوتا ہے۔ آئیں اب E_n حاصل کریں۔ بجائے گاوس کے قانون

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q$$

کی مدد سے D_n کا حصول زیادہ آسان ثابت ہوتا ہے لہذا ہم اسی کو حاصل کرتے ہیں۔

شکل 5.4 میں موصل اور خالی خلاء کے سرحد پر Δh لمبائی کا بیلن دکھایا گیا ہے۔ اس بیلن کے ڈھکنوں کا رقبہ ΔS ہے۔ اگر سرحد پر ρ_S پایا جائے تب بیلن $\rho_S \Delta S$ بار کو گھیرے گا۔ گاوس کے قانون کے تحت بیلن سے اسی مقدار کے برابر برقی بہاؤ کا اخراج ہو گا۔ برقی بہاؤ کا اخراج بیلن کے دونوں سروں اور اس کے نکلی نما سطح سے ممکن ہے۔ یوں

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\text{نچلا ڈھکن}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\text{بالائی ڈھکن}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\text{نکلی سطح}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \rho_S \Delta S$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اب بیلن کی نکلی سطح موصل کے اندر ہے جہاں میدان صفر کے برابر ہے لہذا

$$\int_{\text{نچلا ڈھکن}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

ہو گا۔ مساوات 5.19 کے تحت سرحد پر خلاء میں مماسی میدان صفر ہوتا ہے۔ موصل میں بھی میدان صفر ہوتا ہے لہذا

$$\int_{\text{نکلی سطح}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

ہو گا۔ بیلن کے بالائی سرے پر

$$\int_{\text{بالائی ڈھکن}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = D_n \Delta S$$

ہو گا۔ ان تین نتائج کو استعمال کرتے ہوئے

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = D_n \Delta S = \rho_S \Delta S$$

یعنی

$$D_n = \rho_S$$

حاصل ہوتا ہے۔ چونکہ $D = \epsilon_0 E$ ہوتا ہے لہذا یوں

$$(5.20) \quad D_n = \epsilon_0 E_n = \rho_S$$

لکھا جا سکتا ہے۔

مساوات 5.19 اور مساوات 5.20 موصل اور خالی خلاء کے سرحد پر برقی میدان کے شرائط بیان کرتے ہیں۔ موصل اور خلاء کے سرحد پر برقی میدان موصل سے عمودی خارج ہوتا ہے جبکہ اس کے سرحد کے مماسی میدان صفر کے برابر ہوتا ہے۔ نتیجتاً موصل کی سطح ہم قوہ سطح ہوتی ہے۔ یوں موصل کی سطح پر دو نقطوں کے مابین کسی بھی راستے پر برقی میدان کا تکمل صفر کے برابر ہو گا یعنی $\int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = 0$ یاد رہے کہ برقی میدان کا تکمل برقی دباؤ دیتا ہے جو تکمل کے راستے پر منحصر نہیں ہوتا لہذا اس راستے کو موصل کی سطح پر ہی رکھا جا سکتا ہے جہاں $E_{\text{ماسی}} = 0$ ہونے کی وجہ سے تکمل صفر کے برابر ہو گا۔

مشق 5.2: نقطہ $N(2, -3, 5)$ موصل کی سطح پر پایا جاتا ہے جہاں $\mathbf{E} = 210a_x - 350a_y + 99a_z \frac{V}{m}$ کے برابر ہے۔ اس نقطے پر E_n ، E_m اور ρ_s حاصل کریں۔

جوابات: $0, 420 \frac{V}{m}$ اور $3.71 \frac{nC}{m^2}$

5.5 عکس کی ترکیب

جفت قطب کے خطوط صفحہ 160 پر شکل 4.10 میں دکھائے گئے ہیں جہاں دونوں باروں سے برابر فاصلے پر لامحدود برقی زمینی سطح دکھائی گئی ہے۔ برقی زمین پر انتہائی باریک موٹائی کی لامحدود موصل سطح رکھی جا سکتی ہے۔ ایسی موصل سطح پر برقی دباؤ صفر وولٹ ہو گا اور اس پر میدان عمودی ہو گا۔ موصل کے اندر برقی میدان صفر رہتا ہے اور اس سے برقی میدان گزر نہیں پاتا۔

اگر اس موصل سطح کے نیچے سے جفت قطب کا منفی بار ہٹا دیا جائے تب بھی سطح کے بالائی جانب میدان عمودی ہی ہو گا۔ یاد رہے برقی زمین صفر وولٹ پر ہوتی ہے۔ موصل سطح سے اوپر میدان جوں کا توں رہے گا جبکہ اس سے نیچے

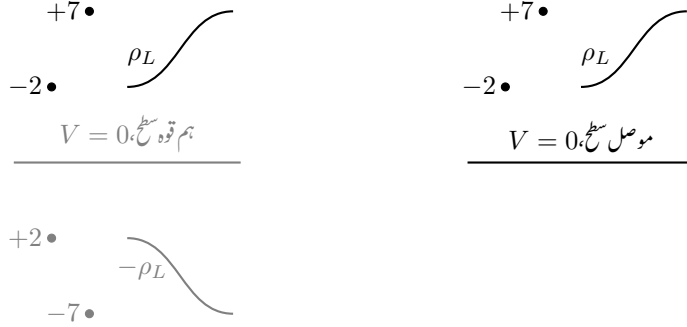
میدان صفر ہو جائے گا۔ اسی طرح سطح سے اوپر جفت قطب کا مثبت بار ہٹانے سے سطح کے نچلے میدان پر کوئی اثر نہیں پڑتا جبکہ سطح سے اوپر میدان صفر ہو جاتا ہے۔

آئیں ان حقائق کو دوسری نقطہ نظر سے دیکھیں۔ فرض کریں کہ لامحدود موصل سطح یا برقی زمین سے $\frac{d}{2}$ فاصلے پر اوپر مثبت نقطہ بار $+Q$ پایا جاتا ہے۔ چونکہ ایسی صورت میں سطح سے اوپر برقی میدان بالکل جفت قطب کے میدان کی طرح ہو گا لہذا ہم $\frac{d}{2}$ فاصلے پر برقی زمین سے نیچے عین مثبت بار کے نیچے منفی بار $-Q$ رکھتے ہوئے برقی زمین کو ہٹا سکتے ہیں۔ اوپر جانب کے میدان پر ان اقدام کا کوئی اثر نہیں ہو گا۔ یوں جفت قطب کے تمام مساوات بروئے کار لاتے ہوئے زمین کے اوپر جانب کا میدان حاصل کیا جا سکتا ہے۔ یاد رہے کہ سطح کے نیچے برقی زمین کو صفر ہی تصور کیا جائے گا۔ اگر برقی زمین کی سطح کو آئینہ تصور کیا جائے تب مثبت بار کا عکس اس آئینہ میں اسی مقام پر نظر آئے گا جہاں ہم نے تصوراتی منفی بار رکھا۔ یوں اس منفی بار کو حقیقی بار کا عکس²³ کہتے ہیں۔

ایسی ہی ترکیب لامحدود زمینی سطح کے ایک جانب منفی بار سے پیدا میدان حاصل کرنے کی خاطر بھی استعمال کیا جاتا ہے۔ ایسی صورت میں زمین کی دوسری جانب عین منفی بار کے سامنے، اتنے ہی فاصلے پر برابر مقدار مگر مثبت بار رکھتے ہوئے برقی زمین کو ہٹایا جا سکتا ہے۔

کسی بھی بار کو نقطہ باروں کا مجموعہ تصور کیا جا سکتا ہے۔ لہذا لامحدود برقی زمین یا لامحدود موصل سطح کی ایک جانب کسی بھی شکل کے باروں کا میدان، سطح کی دوسری جانب باروں کا عکس رکھتے اور زمین کو ہٹاتے ہوئے حاصل کیا جاتا ہے۔ اس ترکیب کو عکس کی ترکیب کہتے ہیں۔ یاد رہے کہ کسی بھی لامحدود موصل سطح جس کے ایک جانب بار پایا جاتا ہو پر سطحی بار پایا جائے گا۔ عموماً مسئلے میں لامحدود سطح اور سطح کے باہر بار معلوم ہوں گے۔ ایسے مسئلے کو حل کرنے کی خاطر سطح پر سطحی باروں کا علم بھی ضروری ہوتا ہے۔ سطحی بار دریافت کرنا نسبتاً مشکل کام ہے جس سے چھٹکارا حاصل کرنا عقلمندی ہو گی۔ عکس کی ترکیب میں سطحی بار کا جاننا ضروری نہیں لہذا اس ترکیب سے مسئلہ کو حل کرنا عموماً زیادہ آسان ثابت ہوتا ہے۔

شکل 5.5 میں لامحدود موصل سطح سے اوپر مختلف اقسام کے بار دکھائے گئے ہیں۔ اسی شکل میں مسئلے کو عکس کے ترکیب کی نقطہ نظر سے بھی دکھایا گیا ہے۔ موصل سطح کے مقام پر دونوں صورتوں میں صفر وولٹ ہی رہتے ہیں۔



شکل 5.5: عکس کی ترکیب۔

مثال 5.5: لامحدود موصل سطح $z = 3$ کے قریب $N(5, 7, 8)$ پر $5 \mu\text{C}$ بار پایا جاتا ہے۔ موصل کی سطح پر نقطہ $M(2, 4, 3)$ پر E حاصل کرتے ہوئے اسی مقام پر موصل کی سطحی کثافت بار حاصل کریں۔

حل: $5 \mu\text{C}$ کا عکس $-5 \mu\text{C}$ لامحدود سطح کے دوسری جانب نقطہ $P(5, 7, -2)$ پر رکھتے ہوئے موصل سطح ہٹاتے ہیں۔ اب N سے M تک سمتیہ R_{MN} اور P سے M تک سمتیہ R_{MP}

$$R_{MN} = -3a_x - 3a_y - 5a_z$$

$$R_{MP} = -3a_x - 3a_y + 5a_z$$

ہیں۔ یوں $5 \mu\text{C}$ نقطہ M پر

$$E_+ = \frac{5 \times 10^{-6}(-3a_x - 3a_y - 5a_z)}{4\pi\epsilon_0(3^2 + 3^2 + 5^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{5 \times 10^{-6}(-3a_x - 3a_y - 5a_z)}{4\pi\epsilon_0(43)^{\frac{3}{2}}}$$

پیدا کرے گا۔ اسی طرح $-5 \mu\text{C}$ بار نقطہ M پر

$$E_- = \frac{-5 \times 10^{-6}(-3a_x - 3a_y + 5a_z)}{4\pi\epsilon_0(3^2 + 3^2 + 5^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-5 \times 10^{-6}(-3a_x - 3a_y + 5a_z)}{4\pi\epsilon_0(43)^{\frac{3}{2}}}$$

میدان پیدا کرے گا۔ چونکہ برقی میدان خطی نوعیت کا ہوتا ہے لہذا کسی بھی نقطے پر مختلف باروں کے پیدا کردہ میدان جمع کرتے ہوئے کل میدان حاصل کیا جاسکتا ہے۔ یوں نقطہ M پر کل میدان

$$E_{\text{کل}} = E_+ + E_- = \frac{-50 \times 10^{-6}a_z}{4\pi\epsilon_0(43)^{\frac{3}{2}}}$$

ہو گا۔ موصل کی سطح پر میدان عمودی ہوتا ہے۔ موجودہ جواب اس حقیقت کی تصدیق کرتا ہے۔ یوں موصل کی سطح پر

$$D = \epsilon_0 E = \frac{-50 \times 10^{-6} \mathbf{a}_z}{4\pi(43)^{\frac{3}{2}}} = -14.13 \times 10^{-9} \mathbf{a}_z$$

حاصل ہوتا ہے جو سطح میں داخل ہونے کی سمت میں ہے۔ یوں مساوات 5.20 کے تحت سطح پر

$$\rho_s = -14.3 \frac{\text{nC}}{\text{m}^2}$$

پایا جاتا ہے۔

مندرجہ بالا مثال میں اگر $N(5, 7, 8)$ پر $5 \mu\text{C}$ پایا جاتا اور لامحدود سطح موجود نہ ہوتا تب $M(2, 4, 3)$ پر میدان E_+ ہوتا۔ لامحدود موصل سطح کی موجودگی میں یہ قیمت تبدیل ہو کر مثال میں حاصل کی گئی سطح E ہو جاتی ہے۔ درحقیقت سطح کے قریب بار کی وجہ سے سطح پر سطحی کثافت بار پیدا ہو جاتا ہے۔ کسی بھی نقطے پر بیرونی بار اور سطحی بار دونوں کے میدان کا مجموعہ حقیقی میدان ہوتا ہے۔

مثال 5.6: لامحدود موصل سطح $z = 0$ میں $(0, 0, z)$ پر Q نقطہ بار سے پیدا کثافت سطحی بار حاصل کریں۔

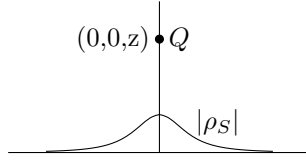
حل: اس مسئلے کو عکس کے ترکیب سے حل کرنے کی خاطر $(0, 0, -z)$ پر $-Q$ بار رکھتے ہوئے موصل سطح کو ہٹا کر حل کرتے ہیں۔ ایسی صورت میں سطح کے مقام پر عمومی نقطہ $(\rho, \phi, 0)$ پر Q اور $-Q$ بار

$$E_+ = \frac{Q(\rho \mathbf{a}_\rho - z \mathbf{a}_z)}{4\pi\epsilon_0(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$E_- = \frac{-Q(\rho \mathbf{a}_\rho + z \mathbf{a}_z)}{4\pi\epsilon_0(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

میدان پیدا کریں گے۔ $D = \epsilon_0 E$ استعمال کرتے ہوئے کل

$$D = \frac{-2Qz \mathbf{a}_z}{4\pi(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$



شکل 5.6: نقطہ بار سے لامحدود موصل سطح میں پیدا کی گئی کثافت بار۔

حاصل ہوتا ہے جس کی سمت $-a_z$ ہے جو موصل میں اوپر سے داخل ہونے کی سمت ہے۔ یوں موصل سطح پر

$$(5.21) \quad \rho_s = \frac{-2Qz}{4\pi(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \frac{C}{m^2}$$

پایا جائے گا۔ شکل 5.6 میں بار Q اور موصل سطح پر ρ_s دکھائے گئے ہیں۔

مساوات 5.21 کو استعمال کرتے ہوئے لامحدود موصل سطح پر کل بار حاصل کیا جا سکتا ہے۔ یقینی طور پر اس کی مقدار $-Q$ ہی حاصل ہوگی۔

5.6 نیم موصل

نیم موصل اشیاء مثلاً خالص سیلیکان اور جر مینیم میں آزاد باروں کی تعداد موصل کی نسبت سے کم جبکہ غیر موصل کی نسبت سے زیادہ ہوتی ہے۔ یوں ان کی موصلیت موصل اور غیر موصل کے موصلیت کے درمیان میں ہوتی ہے۔ نیم موصل کی خاص بات یہ ہے کہ ان میں انتہائی کم مقدار کے ملاوٹ²⁴ سے ان کی موصلیت پر انتہائی گہرا اثر پڑتا ہے۔ نیم موصل دوری جدول²⁵ کے چوتھے جماعت²⁶ سے تعلق رکھتے ہیں۔ دوری جدول کے پانچویں جماعت کے عناصر مثلاً نائٹروجن اور فاسفورس کا ایٹم ایک عدد الیکٹران عطا کرنے کا رجحان رکھتا ہے۔ یوں انہیں عطا کنندہ²⁷ عناصر کہتے ہیں۔ نیم موصل میں ایسا ہر عطا کنندہ ملاوٹی ایٹم ایک عدد آزاد الیکٹران کو جنم دیتا ہے۔ ایسے عنصر کی

doping²⁴
periodic table²⁵
group²⁶
donor²⁷

نہایت کم مقدار کی ملاوٹ سے نیم موصل میں آزاد الیکٹران کی تعداد بڑھ جاتی ہے جس سے ان کی موصلیت بہت بڑھ جاتی ہے۔ ایسے نیم موصل جن میں آزاد الیکٹران کی تعداد بڑھا دی گئی ہو کو n نیم موصل کہتے ہیں۔ اس کے برعکس تیسرے جماعت کے عناصر مثلاً المونیم کا ایٹم ایک عدد الیکٹران قبول کرنے کا رجحان رکھتا ہے۔ یوں المونیم کو قبول کنندہ²⁸ عنصر کہا جاتا ہے۔ ملاوٹی المونیم کا ایٹم نیم موصل کے ایٹم سے الیکٹران حاصل کرتے ہوئے الیکٹران کی جگہ خالی جگہ پیدا کر دیتا ہے جسے خول²⁹ کہا جاتا ہے۔ نیم موصل میں ایسا ہر قبول کنندہ ملاوٹی ایٹم ایک عدد آزاد خول کو جنم دیتا ہے۔ ایسا آزاد خول مثبت ذرے کی مانند معلوم ہوتا ہے جس کا برقی بار e الیکٹران کے برقی بار $-e$ کے برابر مگر الٹ قطب کا ہوتا ہے اور جس کی کمیت m_h لی جاسکتی ہے۔ اسی طرح آزاد خول کی حرکت پذیری μ_h لکھی جاتی ہے۔ بالکل آزاد الیکٹران کی طرح برقی میدان کی موجودگی میں آزاد خول رفتار بہاؤ $v_d = \mu_h E$ سے حرکت کرتا ہے جو موصلیت $\sigma = \rho_h \mu_h$ کو جنم دیتا ہے۔ یاد رہے کہ مثبت خول E کی سمت میں ہی حرکت کرے گا لہذا اس کے رفتار بہاؤ کی سمت E کی سمت ہی ہوگی۔ تیسرے جماعت کے عناصر کی ملاوٹ کردہ نیم موصل کو p نیم موصل کہا جاتا ہے۔ آزاد الیکٹران اور آزاد خول مل کر

$$(5.22) \quad \sigma = -\rho_e \mu_e + \rho_h \mu_h$$

موصلیت پیدا کرتے ہیں جہاں ρ_h آزاد خول کی حجمی کثافتِ بار ہے۔ خالص نیم موصل میں حرارتی توانائی سے نیم موصل کے ایٹم سے الیکٹران خارج ہو کر آزاد الیکٹران کی حیثیت اختیار کرتا ہے جبکہ ایسے الیکٹران کا خالی کردہ مقام آزاد خول کی حیثیت اختیار کرتا ہے۔ یوں خالص نیم موصل میں آزاد الیکٹران اور آزاد خول کی تعداد برابر ہوتی ہے۔

خالص نیم موصل اوہم کے قانون کی نقطہ شکل پر پورا اترتا ہے۔ یوں کسی ایک درجہ حرارت پر نیم موصل کی موصلیت تقریباً اٹل قیمت رکھتی ہے۔

آپ کو یاد ہو گا کہ درجہ حرارت بڑھانے سے موصل میں آزاد الیکٹران کی رفتار بہاؤ کم ہوتی ہے جس سے موصلیت کم ہو جاتی ہے۔ درجہ حرارت کا موصل میں آزاد الیکٹران کے حجمی کثافتِ بار پر خاص اثر نہیں ہوتا۔ اگرچہ نیم موصل میں بھی درجہ حرارت بڑھانے سے آزاد بار کی رفتار بہاؤ کم ہوتی ہے لیکن ساتھ ہی ساتھ آزاد بار کی مقدار نسبتاً زیادہ مقدار میں بڑھتی ہے جس کی وجہ سے نیم موصل کی موصلیت درجہ حرارت بڑھانے سے بڑھتی ہے۔ یہ موصل اور نیم موصل کے خصوصیات میں واضح فرق ہے۔

مشق 5.3: 300 K درجہ حرارت پر خالص سیلیکان میں آزاد الیکٹران اور آزاد خول کی تعداد 1.5×10^{16} فی مربع میٹر، الیکٹران کی رفتار بہاؤ $\frac{m^2}{Vs}$ 0.12 جبکہ خول کی رفتار بہاؤ $\frac{m^2}{Vs}$ 0.025 ہے۔ جرمنیم کے لئے یہی قیمتیں بالترتیب $10^{19} \times 2.4$ فی مربع میٹر، $\frac{m^2}{Vs}$ 0.36 اور $\frac{m^2}{Vs}$ 0.17 ہیں۔ خالص سیلیکان اور خالص جرمنیم کی موصلیت دریافت کریں۔

جوابات: $0.348 \frac{mS}{m}$ اور $2 \frac{S}{m}$

5.7 ذورق

اس باب میں اب تک ہم موصل اور نیم موصل کی بات کر چکے ہیں جن میں آزاد بار پائے جاتے ہیں۔ یوں ایسے اشیاء پر برقی دباؤ لاگو کرنے سے ان میں برقرار برقی رو پیدا کی جاسکتی ہے۔ انہیں ایسی اشیاء کی بات کریں جن میں آزاد بار نہیں پائے جاتے لہذا ان میں برقرار برقی رو پیدا کرنا ممکن نہیں ہوتا۔

بعض اشیاء مثلاً پانی کے مالیکیول میں قدرتی طور پر مثبت اور منفی مراکز پائے جاتے ہیں۔ ایسے مالیکیول کو قطبی³⁰ مالیکیول کہتے ہیں۔ قطبی مالیکیول کو جفت قطب تصور کیا جاسکتا ہے۔ بیرونی میدان E لاگو کرنے سے مالیکیول کے مثبت سرے پر میدان کی سمت میں جبکہ منفی سرے پر میدان کی الٹ سمت میں قوت عمل کرتا ہے۔ ان قوتوں کی وجہ سے مالیکیول کے مثبت اور منفی مراکز ان قوتوں کی سمتوں میں حرکت کرتے ہوئے گھوم جاتے ہیں اور ساتھ ہی ساتھ مراکز کے درمیان فاصلہ بھی بڑھ جاتا ہے۔ ٹھوس قطبی اشیاء میں ایٹموں اور مالیکیول کے درمیان قوتیں ان حرکات کو روکنے کی کوشش کرتی ہیں۔ اسی طرح مثبت اور منفی بار کے مابین قوت کشش ان کے درمیان فاصلہ بڑھنے کو روکتا ہے۔ جہاں یہ مخالف قوتیں برابر ہوں وہاں مثبت اور منفی مراکز رک جاتے ہیں۔ بیرونی میدان ان تمام بلا ترتیب جفت قطب کو ایک سمت میں لانے کی کوشش کرتا ہے۔

بعض اشیاء میں قدرتی طور پر مثبت اور منفی مراکز نہیں پائے جاتے البتہ انہیں بیرونی میدان میں رکھنے سے ان میں ایسے مراکز پیدا ہو جاتے ہیں۔ ایسے اشیاء کو غیر قطبی³¹ کہتے ہیں۔ بیرونی میدان مالیکیول کے الیکٹرانوں کو ایک جانب

polar³⁰
non polar³¹

کھینچ کر منفی مرکز جبکہ بقایا ایٹم کو مثبت چھوڑ کر مثبت مرکز پیدا کرتا ہے۔ مثبت اور منفی بار کے مابین قوت کشش اس طرح مراکز پیدا ہونے کے خلاف عمل کرتا ہے۔ جہاں یہ مخالف قوتیں برابر ہو جائیں وہیں بار کے حرکت کا سلسلہ رک جاتا ہے۔ یہ اشیاء قدرتی طور پر غیر قطبی ہیں البتہ انہیں بیرونی میدان قطبی بنا دیتا ہے۔ پیدا کردہ جفت قطب بیرونی میدان کی سمت میں ہی ہوں گے۔

ایسے تمام اشیاء جو یا تو پہلے سے قطبی ہوں اور یا انہیں بیرونی میدان کی مدد سے قطبی بنایا جاسکے ذوبوقی³² کہلاتے ہیں۔

ذوبرق میں بیرونی میدان سے مالکیول کے اندر حرکت پیدا ہوتی ہے البتہ مالکیول ازخود اسی جگہ رہتا ہے۔ ایسا بار جو بیرونی میدان کی وجہ سے اپنی جگہ پر معمولی حرکت کرتا ہو کو مقید بار³³ کہتے ہیں۔ اس کے برعکس آزاد بار بیرونی میدان میں مسلسل حرکت کرتا ہے۔

ذوبرق کے جفت قطب کا معیار اثر کو صفحہ 158 میں دئے مساوات 4.68

$$(5.23) \quad p = Qd$$

سے ظاہر کیا جاسکتا ہے جہاں Q ذوبرق کے جفت قطب میں مثبت مرکز کا بار ہے۔

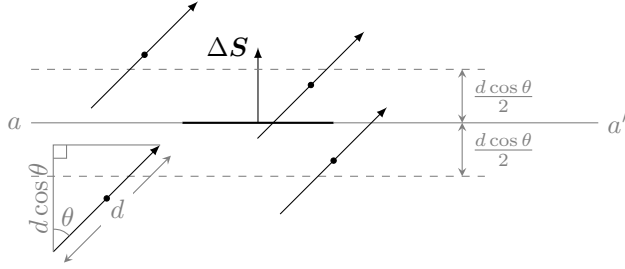
اگر اکائی حجم میں n جفت قطب پائے جائیں تب Δv حجم میں $n\Delta v$ جفت قطب ہوں گے جن کا اجتماعی معیار اثر جفت قطب تمام کے سمتی مجموعے

$$(5.24) \quad p_{کل} = \sum_{i=1}^{n\Delta v} p_i$$

کے برابر ہو گا جہاں انفرادی p مختلف ہو سکتے ہیں۔ تقطیب³⁴ سے مراد اکائی حجم میں کل معیار اثر جفت قطب ہے یعنی

$$(5.25) \quad P = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta v} \sum_{i=1}^{n\Delta v} p_i$$

جس کی اکائی کولمب فی مربع میٹر ہے۔ Δv کو کم سے کم³⁵ کرتے ہوئے نقطے پر تقطیب حاصل کی گئی ہے۔ حقیقت میں Δv کو اتنا رکھا جاتا ہے کہ اس میں جفت قطب کی تعداد ($n\Delta v$) اتنی ہو کہ انفرادی جفت قطب کے اثر کو نظر انداز کرنا ممکن ہو۔ یوں تقطیب کو یکساں تفاعل تصور کیا جاتا ہے۔



شکل 5.7: بیرونی میدان کی موجودگی میں مقید بار کی حرکت۔

آئیں ان حقائق کو استعمال کرتے ہوئے آگے بڑھیں۔

شکل 5.7 کو دیکھتے ہوئے آگے پڑھیں۔ تصور کریں کہ ذوقر میں غیر قطبی مائیکویول پائے جاتے ہیں جن کا مقام بیرونی میدان کی غیر موجودگی میں دائروں سے ظاہر کیا گیا ہے۔ بیرونی میدان کے غیر موجودگی میں $P = 0$ ہو گا۔ ذوقر کے اندر تصوراتی سطح ΔS لیتے ہیں جسے موٹی گہری سیاہی کی لکیر سے ظاہر کیا گیا ہے۔ اس کے دونوں جانب ہلکی سیاہی سے a تا a' لکیر بھی دکھائی گئی ہے۔ بیرونی میدان لاگو کرنے سے جفت قطب $p = Qd$ پیدا ہوتے ہیں جن کا d اور p سطح ΔS کے ساتھ θ زاویہ بناتے ہیں۔ ان جفت قطب کو سمتیوں سے ظاہر کیا گیا ہے جہاں سمتیہ کی نوک مثبت جبکہ اس کی دم منفی بار کا مقام دیتی ہے۔ شکل کو دیکھتے ہوئے صاف ظاہر ہے کہ aa' سے $\frac{d \cos \theta}{2}$ فاصلے نیچے تک تمام مثبت بار بیرونی میدان لاگو کرنے سے aa' سے گزرتے ہوئے اوپر چلے جائیں گے۔ اسی طرح aa' سے $\frac{d \cos \theta}{2}$ فاصلے اوپر تک تمام منفی بار بیرونی میدان لاگو کرنے سے aa' سے گزرتے ہوئے نیچے چلے جائیں گے۔ یوں ΔS رقبہ اور $d \cos \theta$ گہرائی کے حجم $d \Delta S \cos \theta$ میں جتنے بھی جفت قطب ہوں ان تمام کا ایک سرا ΔS سے گزرے گا۔ چونکہ اکائی حجم میں n جفت قطب ہیں لہذا اتنی حجم میں $nd \Delta S \cos \theta$ جفت قطب ہوں گے۔ یوں ΔS سے گزر کر اوپر جبکہ $\frac{nQd \Delta S \cos \theta}{2}$ بار ΔS سے گزر کر نیچے جائے گا۔ مثبت بار کا اوپر جانب حرکت اور منفی بار کا نیچے جانب حرکت ایک ہی معنی رکھتے ہیں لہذا کل

$$(5.26) \quad \Delta Q_m = nQd \Delta S \cos \theta = nQd \cdot \Delta S$$

بار سطح سے گزرتے ہوئے اوپر جانب جائے گا جہاں ΔQ_m لکھتے ہوئے اس حقیقت کی یاد دہانی کرائی گئی ہے کہ ہم

dielectric³²
bound charge³³
polarization³⁴
یہ ایسے ہی ہے جیسے لمبائی رفتار $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ حاصل کرتے وقت $0 \rightarrow \Delta t$ لیا جاتا ہے۔³⁵

مقید بار کی بات کر رہے ہیں۔ چونکہ تمام جہت قطب ایک ہی سمت میں ہیں لہذا اس حجم کی تقطیب

$$(5.27) \quad P = nQd$$

ہوگی۔ یوں مساوات 5.26 کو

$$(5.28) \quad \Delta Q_m = P \cdot \Delta S$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اگر ΔS کو بند سطح کا ٹکڑا سمجھا جائے جہاں a_S بیرونی سمت کو ہو تب اس بند سطح سے کل بار کا اخراج

$$\oint_S P \cdot dS$$

کے برابر ہو گا۔ یوں بند سطح میں مقید بار کا اضافہ

$$(5.29) \quad Q_m = - \oint_S P \cdot dS$$

ہو گا۔ یہ مساوات گاوس کے قانون کی شکل رکھتی ہے لہذا ہم کثافت برقی بہاؤ کی تعریف یوں تبدیل کرتے ہیں کہ یہ خالی خلاء کے علاوہ دیگر صورتوں میں بھی قابل استعمال ہو۔ گاوس کا قانون صفحہ 100 پر مساوات 3.6 میں دیا گیا ہے۔ ہم پہلے اس قانون کو $\epsilon_0 E$ اور کل گھیرے بار Q کی شکل میں لکھتے ہیں

$$(5.30) \quad Q = \oint_S \epsilon_0 E \cdot dS$$

جہاں

$$(5.31) \quad Q = Q + Q_m$$

کے برابر ہے۔ مساوات 5.30 میں بند سطح S آزاد بار Q اور مقید بار Q_m کو گھیرے ہوئے ہے۔ مساوات 5.31 میں مساوات 5.29 اور مساوات 5.30 پر کرتے ہوئے

$$(5.32) \quad Q = Q - Q_m = \oint_S (\epsilon_0 E + P) \cdot dS$$

حاصل ہوتا ہے۔

ہم کثافت برقی بہاؤ کو اب

$$(5.33) \quad D = \epsilon_0 E + P$$

بیان کرتے ہیں جو زیادہ کارآمد اور عمومی مساوات ہے۔ یوں ذوبرق اشیاء کے لئے کشاف برقی بہاؤ میں اضافی جزو P شامل ہو جاتا ہے۔ اس طرح

$$(5.34) \quad Q = \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں Q گھیرا ہوا آزاد بار ہے۔

ہم آزاد، مقید اور کل باروں کے لئے آزاد، مقید اور کل صحیح کشاف بیان کرتے ہوئے

$$Q = \int_h \rho_h dh$$

$$Q_m = \int_h \rho_m dh$$

$$Q_{کل} = \int_h \rho_{کل} dh$$

لکھ سکتے ہیں۔

مسئلہ پھیلاؤ کے استعمال سے مساوات 5.29، مساوات 5.30 اور مساوات 5.34 کے نقطہ اشکال

$$\nabla \cdot \mathbf{P} = -\rho_m$$

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho_{کل}$$

اور

$$(5.35) \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_h$$

لکھے جاسکتے ہیں۔

قلم میں دہراتے طرز پر ایٹم پائے جاتے ہیں۔ قلم میں عموماً کسی ایک سمت میں باآسانی جبکہ بقایا سمتوں میں مشکل سے تقطیب پیدا کرنا ممکن ہوتا ہے۔ جس سمت میں باآسانی تقطیب پیدا کی جاسکے اسے آسان محور³⁶ یا آسان سمت یا نرم محور کہتے ہیں۔ ایسے اشیاء جو مختلف اطراف میں مختلف خصوصیات رکھتے ہوں سمی³⁷ اشیاء کہلاتے ہیں۔ ساتھ ہی ساتھ یہ ضروری نہیں کہ بیرونی لاگو میدان اور تقطیب ایک ہی سمت میں ہوں۔ کچھ ایسے اشیاء بھی پائے جاتے ہیں

easy axis³⁶
anisotropic³⁷

جو برق چال³⁸ کی خاصیت رکھتے ہیں۔ ان میں تقطیب کی قیمت ان اشیاء کی گزشتہ تاریخ پر مبنی ہوتی ہے۔ یہ عمل بالکل مقناطیسی مادے کی مقناطیسی چال کے طرز کی خصوصیت ہے۔

کچھ ذوبق اشیاء میں لاگو بیرونی میدان E اور تقطیب P ہر صورت ایک ہی سمت میں ہوتے ہیں۔ ان اشیاء کی خصوصیات ہر طرف بالکل ایک ہی طرح ہوتی ہیں۔ ایسے اشیاء غیر سمی³⁹ اشیاء کہلاتے ہیں۔ انجنیئرنگ میں استعمال ہونے والے ذوبق اشیاء عموماً ایسے ہی ہوتے ہیں۔ اس کتاب میں صرف انہیں پر تبصرہ کیا جائے گا۔ ایسے اشیاء میں تقطیب اور لاگو برقی میدان راست تناسب تعلق

$$(5.36) \quad \begin{aligned} P &= \chi_e \epsilon_0 E \\ &= (\epsilon_R - 1) \epsilon_0 E \end{aligned}$$

رکھتا ہے جہاں مساوات کے مستقل کو $\chi_e \epsilon_0$ یا $(\epsilon_R - 1) \epsilon_0$ لکھا جاتا ہے۔ یوں مساوات 5.33

$$D = \epsilon_0 E + (\epsilon_R - 1) \epsilon_0 E$$

یا

$$(5.37) \quad D = \epsilon_R \epsilon_0 E = \epsilon E$$

شکل اختیار کرتا ہے جہاں ذوبق کا برقی مستقل

$$(5.38) \quad \epsilon = \epsilon_R \epsilon_0$$

کے برابر ہے۔ ماہر طبیعیات عموماً χ_e جبکہ انجنیئر عموماً ϵ_R استعمال کرتے ہیں۔ ان کا تعلق

$$(5.39) \quad \chi_e = \epsilon_R - 1$$

ہے۔

χ_e برقی اثر پذیری⁴⁰، ϵ_R جزوی برقی مستقل⁴¹ جبکہ ϵ_0 خالی خلاء کا برقی مستقل⁴² کہلاتے ہیں۔ اس کتاب کے آخر میں صفحہ 831 پر دیے ضمیمے میں چند مخصوص اشیاء کے برقی مستقل دئے گئے ہیں۔

ferroelectric³⁸
isotropic³⁹
electric susceptibility⁴⁰
relative electric constant, relative permittivity⁴¹
permittivity of vacuum, electric constant of vacuum⁴²

غیر یکساں⁴³ خاصیت رکھنے والے اشیاء اتنے سادہ مساوات سے نہیں نپٹے جاتے۔ ان اشیاء میں E کا ہر کارتیسی جزو D کے ہر کارتیسی جزو پر اثر انداز ہوتا ہے لہذا ان کا تعلق یوں

$$(5.40) \quad \begin{aligned} D_x &= \epsilon_{xx}E_x + \epsilon_{xy}E_y + \epsilon_{xz}E_z \\ D_y &= \epsilon_{yx}E_x + \epsilon_{yy}E_y + \epsilon_{yz}E_z \\ D_z &= \epsilon_{zx}E_x + \epsilon_{zy}E_y + \epsilon_{zz}E_z \end{aligned}$$

لکھا جاتا ہے جہاں نو اعدادی ϵ_{ij} کو مجموعی طور پر تناوی مستقل⁴⁴ کہا جاتا ہے۔ اسی طرح مساوات 5.40 کے طرز کے مساوات تناوی مساوات کہلاتے ہیں۔ غیر سمتی اشیاء میں D اور E (اور P) آپس میں متوازی نہیں ہوتے اور اگرچہ $D = \epsilon_0 E + P$ ان کے لئے بھی درست ہے، $D = \epsilon E$ استعمال کرتے وقت اس حقیقت کا خیال رکھنا ہو گا کہ ϵ اب تناوی مستقل ہے۔ غیر سمتی اشیاء پر ایک مثال کے بعد بحث روکتے ہیں۔

مثال 5.7: ایک غیر سمتی ذوبرق کا تناوی مستقل

$$\epsilon = \epsilon_0 \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix}$$

ہے۔ برقی میدان $E = \sqrt{3}a_x$ ، $E = \sqrt{3}a_y$ اور $E = 1a_x + 1a_y + 1a_z$ کی صورت میں D حاصل کریں۔

$$\text{جوابت: } D = \epsilon_0(4a_x + 9a_y + 9a_z) \text{ اور } D = 9\epsilon_0a_y, D = 4\sqrt{3}\epsilon_0a_x$$

اس مثال میں تینوں بار $|E| = \sqrt{3}$ کی قیمتیں خاصی مختلف ہیں۔ یہی غیر سمتی ذوبرق کی پہچان ہے۔

مشق 5.4: مندرجہ ذیل صورتوں میں تقطیب حاصل کریں۔ (الف) ذوبرق میں $E = 5 \frac{\text{kV}}{\text{m}}$ کی صورت میں $D = 1.2 \frac{\mu\text{C}}{\text{m}^2}$ پایا جاتا ہے۔ (ب) $D = 2 \frac{\mu\text{C}}{\text{m}^2}$ اور $\chi_e = 1.5$ ہیں۔ (پ) ذوبرق میں 6×10^{20} مالیکول فی مربع میٹر ہیں جہاں $E = 100 \frac{\text{kV}}{\text{m}}$ پر ہر مالیکول کا معیار جفت قطب $1.2 \times 10^{-26} \text{ C m}$ ہے۔

جوابات: $1.156 \frac{\mu\text{C}}{\text{m}^2}$ ، $1.2 \frac{\mu\text{C}}{\text{m}^2}$ اور $7.2 \frac{\mu\text{C}}{\text{m}^2}$

5.8 کامل ذوبرق کے سرحد پر برقی شرائط

دو مختلف ذوبرق کے سرحدی برقی شرائط⁴⁵ شکل 5.8 کی مدد سے حاصل کرتے ہیں جہاں پہلے ذوبرق کا برقی مستقل ϵ_1 جبکہ دوسرے ذوبرق کا برقی مستقل ϵ_2 ہے۔ پہلے مماسی اجزاء حاصل کرنے کی خاطر مستطیلی راستہ $abcd$ پر

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = 0$$

یعنی

$$E_{m1}\Delta w - E_{n1,b} \frac{\Delta h}{2} - E_{n2,b} \frac{\Delta h}{2} - E_{m2}\Delta w + E_{n2,a} \frac{\Delta h}{2} + E_{n1,a} \frac{\Delta h}{2} = 0$$

لکھتے ہیں جس سے

$$(E_{m1} - E_{m2})\Delta w + (E_{n1,a} + E_{n2,a} - E_{n1,b} - E_{n2,b}) \frac{\Delta h}{2} = 0$$

حاصل ہوتا ہے۔ Δw اتنا چھوٹا لیا جاتا ہے کہ اس پر مماسی میدان کو یکساں تصور کرنا ممکن ہو۔ مستطیل کے بائیں اور دائیں اطراف کے میدان کو زیر نوشت میں a اور b سے ظاہر کیا گیا ہے۔ سرحدی شرائط حاصل کرنے کی خاطر سطح کے قریب تر جانا ہو گا۔ ایسا کرنے سے $\Delta h \rightarrow 0$ ہو گا جس سے

$$(E_{n1,a} + E_{n2,a} - E_{n1,b} - E_{n2,b}) \frac{\Delta h}{2} \rightarrow 0$$

ہو کر قابل نظر انداز ہو گا۔ یوں

$$(E_{m1} - E_{m2})\Delta w = 0$$

رہ جاتا ہے جس سے

$$(5.41) \quad E_{m1} = E_{m2}$$

حاصل ہوتا ہے جسے

$$(5.42) \quad \mathbf{a}_N \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = 0$$

بھی لکھا جا سکتا ہے۔ اس مساوات سے

$$\frac{D_{m1}}{\epsilon_1} = E_{m1} = E_{m2} = \frac{D_{m2}}{\epsilon_2}$$

یعنی

$$(5.43) \quad \frac{D_{m1}}{D_{m2}} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$$

یا

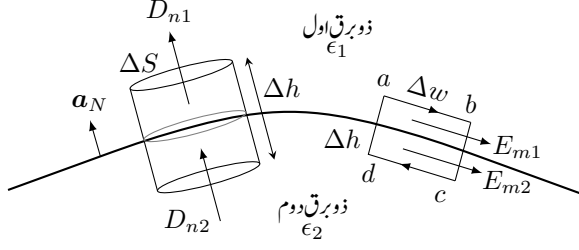
$$(5.44) \quad \mathbf{a}_N \times \left(D_1 - \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} D_2 \right) = 0$$

لکھا جا سکتا ہے۔

مساوات 5.41 کہتا ہے کہ ایک ذوبرق سے دوسرے ذوبرق میں داخل ہوتے ہوئے سرحد پر مماسی برقی شدت بلا جوڑ⁴⁶ ہوتا ہے۔ اس کے برعکس مساوات 5.43 کہتا ہے کہ دو ذوبرق کے سرحد پر مماسی برقی بہاؤ جوڑ دار⁴⁷ ہوتا ہے۔ یوں ایک ذوبرق سے دوسرے ذوبرق میں داخل ہوتے ہوئے مماسی برقی بہاؤ میں سیڑھی نما⁴⁸ تبدیلی پائی جاتی ہے۔

عمودی اجزاء حاصل کرنے کی خاطر گاوس کا قانون شکل میں رقبہ ΔS گھیرتے بیلن پر لاگو کرتے ہوئے

continuous⁴⁶
discontinuous⁴⁷
step⁴⁸



شکل 5.8: دو مختلف ذوبق کے سرحد پر برقی شرائط۔

$$(5.45) \quad \int_{\Delta S} \mathbf{D}_{n1} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\Delta S} \mathbf{D}_{n2} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\text{نکلی سطح}} \mathbf{D}_m \cdot d\mathbf{S} = \int_{\Delta S} \rho_S dS$$

لکھا جاسکتا ہے۔ چھوٹے رقبہ پر میدان کو یکساں تصور کرتے ہوئے مکمل کے باہر لے جاتے ہوئے مساوات 5.45 کے پہلے جزو سے

$$\int_{\Delta S} \mathbf{D}_{n1} \cdot d\mathbf{S} = D_{n1} \Delta S$$

حاصل ہوتا ہے۔ یاد رہے کہ بند سطح کی سمت باہر کو ہوتی ہے لہذا D_{n1} اور نیلن کا بالائی ڈھکن ایک ہی سمت رکھتے ہیں جبکہ D_{n2} اور نیلن کا نچلا ڈھکن الٹ سمت میں ہیں۔ مساوات 5.45 کا دوسرا جزو

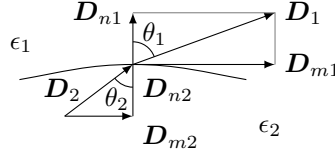
$$\int_{\Delta S} \mathbf{D}_{n2} \cdot d\mathbf{S} = -D_{n2} \Delta S$$

دیتا ہے۔ سطح کے قریب سے قریب ہونے سے $\Delta h \rightarrow 0$ ہو گا جس سے نکلی سطح کا رقبہ قابل نظر انداز ہو گا جس سے مساوات 5.45 کا تیسرا جزو صفر ہو جاتا ہے جبکہ

$$\int_{\Delta S} \rho_S dS = \rho_S \Delta S$$

کے برابر ہے۔ ان تمام نتائج سے

$$D_{n1} \Delta S - D_{n2} \Delta S = \rho_S \Delta S$$



شکل 5.9: $\epsilon_1 > \epsilon_2$ کی صورت میں $D_1 > D_2$ ہوگا۔ اسی طرح $\theta_1 > \theta_2$ جبکہ $E_1 < E_2$ ہوگا۔

یعنی

$$(5.46) \quad D_{n1} - D_{n2} = \rho_s$$

حاصل ہوتا ہے جسے

$$(5.47) \quad \mathbf{a}_N \cdot (D_1 - D_2) = \rho_s$$

بھی لکھا جاسکتا ہے۔ یوں $D = \epsilon E$ کے استعمال سے

$$(5.48) \quad \mathbf{a}_N \cdot (\epsilon_1 \mathbf{E}_1 - \epsilon_2 \mathbf{E}_2) = \rho_s$$

حاصل ہوتا ہے۔

جزوی برقی مستقل کی مدد سے مقید بار کا حساب رکھا جاتا ہے۔ اس طرح مقید بار کا علیحدہ طور پر خیال رکھنے کی ضرورت نہیں رہتی۔ یوں مندرجہ بالا مساوات میں ρ_s مقید بار نہیں ہے۔ ρ_s سرحد پر با مقصد طور رکھی گئی سطحی کثافتِ بار ہے۔ اس منفرد صورت، جہاں سرحد پر از خود بار رکھا جائے، کے علاوہ دذو برق کی سرحد پر کبھی بار نہیں پایا جاتا۔ انجینئرنگ مسائل میں عموماً $\rho_s = 0$ ہی ہوتا ہے۔ ایسی صورت میں مندرجہ بالا مساوات نسبتاً سادہ شکل

$$(5.49) \quad D_{n1} = D_{n2}$$

اختیار کر لیتی ہے جس سے

$$(5.50) \quad \epsilon_1 E_{n1} = D_{n1} = D_{n2} = \epsilon_2 E_{n2}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ یوں سرحد پار کرتے وقت E_n میں سیڑھی نما تبدیلی پائے جاتی ہے۔ اس حقیقت کو ہم یوں بیان کرتے ہیں کہ سرحد پر E_n جوڑ دار⁴⁹ ہے۔ اس کے برعکس D_n سرحد پر بلا جوڑ ہے۔

⁴⁹ discontinuous

آئیں ان جوابات کی مدد سے سرحد کے دونوں جانب برقی میدان کا تعلق حاصل کریں۔ شکل 5.9 کو دیکھتے ہوئے ہم

$$D_{m1} = D_1 \sin \theta_1$$

$$D_{n1} = D_1 \cos \theta_1$$

$$D_{m2} = D_2 \sin \theta_2$$

$$D_{n2} = D_2 \cos \theta_2$$

لکھ سکتے ہیں جن سے

$$\frac{D_{n1}}{D_{n2}} = \frac{D_1 \cos \theta_1}{D_2 \cos \theta_2} = 1$$

$$\frac{D_{m1}}{D_{m2}} = \frac{D_1 \sin \theta_1}{D_2 \sin \theta_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں مساوات 5.49 اور مساوات 5.43 کا استعمال کیا گیا ہے۔ انہیں

$$(5.51) \quad \begin{aligned} D_1 \cos \theta_1 &= D_2 \cos \theta_2 \\ \epsilon_2 D_1 \sin \theta_1 &= \epsilon_1 D_2 \sin \theta_2 \end{aligned}$$

لکھ سکتے ہیں۔ ان میں دوسری مساوات کو پہلی مساوات سے تقسیم کرتے ہیں

$$\frac{\epsilon_2 D_1 \sin \theta_1}{D_1 \cos \theta_1} = \frac{\epsilon_1 D_2 \sin \theta_2}{D_2 \cos \theta_2}$$

جس سے

$$(5.52) \quad \frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$$

حاصل ہوتا ہے۔ یہ مساوات سرحد کے دونوں جانب میدان کے زاویوں کا تعلق بیان کرتا ہے۔ چونکہ $D = \epsilon E$ ہوتا ہے لہذا سرحد کے کسی بھی طرف، اس طرف کا E اور D ایک ہی سمت رکھتے ہیں۔ شکل میں $\epsilon_1 > \epsilon_2$ تصور کیا گیا ہے لہذا اس میں $\theta_1 > \theta_2$ ہے۔

مساوات 5.51 کے پہلے جزو کا مربع لیتے ہوئے

$$\begin{aligned} D_1^2 \cos^2 \theta_1 &= D_2^2 \cos^2 \theta_2 \\ &= D_2^2 (1 - \sin^2 \theta_2) \\ &= D_2^2 - D_2^2 \sin^2 \theta_2 \end{aligned}$$

اس میں مساوات 5.51 کے دوسرے جزو سے $D_2 \sin \theta_2$ کی قیمت پر کرتے ہوئے

$$D_1^2 \cos^2 \theta_1 = D_2^2 - D_1^2 \left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \right)^2 \sin^2 \theta_1$$

حاصل ہوتا ہے جس سے

$$(5.53) \quad D_2 = D_1 \sqrt{\cos^2 \theta_1 + \left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \right)^2 \sin^2 \theta_1}$$

ماتا ہے۔ چونکہ $E = \frac{D}{\epsilon}$ ہے لہذا مندرجہ بالا مساوات سے

$$\begin{aligned} E_2 = \frac{D_2}{\epsilon_2} &= \frac{D_1}{\epsilon_2} \sqrt{\cos^2 \theta_1 + \left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \right)^2 \sin^2 \theta_1} \\ &= \frac{\epsilon_1 E_1}{\epsilon_2} \sqrt{\cos^2 \theta_1 + \left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \right)^2 \sin^2 \theta_1} \end{aligned}$$

یعنی

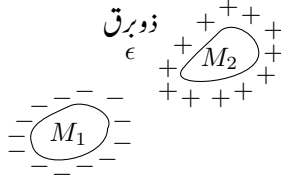
$$(5.54) \quad E_2 = E_1 \sqrt{\left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \right)^2 \cos^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_1}$$

حاصل ہوتا ہے۔

جس جانب برقی مستقل کی قیمت زیادہ ہو، سرحد کے اسی طرف D کی قیمت بھی زیادہ ہوتی ہے ماسوائے جب $\theta_1 = \theta_2 = 0$ ہوں جس صورت میں $D_2 = D_1$ ہوتا ہے۔ اسی طرح کم ϵ جانب E کی قیمت زیادہ ہوتی ہے ماسوائے جب $\theta_1 = \theta_2 = 90$ ہوں جس صورت میں $E_2 = E_1$ ہوتا ہے۔

5.9 موصل اور ذوبرقی کے سرحدی شرائط

موصل اور ذوبرق کے سرحد پر صورت حال تقریباً ویسے ہی ہے جیسے موصل اور خالی خلاء کے سرحد پر تھی۔ موصل میں $E = 0$ ہونے کی وجہ سے سرحد پر مستطیلی راستے پر کرخوف کے قانون سے ذوبرق میں $E_m = 0$ حاصل ہوتا ہے۔ اس طرح $D_m = \frac{E_m}{\epsilon} = 0$ ہوگا۔



شکل 5.10: برقی کنڈیکٹنس (کپیسٹنس) کی تعریف۔

اسی طرح سرحد پر چھوٹا بیلن $\rho_S \Delta S$ بار کو گھیرے گا جو گاوس کے قانون کی مدد سے بیلن کے ذو برق جانب ڈھکن پر عمودی بہاؤ $D_n \Delta S$ پیدا کرے گا۔ یوں $D_n = \rho_S$ حاصل ہوتا ہے جس سے $E_n = \frac{D_n}{\epsilon} = \frac{\rho_S}{\epsilon}$ حاصل ہوتا ہے۔

ان نتائج سے صاف ظاہر ہے کہ موصل اور ذو برق کے سرحد پر برقی میدان کے جوابات موصل اور خالی خلاء کے سرحد کے جوابات میں ϵ_0 کی جگہ ϵ پر کرنے سے حاصل ہوتے ہیں یعنی

$$(5.55) \quad \begin{aligned} D_m &= E_m = 0 \\ D_n &= \epsilon E_n = \rho_S \end{aligned}$$

5.10 برق گیر (کپیسٹر)

شکل 5.10 میں دو عدد موصل M_1 اور M_2 دکھائے گئے ہیں جن کے گرد ذو برق پایا جاتا ہے۔ M_1 پر کل $-Q$ اور M_2 پر کل $+Q$ بار پایا جاتا ہے۔ ان باروں کے علاوہ پورے نظام میں کوئی اور بار نہیں پایا جاتا۔ یوں پورا نظام بے بار ہے۔ چونکہ موصل پر صرف سطحی بار پایا جاتا ہے لہذا دونوں موصل پر بار سطحی کثافتِ بار کی صورت میں پایا جائے گا۔

گاوس کے قانون کے تحت M_2 سے عمودی سمت میں $+Q$ کے برابر برقی بہاؤ کا اخراج اور M_1 پر عمودی سمت میں اتنی ہی برقی بہاؤ کا دخول ہو گا۔ یوں موصل کے گرد ذو برق میں کثافتِ برقی بہاؤ D اور برقی میدان کی شدت E پائی جائے گی۔ D اور E کی ابتدا M_2 سے ہو گی اور ان کا اختتام M_1 پر ہو گا۔

اس برقی میدان میں کسی بھی راستے ایک کولمب کا بار M_1 تا M_2 منتقل کرنے کی خاطر V_0 توانائی درکار ہو گی۔ موصل کی سطح ہم قوہ سطح ہوتی ہے لہذا پہلے موصل کی سطح سے کسی بھی نقطے سے دوسرے موصل کی سطح پر کسی بھی نقطے تک بار منتقل کرنے کی خاطر برابر توانائی درکار ہوتی ہے۔

برقی گنجائش⁵⁰ (کپیسٹنس) C کی تعریف

$$(5.56) \quad C = \frac{Q}{V_0}$$

ہے جہاں M_1 کو صفر برقی دباؤ پر تصور کرتے ہوئے M_2 کی برقی دباؤ V_0 اور مثبت موصل یعنی M_2 کا بار Q ہے۔ منفی موصل سے مثبت موصل تک اکائی مثبت بار منتقل کرنے کے لئے درکار توانائی V_0 کو مکمل کے ذریعے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ اسی طرح مثبت موصل پر بار Q کو گاوس کے قانون کی مدد سے بذریعہ سطحی مکمل حاصل کیا جاسکتا ہے۔ یوں صفحہ 100 پر مساوات 3.6 اور صفحہ 138 پر مساوات 4.11 کی مدد سے برقی گنجائش (کپیسٹنس) کی عمومی مساوات

$$(5.57) \quad C = \frac{\oint_S \epsilon E \cdot dS}{-\int_-^+ E \cdot dL}$$

لکھی جاسکتی ہے۔

دونوں موصل پر بار دگنا کرنے سے گاوس کے قانون کے تحت برقی بہاؤ بھی دگنی ہو جائے گی۔ یوں D اور E بھی دگنے ہوں گے جس سے دونوں موصل کے مابین برقی دباؤ بھی دگنا ہو گا۔ اس طرح دگنا بار تقسیم دگنا دباؤ ایک بار پھر وہی برقی گنجائش (کپیسٹنس) دے گا۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ بوق سگنل⁵¹ کے برقی گنجائش (کپیسٹنس) کی قیمت کا دارومدار موصل کے اشکال، ان کے درمیان فاصلہ اور برقی مستقل پر منحصر ہے ناکہ موصل پر کل بار کے۔

برقی گنجائش (کپیسٹنس) کی اکائی فیراڈ⁵² ہے جسے F سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ ایک کولمب فی وولٹ ایک فیراڈ⁵³ کے برابر ہے۔ ایک فیراڈ نہایت بڑی قیمت ہے اور عام طور پر برقی گنجائش (کپیسٹنس) کو مائیکرو فیراڈ μF یا پیکو فیراڈ pF میں ناپا جاتا ہے۔

5.10.1 متوازی چادر برق گیر

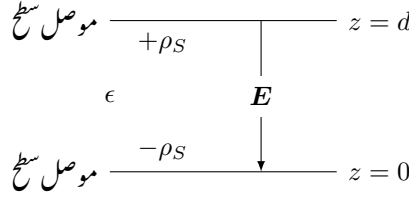
شکل 5.11 میں دو لامحدود متوازی موصل چادر دکھائے گئے ہیں۔ چٹلی چادر $z = 0$ پر ہے اور اس پر سطحی کثافت بار $+\rho_s$ پائی جاتی ہے جبکہ بالائی چادر $z = d$ پر ہے اور اس پر سطحی کثافت بار $-\rho_s$ پائی جاتی ہے۔ اس مسئلے کو ہم

capacitance⁵⁰

capacitor⁵¹

Farad⁵²

⁵³ یہ اکائی انگلستانی ماہر طبیعیات ماگل فیراڈے کے نام سے منسوب ہے۔



شکل 5.11: متوازی چادر برق گیر۔

پہلے تفصیلی طور پر دیکھ چکے ہیں۔ دو چادروں کے درمیان میدان صفحہ 78 پر مساوات 2.44 دیتا ہے جہاں مثبت چادر $x = 0$ اور منفی چادر $x = x_1$ پر رکھے گئے تھے۔ یوں موجودہ شکل کے مطابق مساوات 2.44 کی صورت

$$\mathbf{E} = -\frac{\rho_S}{\epsilon} \mathbf{a}_z$$

ہوگی۔ میدان مثبت سے منفی چادر کی سمت میں ہے۔ مثبت سطح سے خارج برقی بہاؤ کی کثافت مثبت ہے یعنی اس سطح پر عمودی $D_+ = \rho_S$ کے برابر ہے جبکہ منفی چادر پر برقی بہاؤ داخل ہوتا ہے لہذا یہاں $D_- = -\rho_S$ ہوگا۔

منفی چادر کو برقی زمین تصور کرتے ہوئے مثبت چادر پر

$$V = - \int_0^d \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = \int_0^d \frac{\rho_S \mathbf{a}_z}{\epsilon} \cdot dz \mathbf{a}_z = \int_0^d \frac{\rho_S}{\epsilon} dz = \frac{\rho_S d}{\epsilon}$$

برقی دباؤ ہوگا۔ لامحدود چادر پر لامحدود بار پایا جائے گا جس سے چادر لامحدود برقی گنجائش (کپیسٹنس) کا حامل ہوگا۔ حقیقی برق گیر محدود رقبے کے چادر سے بنائے جاتے ہیں۔ اگر محدود رقبے کے متوازی چادروں کے اطراف کی لمبائیاں سطحوں کے مابین فاصلے سے زیادہ ہو تو ایسی صورت میں چادروں کے درمیانی خطے میں برقی میدان لامحدود چادروں کے میدان کی مانند ہی ہوگا۔ S رقبے کے چادروں کے برق گیر کو لیتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ مثبت چادر پر کل

$$Q = \int_S \rho_S dS = \rho_S S$$

بار پایا جائے گا۔ یوں اس کی برقی گنجائش (کپیسٹنس)

$$(5.58) \quad C = \frac{Q}{V} = \frac{\epsilon S}{d}$$

ہوگی۔ برقی گیسر کے کناروں کے قریب میدان پھول کر برقی گیسر سے باہر نکلے گا۔ میدان کے پھولنے⁵⁴ کو ہم نے نظر انداز کیا ہے۔ برقی گنجائش (کپیسٹنس) کی قیمت رقبہ بڑھا کر اور چادروں کے درمیان فاصلہ کم کرتے ہوئے حاصل کیا جاتا ہے۔ اسی طرح چادروں کے درمیان زیادہ سے زیادہ برقی مستقل کا ذوبرق استعمال کرتے ہوئے برقی گنجائش (کپیسٹنس) بڑھائی جاسکتی ہے۔

بلند تر تعدد پر چلنے والے برقی گیسر ابرق استعمال کرتے ہوئے بنائے جاتے ہیں۔ ابرق برقی گیسر⁵⁵ انتہائی کم برقی طاقت ضائع کرتا ہے۔ ابرق کی پتری کے دونوں جانب موصل مادے کی تہہ چڑھا⁵⁶ کر برقی گیسر تیار کیا جاتا ہے۔

مثال 5.8: ایک ملی میٹر کے ایک چوتھائی موٹا اور ایک سنٹی میٹر اطراف کے مربع ابرق کے پتری کے دونوں جانب المونیم کی تہہ چڑھا کر برقی گیسر تیار کیا گیا۔ اس کی برقی گنجائش (کپیسٹنس) دریافت کریں۔

حل: کتاب کے آخر میں صفحہ 831 پر دیے ضمیمے سے ابرق کا جزوی برقی مستقل $\epsilon_R = 5.4$ حاصل کیا جاسکتا ہے۔ یوں

$$C = \frac{5.4 \times 0.01^2}{36\pi \times 10^9 \times 0.25 \times 10^{-3}} = 19.1 \text{ pF}$$

حاصل ہوتا ہے۔

5.10.2 ہم محوری برقی گیسر

صفحہ 142 پر مساوات 4.18

$$V = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

fringing⁵⁴
mica capacitor⁵⁵
deposit⁵⁶

ہم محوری تار کے دو تاروں کے درمیان برقی دباؤ دیتا ہے جہاں اندرونی تار پر کلیری کشافیت بار ρ_L ہے۔ بیرونی تار کو برقی زمین تصور کیا گیا ہے۔ L لمبائی کے ہم محوری تار کے اندرونی تار پر یوں $Q = \rho_L L$ بار پایا جائے گا۔ اس طرح اتنی تار کا برقی گنجائش (کپیسٹنس)

$$(5.59) \quad C = \frac{Q}{V} = \frac{\rho_L L}{\frac{2\pi\epsilon}{\ln \frac{\rho_2}{\rho_1}}} = \frac{2\pi\epsilon L}{\ln \frac{\rho_2}{\rho_1}}$$

ہو گا جہاں اندرونی تار کا رداس ρ_1 جبکہ بیرونی تار کا رداس ρ_2 ہے۔

5.10.3 ہم محوری کرہ برقی گیسر

محدد کے مرکز پر r_A اور r_B رداس کے موصل کرہ سطح ہیں جہاں $r_B > r_A$ ہے۔ اندرونی سطح پر $+Q$ اور بیرونی سطح پر $-Q$ بار پایا جاتا ہے۔ گاوس کے قانون کے تحت اندرونی سطح کے اندر یعنی $r < r_A$ اور بیرونی سطح باہر یعنی $r > r_B$ پر میدان صفر ہو گا۔ دونوں سطحوں کے درمیان میدان بالکل ایسا ہی ہو گا جیسے محدود کے مرکز پر نقطہ بار $+Q$ کا میدان ہوتا ہے۔ یوں بیرونی سطح کو برقی زمین تصور کرتے ہوئے اندرونی سطح پر برقی دباؤ صفحہ 140 پر مساوات 4.13

$$V_{AB} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)$$

سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ اس طرح ان سطحوں کا برقی گنجائش (کپیسٹنس)

$$(5.60) \quad C = \frac{Q}{V_{AB}} = \frac{4\pi\epsilon}{\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}}$$

ہو گا۔

ایک دلچسپ صورت حال کو دیکھتے ہیں۔ اگر r_B کو لامحدود کر دیا جائے تب مندرجہ بالا مساوات سے

$$(5.61) \quad C = 4\pi\epsilon R \quad (\text{کپیسٹنس})$$

حاصل ہوتا ہے جہاں r_A کی جگہ R لکھا گیا ہے۔ یہ مساوات رداس R کرہ کی برقی گنجائش (کپیسٹنس) دیتا ہے۔ یاد رہے کہ اس برقی گیسر کی دوسری سطح لامحدود فاصلے پر ہے۔

مثال 5.9: آپ نے بچپن میں بلور تو کھیلیں ہوں گے۔ بلور کا قطر تقریباً ایک سنٹی میٹر ہوتا ہے۔ خالی خلاء میں موصل بلور کی برقی گنجائش (کپیسٹنس) حاصل کریں۔

حل:

$$C = \frac{0.5 \times 10^{-2}}{9 \times 10^9} = 0.55 \text{ pF}$$

r_A رداس کے بار بردار موصل بلور کے اوپر r_A تا r_1 برقی مستقل ϵ_1 کے ذو برق کی تہہ چڑھانے سے $D = \frac{Q}{4\pi r^2} \mathbf{a}_r$ کی بدولت

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_1 r^2} \mathbf{a}_r & (r_A < r < r_1) \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r & (r > r_1) \end{cases}$$

ہو گا۔ برقی زمین کو لامحدود فاصلے پر رکھتے ہوئے بلور کا برقی دباؤ

$$\begin{aligned} V &= - \int_{\infty}^{r_1} \frac{Q dr}{4\pi\epsilon_1 r^2} - \int_{r_1}^{r_A} \frac{Q dr}{4\pi\epsilon_1 r^2} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_1} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_1} \right) \end{aligned}$$

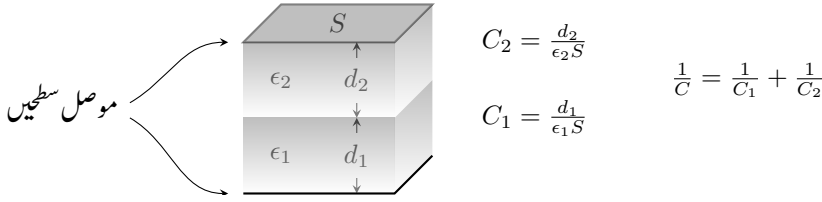
ہو گا جس سے برقی گنجائش (کپیسٹنس)

$$(5.62) \quad C = \frac{Q}{V} = \frac{4\pi}{\frac{1}{\epsilon_0 r_1} + \frac{1}{\epsilon_1} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_1} \right)}$$

حاصل ہوتی ہے۔

5.11 سلسلہ وار اور متوازی جڑے برق گیر

متوازی چادر برق گیر میں دو مختلف ذو برق بھرنے کا برقی گنجائش (کپیسٹنس) پر اثر دیکھتے ہیں۔ ایسا برق گیر شکل 5.12 میں دکھایا گیا ہے۔ چادروں کے درمیان فاصلہ چادر کے اطراف کی لمبائیوں سے نہایت کم ہونے کی صورت میں انہیں لامحدود چادروں کی طرح تصور کیا جاسکتا ہے۔ منفی چادر پر ϵ_1 برقی مستقل کی d_1 موٹائی کی تہہ اور مثبت چادر پر ϵ_2 برقی مستقل کی d_2 موٹائی کی تہہ ہیں۔ منفی چادر پر $-\rho_S$ جبکہ مثبت چادر پر $+\rho_S$ سطحی کثافتِ بار کی صورت میں چادروں کے درمیان $D = \rho_S$ ہو گا۔ یوں ϵ_1 ذو برق کے خطے میں



شکل 5.12: سلسلہ وار برق گیر۔

$$E_1 = \frac{\rho_S}{\epsilon_1}$$

جبکہ ϵ_2 ذو برق کے خطے میں

$$E_2 = \frac{\rho_S}{\epsilon_2}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس طرح

$$V = E_1 d_1 + E_2 d_2 = \frac{\rho_S d_1}{\epsilon_1} + \frac{\rho_S d_2}{\epsilon_2}$$

ہو گا جبکہ مثبت چادر پر بار $Q = \rho_S S$ ہو گا جس سے برقی گنجائش (کپیسٹنس)

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{S}{\frac{d_1}{\epsilon_1} + \frac{d_2}{\epsilon_2}} = \frac{1}{\frac{d_1}{\epsilon_1 S} + \frac{d_2}{\epsilon_2 S}} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$$

یعنی

$$(5.63) \quad \frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

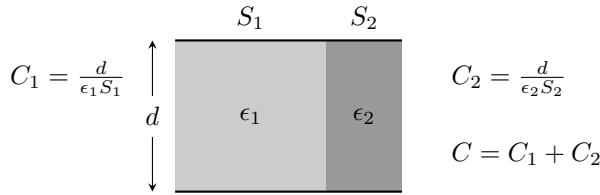
لکھی جاسکتی ہے جہاں

$$(5.64) \quad C_1 = \frac{d_1}{\epsilon_1 S}$$

$$C_2 = \frac{d_2}{\epsilon_2 S}$$

کے برابر ہیں۔ یہی جواب شکل 5.12 میں سلسلہ وار جڑے C_1 اور C_2 کی نشاندہی کرتے ہوئے لکھا جاسکتا ہے۔

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ موصل متوازی دو چادروں کے درمیان تیسرے اور چوتھے ذورق کے تہہ دئے جاسکتے ہیں۔ انہیں سلسلہ وار برق گیر تصور کرتے ہوئے حل کیا جاسکتا ہے۔



شکل 5.13: متوازی جڑے برق گیر۔

شکل 5.13 میں دو چادروں کے درمیان دو مختلف ذورق اس طرح بھرے گئے ہیں کہ یہ متوازی جڑے برق گیر کو جنم دیں۔ ہم شکل کو دیکھ کر ہی

$$(5.65) \quad C = C_1 + C_2$$

لکھ سکتے ہیں۔ آئیں اتنی جلدی کرنے کی بجائے اس مسئلے کا ریاضیاتی حل نکالیں۔ دونوں موصل چادر ہم توہ ہیں لہذا پچلی چادر کو برقی زمین یعنی صفر وولٹ اور دوسری چادر کو V_0 برقی دباؤ پر تصور کرتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔ یوں چادروں کے درمیان نخلے میں $E = \frac{V_0}{d}$ ہو گا جس سے بائیں ہاتھ، یعنی ϵ_1 برقی مستقل کے ذورق میں $D_1 = \epsilon_1 E$ جبکہ دائیں ہاتھ کے ذورق میں $D_2 = \epsilon_2 E$ ہوں گے۔ D_1 اور D_2 موصل چادروں کے عمودی ہیں لہذا سرحدی شرائط کے تحت مثبت چادر کے S_1 حصے پر $\rho_1 = D_1$ جبکہ اس کے S_2 حصے پر $\rho_2 = D_2$ ہو گا۔ یوں مثبت چادر پر کل بار

$$Q = \rho_1 S_1 + \rho_2 S_2 = \epsilon_1 \frac{V_0}{d} S_1 + \epsilon_2 \frac{V_0}{d} S_2$$

سے برقی گنجائش (کپیسٹنس)

$$C = \frac{Q}{V_0} = \frac{\epsilon_1 S_1}{d} + \frac{\epsilon_2 S_2}{d}$$

یعنی

$$(5.66) \quad C = C_1 + C_2$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں

$$(5.67) \quad C_1 = \frac{\epsilon_1 S_1}{d}$$

$$C_2 = \frac{\epsilon_2 S_2}{d}$$

کے برابر ہیں۔

5.12 دو متوازی تاروں کی برقی گنجائش (کپیسٹنس)

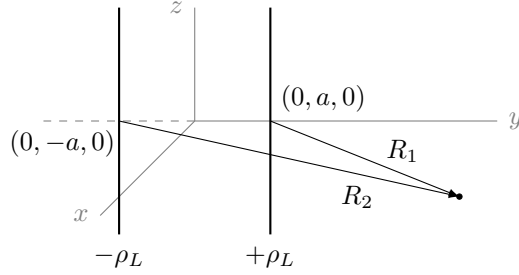
شکل 5.14 میں دو لامحدود لمبائی کے تار z محدد کے متوازی دکھائے گئے ہیں۔ ہم ایسے متوازی جوڑی کی برقی گنجائش (کپیسٹنس) حاصل کرنا چاہتے ہیں۔ ہم قوہ تار کی طرح دو متوازی تار بھی انتہائی اہم ہیں اور ان سے زندگی میں بار بار واسطہ پڑتا ہے۔

ایک تار جو $(0, a, 0)$ سے گزرتی ہے پر مثبت لکیری کثافت ρ_L پایا جاتا ہے جبکہ دوسری تار جو $(0, -a, 0)$ سے گزرتی ہے پر منفی لکیری کثافت ρ_L پایا جاتا ہے۔ z محدد پر لامحدود لمبائی کے لکیری کثافت بار سے پیدا برقی دباؤ صفحہ 141 پر مساوات 4.16

$$V = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\rho_0}{\rho_1}$$

دیتا ہے جہاں برقی میدان کو ρ_0 پر تصور کیا گیا۔ اس مساوات کو شکل 5.14 کے لئے ترتیب دیتے ہوئے دونوں تاروں کا مجموعی برقی دباؤ

$$V = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \left(\ln \frac{R_{10}}{R_1} - \ln \frac{R_{20}}{R_2} \right) = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_{10}R_2}{R_{20}R_1}$$



شکل 5.14: دو متوازی تاروں کی برقی گنجائش (کپیسٹنس)۔

لکھا جاسکتا ہے۔ اگر $R_{10} = R_{20}$ رکھا جائے تب مندرجہ بالا مساوات

$$V = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

صورت اختیار کر لے گی۔ سطح $y = 0$ پر $R_{10} = R_{20}$ ہوگا لہذا دراصل ہم برقی زمین کو $y = 0$ سطح پر رکھ رہے ہیں۔ اب R_1 اور R_2 کو x اور y کی صورت

$$R_1 = x\mathbf{a}_x + (y - a)\mathbf{a}_y$$

$$R_2 = x\mathbf{a}_x + (y + a)\mathbf{a}_y$$

میں لکھتے ہوئے

$$(5.68) \quad V = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \sqrt{\frac{x^2 + (y + a)^2}{x^2 + (y - a)^2}} = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{x^2 + (y + a)^2}{x^2 + (y - a)^2}$$

یا

$$(5.69) \quad e^{\frac{4\pi\epsilon_0 V}{\rho_L}} = \frac{x^2 + (y + a)^2}{x^2 + (y - a)^2}$$

لکھا جاسکتا ہے۔

ہم توہ سطحیں حاصل کرنے کی خاطر مندرجہ بالا مساوات کو کسی اٹل برقی دباؤ مثلاً V_1 کے لئے لکھ کر حل کرتے ہیں۔ چونکہ V_1 اٹل یا مستقل قیمت ہے جو تبدیل نہیں ہوتا لہذا مندرجہ بالا مساوات میں

$$(5.70) \quad K_1 = e^{\frac{4\pi\epsilon_0 V_1}{\rho_L}}$$

لکھ کر اسے

$$K_1 = \frac{x^2 + (y + a)^2}{x^2 + (y - a)^2}$$

لکھا جاسکتا ہے جسے حل کرتے ہوئے

$$x^2 + y^2 - 2ay \frac{K_1 + 1}{K_1 - 1} = -a^2$$

لکھا جاسکتا ہے۔ مساوات کے دونوں جانب $a^2 \frac{(K_1 + 1)^2}{(K_1 - 1)^2}$ جمع کرتے ہوئے یوں

$$(5.71) \quad x^2 + \left[y - a \left(\frac{K_1 + 1}{K_1 - 1} \right) \right]^2 = \left(\frac{2a\sqrt{K_1}}{K_1 - 1} \right)^2$$

لکھا جاسکتا ہے جو رداس $\frac{2a\sqrt{K_1}}{K_1 - 1}$ کے گول دائرے کی مساوات ہے جس کا مرکز $\left[0, \frac{a(K_1 + 1)}{K_1 - 1} \right]$ پر ہے۔ یہ مساوات کہتا ہے کہ ہم قوہ سطح z کی قیمت پر منحصر نہیں ہے یعنی یہ تکی شکل رکھتی ہے۔ مساوات 5.71 میں

$$(5.72) \quad b = \frac{2a\sqrt{K_1}}{K_1 - 1}$$

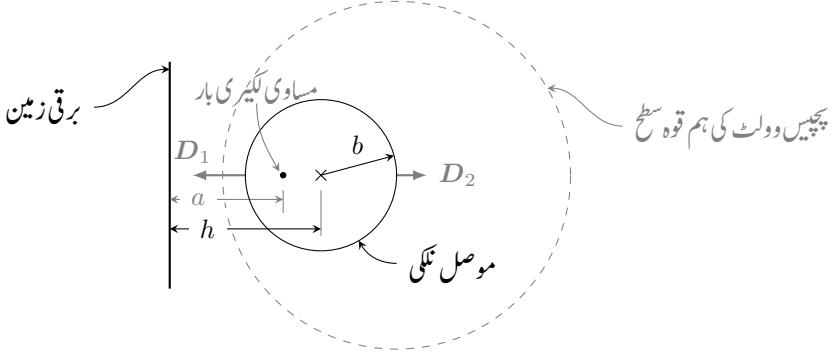
$$h = a \left(\frac{K_1 + 1}{K_1 - 1} \right)$$

لکھتے ہوئے اسے

$$(5.73) \quad x^2 + (y - h)^2 = b^2$$

لکھا جاسکتا ہے۔ آئیں ان نتائج پر غور کریں۔

شکل 5.14 کو عکس کے نقطہ نظر سے دیکھتے ہوئے $y = 0$ پر برقی زمین رکھتے ہوئے منفی کشائفت بار کے تار کو ہٹانے سے زمین کے دائیں جانب میدان میں کوئی تبدیلی پیدا نہیں ہوگی۔ دائیں جانب اب بھی ہم قوہ سطحیں b رداس کے دائرے بنائے گئے جن کا مرکز زمین سے h فاصلے پر ہوگا۔ ہم قوہ سطح کے رداس اور h کا دارومدار K_1 پر ہے جو از خود V_1 پر منحصر ہے۔ ہم مختلف برقی دباؤ V_2, V_3, \dots کے لئے K_2, K_3, \dots حاصل کرتے ہوئے ایسے ہم قوہ سطحوں کے رداس اور زمین سے ان کے مرکز کے فاصلے حاصل کر سکتے ہیں۔ ہم V_1 ہم قوہ سطح کی جگہ V_1 برقی دباؤ کی موصل سطح رکھ سکتے ہیں۔ ایسا کرنے سے میدان پر کہیں بھی کوئی اثر نہیں آئے گا۔



شکل 5.15: زمین کے قریب موٹی تار کی برقی گنجائش (کپیسٹنس)۔

آئیں ان معلومات کو استعمال کرتے ہوئے لامحدود سیدھی موصل سطح سے h فاصلے پر b رداس کے موصل نکلی کی برقی گنجائش (کپیسٹنس) حاصل کریں۔ یہ صورت حال شکل 5.15 میں دکھائی گئی ہے۔ یہاں h اور b دئے گئے ہیں جن سے مساوات 5.72 کی مدد سے a ، K_1 اور یوں V_1 معلوم کیا جاسکتا ہے۔ مساوات 5.72 کو حل کرتے ہوئے

$$(5.74) \quad a = \sqrt{h^2 - b^2}$$

$$K_1 = \left(\frac{h + \sqrt{h^2 - b^2}}{b} \right)^2$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس سے

$$V_1 = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{h + \sqrt{h^2 - b^2}}{b}$$

حاصل ہوتا ہے۔ چونکہ زمین صفر وولٹ اور موصل نکلی V_1 وولٹ پر ہے لہذا ان کے درمیان V_1 برقی دباؤ ہو گا۔

شکل 5.14 میں مثبت تار کے لمبائی پر کل بار $Q = \rho_L L$ پایا جاتا ہے۔ شکل 5.15 میں بھی برقی زمین کے اتنے ہی لمبائی پر اتنے ہی مقدار مگر منفی بار ہو گا جبکہ b رداس کے موصل نکلی پر یہی $Q = \rho_L L$ بار ہو گا۔ یوں L لمبائی کے موصل نکلی اور زمین کے درمیان

$$(5.75) \quad C = \frac{Q}{V_1} = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln \frac{h + \sqrt{h^2 - b^2}}{b}} = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\cosh^{-1} \frac{h}{b}}$$

برقی گنجائش (کپیسٹنس) پایا جائے گا۔

زمین سے دور کم موٹائی کے تار کی صورت میں $h \gg b$ ہو گا لہذا مساوات 5.75

$$(5.76) \quad C = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln \frac{2h}{b}} \quad h \gg b$$

صورت اختیار کر لے گا جو نسبتاً آسان مساوات ہے۔ شکل 5.14 میں دو تاروں کے درمیان برقی گنجائش (کپیسٹنس) مساوات 5.75 کے جواب کا نصف ہو گا چونکہ مثبت تار اور زمین کے مابین برقی گیر اور منفی تار اور زمین کے مابین برقی گیر کو سلسلہ وار جڑا تصور کیا جا سکتا ہے۔

کچھ حقائق مثال کی مدد سے بہتر سمجھ آتے ہیں۔ آئیں مثال 5.10 کی مدد سے ایسی چند باتیں سیکھیں۔

مثال 5.10: برقی زمین کے متوازی خالی خلاء میں دس میٹر کے فاصلے پر پانچ میٹر رداس کی موصل نکلی پائی جاتی ہے جس پر پچاس وولٹ کا برقی دباؤ ہے۔

- نکلی پر لکیری کثافتِ بار حاصل کریں۔
- ایک میٹر لمبائی کے لئے نکلی اور زمین کے مابین برقی گنجائش (کپیسٹنس) حاصل کریں۔
- پچیس وولٹ ہم قوتہ سطح کا رداس اور زمین سے اس کے مرکز کا فاصلہ حاصل کریں۔
- زمین سے ایسی لکیری کثافتِ بار کا فاصلہ دریافت کریں جو ہو بہو ایسی ہی ہم قوتہ سطحیں پیدا کرے گا۔
- نکلی پر زیادہ سے زیادہ اور کم سے کم سطحی کثافتِ بار حاصل کریں۔

حل: صورت حال شکل 5.15 میں دکھائی گئی ہے۔

• یہاں $h = 10$ جبکہ $b = 5$ ہیں لہذا مساوات 5.74 کی مدد سے

$$a = \sqrt{10^2 - 5^2} = 8.66 \text{ m}$$

$$K_1 = \left(\frac{10 + \sqrt{10^2 - 5^2}}{5} \right)^2 = 13.92$$

حاصل ہوتے ہیں۔ مساوات 5.70 کے استعمال سے یوں

$$\rho_L = \frac{4\pi\epsilon_0 V_1}{\ln K_1} = \frac{50}{9 \times 10^9 \times \ln 13.92} = 2.11 \frac{\text{nC}}{\text{m}}$$

حاصل ہوتا ہے۔

• مساوات 5.75 یا برقی گنجائش (کپیسٹنس) کی تعریف سے فی میٹر برقی گنجائش حاصل کرتے ہیں۔

$$C = \frac{\rho_L L}{V_1} = \frac{2.11 \times 10^{-9} \times 1}{50} = 4.22 \text{ nF}$$

• پچیس وولٹ ہم قوہ سطح کے لئے مساوات 5.70 سے

$$K_2 = e^{\frac{4\pi\epsilon_0 V_2}{\rho_L}} = e^{\frac{25}{9 \times 10^9 \times 2.11 \times 10^{-9}}} = 3.73$$

حاصل ہوتا ہے۔ یوں مساوات 5.72 سے پچیس وولٹ کے ہم قوہ سطح کے لئے

$$b = \frac{2 \times 8.66 \times \sqrt{3.73}}{3.73 - 1} = 12.25 \text{ m}$$

$$h = 8.66 \times \left(\frac{3.73 + 1}{3.73 - 1} \right) = 15 \text{ m}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ پچیس وولٹ کے ہم قوہ سطح جس کا رداس سوا بارہ میٹر اور جو زمین سے پندرہ میٹر کے فاصلے پر ہے کو شکل میں ہلکی سیاہی سے نقطہ دار گول دائرے سے دکھایا گیا ہے۔

• برقی زمین سے 8.66 m فاصلے پر $2.11 \frac{\text{nC}}{\text{m}}$ لکیری کثافتِ باریک تار بالکل اسی طرز کے ہم قوہ سطحیں پیدا کرے گا۔

• کسی بھی جگہ E کو مساوات 5.68

$$V = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0} \left[\ln(x^2 + (y+a)^2) - \ln(x^2 + (y-a)^2) \right]$$

کے ڈھلوان $E = -\nabla V$ سے حاصل کیا جاسکتا ہے جس سے

$$D = \epsilon_0 E = -\epsilon_0 \nabla V = -\epsilon_0 \left(\frac{\partial V}{\partial x} a_x + \frac{\partial V}{\partial y} a_y \right)$$

بھی حاصل ہوتا ہے جہاں

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{2x}{x^2 + (y+a)^2} - \frac{2x}{x^2 + (y-a)^2} \right]$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{2(y+a)}{x^2 + (y+a)^2} - \frac{2(y-a)}{x^2 + (y-a)^2} \right]$$

کے برابر ہیں۔

چونکہ موصل کے سطح پر D عمودی ہوتا ہے اور اس کی قیمت سطحی کثافت بار کے برابر ہوتی ہے لہذا ہم موصل نکلی پر برقی زمین کے قریبی جانب D_1 اور اس سے دور جانب D_2 کی قیمت حاصل کرتے ہیں۔ انہیں شکل 5.15 میں دکھایا گیا ہے۔ زمین سے نکلی کا قریبی فاصلہ $h - b = 5 \text{ m}$ ہے۔ یوں $x = 0$ اور $y = 5$ ہو گا جس سے

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{2 \times 0}{0^2 + (5 + 8.66)^2} - \frac{2 \times 0}{0^2 + (5 - 8.66)^2} \right] = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{2(5 + 8.66)}{0^2 + (5 + 8.66)^2} - \frac{2(5 - 8.66)}{0^2 + (5 - 8.66)^2} \right] = \frac{0.693\rho_L}{4\pi\epsilon_0}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ یوں

$$D_1 = -\frac{0.693\rho_L}{4\pi} a_y$$

ہو گا۔ زمین سے دور نکلی پر $x = 0$ اور $y = h + b = 10 + 5 = 15 \text{ m}$ ہیں جس سے

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{2 \times 0}{0^2 + (15 + 8.66)^2} - \frac{2 \times 0}{0^2 + (15 - 8.66)^2} \right] = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{2(15 + 8.66)}{0^2 + (15 + 8.66)^2} - \frac{2(15 - 8.66)}{0^2 + (15 - 8.66)^2} \right] = -\frac{0.231\rho_L}{4\pi\epsilon_0}$$

یا

$$D_2 = \frac{0.231\rho_L}{4\pi} a_y$$

حاصل ہوتا ہے۔ دونوں جوابات سے ظاہر ہے کہ بہاؤ کا اخراج سطح کے عمودی ہے۔ یوں موصل نکلی پر

$$\rho_{S, \text{قریبی}} = \frac{0.693\rho_L}{4\pi}$$

$$\rho_{S, \text{دور}} = \frac{0.231\rho_L}{4\pi}$$

پایا جائے گا۔ یاد رہے کہ قریبی جانب منفی جواب کا مطلب ہے کہ اخراج زمین کی جانب ہے جبکہ دور جانب مثبت جواب کا مطلب ہے کہ اخراج a_y جانب ہے۔ دونوں جانب اخراج ہی ہے لہذا سطحی کثافت بار دونوں جگہوں پر مثبت ہی ہے۔

اس مثال سے صاف ظاہر ہے کہ نکلی کا بار بالکل اس طرح عمل کرتا ہے جیسے برقی زمین سے 8.66 m فاصلے پر باریک بار بردار تار جس پر $2.11 \frac{\text{nC}}{\text{m}}$ پایا جاتا ہو۔ نکلی سے پیدا ہونے والی قوتہ سطحیں اسی فرضی لکیری کثافت بار کے تار سے حاصل کی جاتی ہیں۔

مشق 5.5: مساوات 5.74 کو ثابت کریں۔

سوالات

سوال 5.1: نکلی محدود میں کثافت برقی رو $J = 50e^{-1.5z}(\rho^2 a_\rho + a_z) \frac{A}{m^2}$ دی گئی ہے۔ الف) سطح $z = 0$ اور $z = 1$ پر رداس $0 < \rho < 1$ کی ٹکلیا سے a_z سمت میں گزرتی برقی رو دریافت کریں۔ ب) بند نیلن $0 \leq z \leq 1$ ، $0 \leq \rho \leq 1$ سے خارج کل برقی رو حاصل کریں۔

جوابات: 157 A ، 35 A ، 41 A

سوال 5.2: کثافت برقی رو $J = \frac{550 \sin 2\theta}{r^2 + 6} \frac{A}{m^2}$ دی گئی ہے۔ کروی سطح $r = 0.5$ ، $0.1\pi \leq \theta \leq \pi$ سے رداسی سمت میں خارج کل برقی رو حاصل کریں۔ اس سطح پر اوسط کثافت برقی رو دریافت کریں۔

جوابات: 29.86 A ، $77.9 \frac{A}{m^2}$

سوال 5.3: دو متوازی سطحیں $z = 0$ اور $z = 10 \text{ mm}$ پر پائے جاتے ہیں جن کے درمیان 1000 V کا برقی دباؤ ہے۔ چمکی سطح سے الیکٹران صفر ابتدائی رفتار کے ساتھ خارج ہو کر بالائی سطح کی جانب اسراع پذیر ہوتے ہیں جہاں انہیں وصول کیا جاتا ہے۔ الیکٹران کا بار $-1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ جبکہ اس کی کمیت $9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$ ہے۔ چمکی سطح سے کل $50 \mu\text{A}$ برقی رو 0.1 mm رداس کے شعاع کی صورت میں خارج ہوتی ہے۔ چادروں کے درمیان E حاصل کریں۔ اسراع پذیر الیکٹران کی رفتار $v(t)$ کی مساوات حاصل کریں۔ اسی طرح $z(t)$ اور $v(z)$ بھی حاصل کریں۔ کثافت برقی رو اور حجمی کثافت بار کے مساوات حاصل کریں۔

جوابات: $z(t) = 8.792 \times 10^{15} t^2 \text{ m}$ ، $v(t) = 1.758 \times 10^{16} t \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ، $a(t) = -10^5 a_z \frac{\text{V}}{\text{m}}$ ، $v(z) = 1.87 \times 10^8 \sqrt{z} \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ، $\frac{-8.51 \times 10^{-6}}{\sqrt{z}} \text{ C/m}^3$ ، $1592 \frac{\text{A}}{\text{m}^2}$

سوال 5.4: کثافت برقی رو $J = \frac{J_0 e^{-az}}{(y+1)(x+1)} a_z$ کی صورت میں سطح $z = 0$ ، $0 < x < 1$ ، $0 < y < 1$ سے گزرتی برقی رو حاصل کریں۔

جواب: $0.48 J_0$

سوال 5.5: کثافت برقی رو $J = 3xyz a_x + 2x^2 y z^2 a_y - 5xy^2 z^2 a_z$ کی صورت میں نقطہ $N(7, -4, 2)$ پر 1 m لمبائی اطراف کے مکعب سے کتنی برقی رو خارج ہوتی ہے؟ مکعب کے اطراف کارتیسی محدود کے متوازی ہیں جبکہ نقطہ N اس کا وسطی نقطہ ہے۔ مکعب میں بار کس شرح سے بڑھ رہی ہے؟

جواب: 1875 A ، $1875 \frac{C}{s}$ -

سوال 5.6: سیلیکان کی موصلیت $1200 \frac{S}{m}$ ہے۔ سیلیکان کا پچر $0 \leq z \leq 0.08$ ، $0.02 \leq \rho \leq 0.07$ ، $0 \leq \phi \leq 0.3\pi$ شکل رکھتا ہے۔ برقی شدت $E = \frac{0.005}{\rho} a_\phi \frac{V}{m}$ کی صورت میں پچر میں برقی رو اور اس کی مزاحمت حاصل کریں۔

جوابات: 0.6 A ، $6 m\Omega$

سوال 5.7: برقی شدت $E = \frac{0.005}{\rho} a_\rho \frac{V}{m}$ ہونے کی صورت میں سوال 5.6 کو دوبارہ حل کریں۔

جوابات: 0.3468 A ، $18 m\Omega$

سوال 5.8: پاکستان میں برقی طاقت کی پیداوار اور منتقلی واپڈا⁵⁷ کے ذمہ ہے۔ اگرچہ تانبہ کی موصلیت نہایت عمدہ ہے لیکن تانبہ مہنگا عنصر ہے لہذا برقی طاقت کے منتقلی کے لئے المونیم کی تار استعمال کی جاتی ہے۔ المونیم از خود کمزور عنصر ہے لہذا المونیم کے تاروں کو سنیل کے تار کے گرد لپیٹا جاتا ہے۔ فرض کریں کہ 2 mm رداس کے لوہے کی تار پر 3 mm المونیم کی تہہ چڑھائی جاتی ہے۔ ایسی ایک کلو میٹر لمبی تار کی مزاحمت حاصل کریں۔ المونیم اور لوہے کی موصلیت بالترتیب $3.82 \times 10^7 \frac{S}{m}$ اور $1.03 \times 10^7 \frac{S}{m}$ ہیں۔

جواب: $377.4 m\Omega$

سوال 5.9: ایک نخلے میں کثافت برقی رو کو $J = 0.02re^{-1000t} a_r \frac{A}{m^2}$ لکھا جاسکتا ہے۔ لمحہ $t = 1 \text{ ms}$ پر رداس $r = 3$ کے کرہ سے کتنی برقی رو خارج ہوگی۔ استمراری مساوات $\nabla \cdot J = -\frac{\partial \rho_h}{\partial t}$ استعمال کرتے ہوئے ρ_h حاصل کریں۔ ایسا کرتے ہوئے $t \rightarrow \infty$ پر $\rho_h \rightarrow 0$ لیں۔ حجمی کثافت بار ρ_h کی رفتار کی مساوات حاصل کریں۔

جوابات: 2.5 A ، $\rho_h = 60e^{-1000t} \mu C/m^3$ ، $333ra_r \frac{m}{s}$

سوال 5.10: برقی ہیٹر⁵⁸ عموماً نائیکروم کی تار سے بنائے جاتے ہیں۔ گھریلو 220 V اور 50 Hz پر چلنے والے 1 kW طاقت کے ہیٹر کے تار کا قطر حاصل کریں اگر تار کی لمبائی 4 m ہو۔ اس طاقت پر تار میں کثافت برقی رو حاصل کریں۔ صفحہ 831 پر دیے ضمیمے کی مدد لیں۔

$$\text{جواب: } 0.324 \text{ mm} \text{ ، } 55 \frac{\text{MA}}{\text{m}^2}$$

سوال 5.11: $N(0,0,2)$ سے گزرتی y محدد کے متوازی لکیری کثافتِ بار

$$\rho_L = 5 \frac{\text{nC}}{\text{m}} \quad (-\infty < y < \infty, x = 0, z = 2)$$

سے $M(5,3,1)$ پر D حاصل کریں۔

$$\text{جواب: } D = \frac{5 \times 10^{-9} (5a_x - 1a_z)}{2\pi \times 26}$$

سوال 5.12: لامحدود موصل زمینی سطح $z = 0$ رکھتے ہوئے سوال 5.11 کو دوبارہ حل کریں۔

$$\text{جواب: } D = \frac{5 \times 10^{-9} (40a_x - 112a_z)}{2\pi \times 884}$$

سوال 5.13: $N(0,0,2)$ سے گزرتی y محدد کے متوازی لکیری کثافتِ بار

$$\rho_L = 5 \frac{\text{nC}}{\text{m}} \quad (-\infty < y < \infty, x = 0, z = 2)$$

پایا جاتا ہے جبکہ $z = 0$ پر لامحدود موصل زمینی سطح موجود ہے۔ سطح کے $M(5,3,0)$ مقام پر سطحی کثافتِ بار حاصل کریں۔

$$\text{جواب: } -0.1097 \frac{\text{nC}}{\text{m}^2}$$

سوال 5.14: مشق 5.3 میں 300 K درجہ حرارت پر سیلیکان اور جر مینیم کے مستقل دئے گئے ہیں۔ اگر سیلیکان میں المونیم کا ایک ایٹم فی 1×10^7 سیلیکان ایٹم ملاوٹ شامل کی جائے تو سیلیکان کی موصلیت کیا ہوگی۔ سیلیکان کی تعدادی کثافت 5×10^{28} ایٹم فی مرلج میٹر ہے۔ (ہر ملاوٹی المونیم کا ایٹم ایک عدد آزاد خول پیدا کرتا ہے جن کی تعداد مشق میں دئے خالص سیلیکان میں آزاد خول کی تعداد سے بہت زیادہ ہوتی ہے لہذا ایسی صورت میں موصلیت صرف ملاوٹی ایٹوں کے پیدا کردہ آزاد خول ہی تعین کرتے ہیں۔)

$$\text{جواب: } 800 \frac{\text{S}}{\text{m}}$$

سوال 5.15: صفحہ 195 پر مثال 5.6 میں لامحدود موصل سطح $z = 0$ میں $(0, 0, z)$ پر پائے جانے والے نقطہ بار Q سے پیدا سطحی کثافتِ بار ρ_s حاصل کیا گیا۔ موصل سطح میں پائے جانے والا کل بار سطحی تکمیل سے حاصل کریں۔

جواب: $-Q$

سوال 5.16: صفحہ 182 پر تانبے کے ایک مربع میٹر میں کل آزاد بار مساوات 5.13 میں حاصل کیا گیا۔ ایک ایمپیئر کی برقی رو کتنے وقت میں اتنے بار کا اخراج کرے گا۔

جواب: چار سو اکتیس (431) سال۔

سوال 5.17: مساوات 5.75 میں $\ln \frac{h + \sqrt{h^2 - b^2}}{b} = \cosh^{-1} \frac{h}{b}$ لکھا گیا ہے۔ اسے ثابت کریں۔

سوال 5.18: پانچ میٹر رداس کی موصل ٹنگی کا محور برقی زمین سے تیرہ میٹر پر ہے۔ ٹنگی پر ایک سو وولٹ کا برقی دباؤ ہے۔

- ایسی لکیری کثافتِ بار کا زمین سے فاصلہ اور اس کا ρ_L حاصل کریں جو ایسی ہم قوہ سطح پیدا کرے۔
- موصل ٹنگی سے پیدا پچاس وولٹ کے ہم قوہ سطح کا رداس اور اس کے محور کا زمین سے فاصلہ دریافت کریں۔
- ٹنگی پر زمین کے قریب اور اس سے دور سطحی کثافتِ بار حاصل کریں۔

جوابات: 12 m ، $3.46 \frac{\text{nC}}{\text{m}}$ ، 13.4 m ، 18 m ، $1.65 \frac{\text{pF}}{\text{m}^2}$ اور $0.73 \frac{\text{pF}}{\text{m}^2}$

سوال 5.19: مندرجہ ذیل صورتوں میں موصل میں $|J|$ حاصل کریں۔ الف) حرکت پذیری $\frac{\text{m}^2}{\text{Vs}}$ 5.2×10^{-3} ، $\rho_h = -4 \times 10^9 \text{ C/m}^3$ اور برقی شدت $\frac{\text{mV}}{\text{m}}$ 72 ہے۔ ب) رفتار بہاؤ $\frac{\mu\text{m}}{\text{s}}$ 30 ہے جبکہ الیکٹران کی تعدادی کثافت 5.5×10^{28} فی مربع میٹر ہے۔ پ) موصلیت $\frac{\text{S}}{\text{m}}$ 2.5×10^6 جبکہ برقی شدت 50 mV ہے۔

جوابات: $1.5 \frac{\text{MA}}{\text{m}^2}$ ، $0.26 \frac{\text{MA}}{\text{m}^2}$ ، $0.125 \frac{\text{MA}}{\text{m}^2}$

سوال 5.20: نکلے محدود میں رداں $\rho = 0.2$ اور $\rho = 0.5$ پر موصل نکلے چادر پائے جاتے ہیں جبکہ ان چادروں کے درمیان خالی خلاء میں $V = 150\rho^3$ برقی دباؤ پایا جاتا ہے۔ الف) اندرونی اور بیرونی نکلے چادر پر سطحی کثافت بار دریافت کریں۔ ب) دونوں چادروں کے درمیان خطہ $0 < z < 1$ ، $0.2 < \rho < 0.5$ میں کل بار حاصل کریں۔ پ) خطہ $0 < z < 1$ میں کل بار حاصل کریں۔ یہاں چادروں پر اور خلاء میں پائے جانے والے تمام کو شامل کریں۔ یاد رہے کہ مثبت موصل چادر سے برقی بہاؤ کا اخراج ہوتا ہے۔

جوابات: $-0.159 \frac{nC}{m^2}$ ، $0.996 \frac{nC}{m^2}$ ، $-2.93 nC$ ، 0

سوال 5.21: گریفائٹ سے بنی نکلے جس کی لمبائی 4 cm ، اندرونی رداں $\rho = 5 \text{ cm}$ اور بیرونی رداں $\rho = 7 \text{ cm}$ ہے میں 2 A کی برقی رو رداں کی سمت میں گزر رہی ہے۔ گریفائٹ کی موصلیت $7 \times 10^4 \frac{S}{m}$ ہے۔ نکلے میں J ، E حاصل کریں۔ نکلے کے اندرونی اور بیرونی گول سطحوں کے درمیان برقی دباؤ V حاصل کرتے ہوئے ان کے درمیان مزاحمت R حاصل کریں۔ نکلے میں طاقت کا ضیاع $V \times I$ اور حجمی کمپل $\iiint J \cdot E dh$ سے حاصل کریں۔

جوابات: $J = \frac{7.96}{\rho} a_\rho$ ، $E = \frac{1.14e-4}{\rho} a_\rho$ ، $V = 38.25 \mu V$ ، $R = 19.12 \mu \Omega$ ، $76 \mu W$

سوال 5.22: رقبہ A کی ایک موصل چادر $z = 0$ اور دوسری $z = d$ پر رکھی گئی ہے۔ چادروں کے درمیانی خطے میں موصلیت $\sigma(z) = \sigma_0 e^{-z}$ ہے جہاں σ_0 مستقل ہے۔ چادر $z = 0$ کو صفر وولٹ پر رکھا جاتا ہے جبکہ چادر $z = d$ کو V_0 برقی دباؤ پر رکھا جاتا ہے۔ الف) دونوں چادروں کے درمیان مزاحمت حاصل کریں۔ ب) چادروں کے مابین برقی رو حاصل کریں۔ پ) چادروں کے درمیان کثافت برقی رو اور برقی میدان کی شدت حاصل کریں۔

جوابات: $R = \frac{e^d - 1}{A\sigma_0}$ ، $I = \frac{A\sigma_0 V_0}{e^d - 1}$ ، $J = -\frac{V_0 \sigma_0}{e^d - 1} a_z$ ، $E = -\frac{V_0 e^z}{e^d - 1} a_z$

سوال 5.23: خالی خلاء میں برقی دباؤ $V = 50(\rho^2 + 1)z \sin \phi$ دی گئی ہے۔ ہم قوہ سطح $V = 100 \text{ V}$ موصل سطح کو ظاہر کرتی ہے۔ اس سطح کی مساوات حاصل کریں۔ اس سطح پر نقطہ $(0.65, 0.25\pi, z)$ دیا گیا ہے۔ اس نقطے پر E حاصل کرتے ہوئے سطحی کثافت بار $|\rho_S|$ حاصل کریں۔

جوابات: $(\rho^2 + 1)z \sin \phi = 2$ ، $E = -91a_\rho - 154a_\phi - 50a_z$ ، $|\rho_S| = 1.65 \frac{nC}{m^2}$

سوال 5.24: مثبت z نقطے میں برقی دباؤ $V = \frac{50z(x+y)}{x^2+9}$ V دی گئی ہے۔ موصل سطح $z = 0$ پر E حاصل کریں۔ موصل سطح پر سطحی کثافت بار حاصل کریں۔ سطح پر $2 < x < 5$ ، $3 < y < 6$ کل بار حاصل کریں۔

$$\text{جوابات: } \rho_S = -\frac{50\epsilon_0(x+y)}{x^2+9} \frac{C}{m^2} , E = -\frac{50(x+y)}{x^2+9} a_z \frac{V}{m} , -1.52 \text{ nC}$$

سوال 5.25: خالی خلاء میں $V = 50 \ln \frac{(x+1)^2+(y+1)^2}{x^2+(y-1)^2}$ V پایا جاتا ہے۔ نقطہ $N(3, 1, 2)$ پر موصل سطح ہے۔ اس سطح پر E اور ρ_S حاصل کریں۔ سطح پر عمودی اکائی سمتیہ a_N حاصل کریں۔

جوابات: $E = 13.33a_x - 10a_y \frac{V}{m}$ ، $\rho_S = 148 \frac{\mu C}{m^2}$ ، $a_N = \frac{4}{5}a_x - \frac{3}{5}a_y$ ؛ چونکہ ہمیں یہ نہیں معلوم کہ موصل سطح نقطہ N کے کس جانب ہے لہذا سطحی کثافت بار مثبت یا منفی ہو سکتا ہے۔ یوں اکائی سمتیہ کی سمت الٹ بھی ممکن ہے۔

سوال 5.26: نقطہ بار $Q = 8\pi \mu C$ موصل زمین $z = 0$ کے قریب نقطہ $(2, 0, 4)$ اور $(-2, 0, 4)$ پر پائے جاتے ہیں۔ الف) محدود y پر D کی مساوات حاصل کریں۔ یاد رہے کہ برقی زمین میں بار کے عکس بھی کردار ادا کریں گے۔ ب) نقطہ $(0, 0, 0)$ پر سطحی کثافت بار حاصل کریں۔

$$\text{جوابات: } \rho_S = -0.36 \frac{\mu C}{m^2} , D = -16 \left[\frac{1}{[(x+2)^2+16]^{3/2}} + \frac{1}{[(x-2)^2+16]^{3/2}} \right] a_z \frac{\mu C}{m^2}$$

سوال 5.27: سطح $x = 0$ برقی زمین ہے۔ لکیری کثافت بار $2 \frac{nC}{m}$ مقام $y = 3$ ، $x = 2$ پر z محدود کے متوازی پایا جاتا ہے جبکہ لکیری کثافت بار $-5 \frac{nC}{m}$ مقام $y = 5$ ، $x = 4$ پر z محدود کے متوازی پایا جاتا ہے۔ نقطہ $N(7, 2, 3)$ پر برقی دباؤ حاصل کریں۔

جواب: 46.4 V

سوال 5.28: نیم موصل ٹکڑے کی لمبائی 15 mm ، چوڑائی 5 mm اور موٹائی 2 mm ہے۔ اگر الیکٹران اور خول کی تعدادی کثافت بالترتیب $1.5 \times 10^{18} / m^3$ اور $2 \times 10^{15} / m^3$ ہوں جبکہ ان کی حرکت پذیری $\mu_e = 0.08 \frac{m^2}{Vs}$ اور $\mu_h = 0.0025 \frac{m^2}{Vs}$ ہوں تب لمبائی جانب نیم موصل ٹکڑے کی مزاحمت حاصل کریں۔

جواب: 78 kΩ

سوال 5.29: کوارٹز میں $E = -20a_x + 35a_y + 15a_z \frac{V}{m}$ میدان پایا جاتا ہے۔ الف) کتاب کے آخر میں صفحہ 831 پر دیے ضمیمے سے کوارٹز کا مستقل ϵ_R دریافت کرتے ہوئے χ_e حاصل کریں۔ ب) کوارٹز میں D اور P حاصل کریں۔

جوابات: $\epsilon_R = 3.8$ ، $\chi_e = 2.8$ ، $D = -0.67a_x + 1.18a_y + 0.50a_z \frac{nC}{m^2}$ ،
 $P = -0.50a_x + 0.87a_y + 0.37a_z \frac{nC}{m^2}$

سوال 5.30: کسی مخصوص حرارت اور میکانی دباؤ پر ہائیڈروجن گیس کی تعددی کثافت $6 \times 10^{25} / m^3$ ہے۔ اگر اسے $2400 \frac{V}{m}$ کے برقی میدان میں رکھا جائے تو ہر قطبی ایٹم میں مثبت اور منفی خطوں کے درمیان اوسطاً $6.6 \times 10^{-19} m$ فاصلہ پایا جاتا ہے۔ ایسی صورت میں ہائیڈروجن کے مستقل χ_e اور ϵ_R حاصل کریں۔

جوابات: $\chi_e = 0.000298$ ، $\epsilon_R = 1.000298$

سوال 5.31: خطہ-الف میں $E_1 = 25a_x + 10a_y - 15a_z \frac{V}{m}$ پایا جاتا ہے۔ یہ خطہ محدود کے مرکز کو چھوتا ہے۔ برقی مستقل $\epsilon_{R1} = 1$ اور $\epsilon_{R2} = 2.5$ ہیں۔ مرکز پر سمتیہ $A = 45a_x - 20a_y + 10a_z$ خطہ-الف کا عمودی سمتیہ ہے جس کی سمت خطہ-الف سے خطہ-ب کی جانب ہے۔ سمتیہ A کا E_1 اور E_2 کے ساتھ زاویہ حاصل کریں۔ دونوں خطوں کے سرحدی سطح کے عمودی اور متوازی، E_1 کے اجزاء حاصل کریں۔ خطہ-ب میں E_2 بھی حاصل کریں۔

جوابات: 60° ، 77° ، $11.2a_x + 16.1a_y - 18a_z$ ، $13.8a_x - 6.1a_y + 3.1a_z$ ،
 $E_2 = 16.7a_x + 13.7a_y - 16.8a_z \frac{V}{m}$

سوال 5.32: ہم محوری تار کے اندرونی تار کا بیرونی رداس 6 mm ہے جبکہ بیرونی تار کا اندرونی رداس 15 mm ہے۔ موصل تاروں کے درمیان دو مختلف ذو برق استعمال کئے جاتے ہیں۔ اندرونی تار پر 4 mm کی پہلی تہہ کا $\epsilon_{R1} = 1.5$ ہے جبکہ بقایا حصے میں ذو برق کا $\epsilon_{R2} = 2.5$ ہے۔ اندرونی تار پر $15 \frac{nC}{m^2}$ ہونے کی صورت میں دونوں تاروں کے درمیان برقی دباؤ حاصل کریں۔

جواب: 5.11 V

سوال 5.33: 6 mm رداس کے موصل کرہ پر $\epsilon_{R1} = 1.5$ برقی مستقل کے ذو برق کی 4 mm موٹی تہہ پہلی چڑھائی۔ اس کے اوپر $\epsilon_{R2} = 2.5$ برقی مستقل کے ذو برق کی 5 mm موٹی دوسری تہہ چڑھائی جاتی ہے۔ بیرونی موصل کرہ کا اندرونی رداس 15 mm ہے۔ اندرونی کرہ پر $15 \frac{nC}{m^2}$ ہونے کی صورت میں دونوں موصل کرہ کے درمیان برقی دباؤ حاصل کریں۔

جواب: 3.52 V

سوال 5.34: متوازی چادر برق گیر کے چادروں کے درمیان فاصلہ 1 mm ہے جبکہ چادر کا رقبہ 100 cm^2 ہے۔ چادروں کے درمیان ذوبرق کا $\epsilon_R = 5$ ہے۔ الف) برق گیر کا C حاصل کریں۔ ب) برق گیر کے چادروں کے مابین کچھ دیر 50 V کی سپلائی جوڑی جاتی ہے تاکہ برق گیر اتنی برقی دباو حاصل کر لے۔ اس کے بعد سپلائی کو ہٹا دیا جاتا ہے۔ ایسی صورت میں E ، D ، Q اور برق گیر میں موجود توانائی W حاصل کریں۔ پ) اب اگر چادروں کے درمیان سے ذوبرق ہٹا دیا جائے تب Q کتنا ہوگا۔ E ، D اور برق گیر میں موجود توانائی W دوبارہ حاصل کریں۔ ساتھ ہی ساتھ برقی دباو بھی حاصل کریں۔

جوابات: الف) 442.7 pF (ب) $50 \frac{\text{kV}}{\text{m}}$ ، $2.21 \frac{\mu\text{C}}{\text{m}^2}$ ، 22.13 nC ، 553 nJ (پ) 22.13 nC ، $250 \frac{\text{kV}}{\text{m}}$ ، $2.21 \frac{\mu\text{C}}{\text{m}^2}$ ، $2.77 \mu\text{J}$ ، 250 V

سوال 5.35: موصل چادر کے متوازی 25 mm فاصلے پر 7 mm رداس کی موصل تار پائی جاتی ہے۔ چادر صفر وولٹ جبکہ تار 2 kV پر ہے۔ الف) فی میٹر برقی گنجائش حاصل کریں۔ ب) تار پر فی میٹر بار حاصل کریں۔ پ) چادر کے قریبی جانب تار کی سطح پر برقی شدت حاصل کریں۔

جوابات: 28.6 $\frac{\text{pF}}{\text{m}}$ ، 57.2 $\frac{\text{nC}}{\text{m}}$ ، $-195.8a_x \frac{\text{kV}}{\text{m}}$

باب 6

پوئسن اور لاپلاس مساوات

گوس کے قانون کی نقطہ شکل

$$(6.1) \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_h$$

میں $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ اور حاصل جواب میں $\mathbf{E} = -\nabla V$ پر کرنے سے

$$\nabla \cdot (\epsilon \mathbf{E}) = -\nabla \cdot (\epsilon \nabla V) = \rho_h$$

یعنی

$$(6.2) \quad \nabla \cdot \nabla V = -\frac{\rho_h}{\epsilon}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں ہر طرف یکساں¹ خاصیت کے نخطے میں ϵ اٹل قیمت رکھتا ہے۔ مساوات 6.2 پوئسن² مساوات کہلاتا ہے۔

آئیں کارتیسی محدود میں پوئسن مساوات کی شکل حاصل کریں۔ یاد رہے کہ کسی بھی متغیرہ $\mathbf{A} = A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z$ کے لئے

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

homogeneous¹
Poisson equation²

کے برابر ہوتا ہے۔ اب چونکہ

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{a}_z$$

کے برابر ہے لہذا

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \nabla V &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right) \\ (6.3) \quad &= \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \end{aligned}$$

ہو گا۔

عموماً $\nabla \cdot \nabla V$ کو ∇^2 لکھا جاتا ہے۔ اس طرح پوٹن مساوات کی کارتیسی شکل

$$(6.4) \quad \nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho_h}{\epsilon}$$

حاصل ہوتی ہے۔

حجمی کثافتِ بار کی غیر موجودگی، یعنی $\rho_h = 0$ کی صورت میں مساوات 6.2

$$(6.5) \quad \nabla^2 V = 0$$

صورت اختیار کر لے گی جسے لاپلاس³ مساوات کہتے ہیں۔ جس حجم کے لئے لاپلاس کی مساوات لکھی گئی ہو اس حجم میں حجمی کثافتِ بار صفر ہوتا ہے البتہ اس حجم کی سرحد پر نقطہ بار یا سطحی کثافتِ بار پائی جا سکتی ہیں۔ عموماً سطح پر موجود بار سے حجم میں پیدا میدان ہی حاصل کرنا مطلوب ہوتا ہے۔ کارتیسی محدود میں لاپلاس کی مساوات

$$(6.6) \quad \nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

صورت رکھتی ہے۔ ∇^2 کو لاپلاسی عامل⁴ کہا جاتا ہے۔

لاپلاس مساوات کہتا ہے کہ کسی بھی بار سے خالی حجم میں ہر صورت $\nabla^2 V = 0$ ہو گا۔ حجم کی شکل کچھ بھی ہو سکتی ہے اور اس کے سرحد پر کسی بھی قسم کا بار ہو سکتا ہے۔ یہ ایک دلچسپ حقیقت ہے۔ حجم کے سرحد پر عموماً ایک یا ایک

³Laplace equation
⁴Laplacian operator

سے زیادہ موصل سطحیں ہوتی ہیں جن پر برقی دباؤ V_0, V_1, V_2 وغیرہ پایا جاتا ہے اور حجم کے اندر میدان کا حصول درکار ہوتا ہے۔ کبھی کبھار موصل سطح پر بار یا E معلوم ہو گا جس سے حجم کے اندر میدان درکار ہو گا۔ اسی طرح کبھی کبھار سرحد پر ایک جگہ بار اور اس پر دوسری جگہ برقی دباؤ اور اس پر تیسرے جگہ عمودی بہاؤ دیا گیا ہو گا جبکہ حجم کے اندر کے متغیرات درکار ہوں گے۔ اس کے برعکس ایسا بھی ممکن ہے کہ حجم میں میدان یا برقی دباؤ معلوم ہو اور ان معلومات سے سرحد پر بار یا بہاؤ یا برقی دباؤ حاصل کرنا ضروری ہو گا۔

یہاں یہ بتلانا ضروری ہے کہ $V = 0$ لاپلاس مساوات کا حل ہے۔ یہ حل برقی دباؤ کی عدم موجودگی کو ظاہر کرتی ہے۔ ہمیں عموماً ایسے مسئلوں سے دلچسپی ہوتی ہے جہاں برقی دباؤ پائی جائے۔ اس لئے لاپلاس مساوات کے اس حل کو ہم عموماً نظر انداز کریں گے۔

ہم نے لاپلاس کی مساوات برقی دباؤ کے لئے حاصل کی۔ دیکھا یہ گیا ہے کہ انجینئری کے دیگر شعبوں میں کئی متغیرات لاپلاس کے مساوات پر پورا اترتے ہیں۔ یہ مساوات حقیقی اہمیت کا حامل ہے۔

اس باب میں ہم ایسی کئی مثالیں دیکھیں گے لیکن پہلے یہ حقیقت جاننا ضروری ہے کہ مساوات 6.6 کا کوئی بھی جواب ان تمام اقسام کے سرحدی معلومات کے لئے درست ہو گا۔ یہ انتہائی تشویشناک بات ہو گی اگر دو مختلف طریقوں سے لاپلاس مساوات کے جوابات حاصل کرنے کے بعد معلوم ہو کہ ان میں سے ایک ٹھیک اور دوسرا غلط جواب ہے۔ آئیں اس حقیقت کا ثبوت دیکھیں کہ کسی بھی سرحدی حقائق کو مد نظر رکھتے ہوئے لاپلاس مساوات کا صرف اور صرف ایک ہی جواب حاصل ہوتا ہے۔

مثال 6.1: لاپلاس اور پوائنٹن کے مساوات حاصل کرتے وقت پورے خطے میں یکساں ϵ تصور کی گئی۔ غیر یکساں ϵ کی صورت میں ϵ کی تبدیلی پر وہ شرط حاصل کریں جس سے لاپلاس اور پوائنٹن مساوات برقرار رہتے ہیں۔

حل: مساوات $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_h$ سے شروع کرتے ہیں جس میں $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ پر کرتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔ سمتی \mathbf{E} اور مقداری ϵ کی صورت میں

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \nabla \cdot (\epsilon \mathbf{E}) = \mathbf{E} \cdot \nabla \epsilon + \epsilon \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho_h$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس میں $E = -\nabla V$ پر کرنے سے

$$-\nabla V \cdot \nabla \epsilon - \epsilon \nabla^2 V = \rho_h$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس مساوات سے پوسن مساوات اس صورت حاصل ہوگی جب $\nabla V \cdot \nabla \epsilon = 0$ یعنی $E \cdot \nabla \epsilon = 0$ ہو۔ ایسا ہونے کا مطلب ہے کہ کسی بھی نقطے پر ϵ میں تبدیلی کی سمت، اسی نقطے پر E کے سمت کے عمودی ہو۔

6.1 مسئلہ یکتائی

تصور کریں کہ ہم دو مختلف طریقوں سے لاپلاس مساوات کے دو جوابات V_1 اور V_2 حاصل کرتے ہیں۔ یہ دونوں جوابات لاپلاس مساوات پر پورا اترتے ہیں لہذا

$$\nabla^2 V_1 = 0$$

$$\nabla^2 V_2 = 0$$

لکھا جاسکتا ہے جس سے

$$(6.7) \quad \nabla^2 (V_1 - V_2) = 0$$

حاصل ہوتا ہے۔ اب اگر سرحد پر برقی دباؤ V_s ہو تب دونوں جوابات سرحد پر یہی جواب دیں گے یعنی سرحد پر

$$V_{1s} = V_{2s} = V_s$$

یا

$$V_{1s} - V_{2s} = 0$$

ہو گا۔ صفحہ 166 پر مساوات 4.83

$$\nabla \cdot (VD) = V(\nabla \cdot D) + D \cdot (\nabla V)$$

کا ذکر کیا گیا جو کسی بھی مقداری V اور کسی بھی سمتیہ D کے لئے درست ہے۔ موجودہ استعمال کے لئے ہم $V_1 - V_2$ کو مقداری اور $\nabla(V_1 - V_2)$ کو سمتیہ لیتے ہوئے

$$\begin{aligned}\nabla \cdot [(V_1 - V_2)\nabla(V_1 - V_2)] &= (V_1 - V_2)[\nabla \cdot \nabla(V_1 - V_2)] + \nabla(V_1 - V_2) \cdot \nabla(V_1 - V_2) \\ &= (V_1 - V_2)[\nabla^2(V_1 - V_2)] + [\nabla(V_1 - V_2)]^2\end{aligned}$$

لکھ سکتے ہیں جس کا مکمل پورے حجم کے لئے

$$(6.8) \int_{\text{حجم}} \nabla \cdot [(V_1 - V_2)\nabla(V_1 - V_2)] dh = \int_{\text{حجم}} (V_1 - V_2)[\nabla^2(V_1 - V_2)] dh + \int_{\text{حجم}} [\nabla(V_1 - V_2)]^2 dh$$

ہو گا۔ صفحہ 122 پر مساوات 3.43 مسئلہ پھیلاؤ بیان کرتا ہے جس کے مطابق کسی بھی حجمی مکمل کو بند سطحی مکمل میں تبدیل کیا جاسکتا ہے جہاں حجم کی سطح پر سطحی مکمل حاصل کیا جاتا ہے۔ یوں مندرجہ بالا مساوات کے بائیں ہاتھ کو سطحی مکمل میں تبدیل کرتے ہوئے

$$\int_{\text{حجم}} \nabla \cdot [(V_1 - V_2)\nabla(V_1 - V_2)] dh = \oint_{\text{سطح}} [(V_{1s} - V_{2s})\nabla(V_{1s} - V_{2s})] \cdot dS = 0$$

حاصل ہوتا ہے جہاں سرحدی سطح پر $V_{1s} = V_{2s}$ ہونے کی بنا پر $V_{1s} - V_{2s} = 0$ ہے اور صفر کا مکمل صفر ہی ہوتا ہے۔ مساوات 6.8 میں دائیں ہاتھ پہلے جزو میں مساوات 6.7 کے تحت $\nabla^2(V_1 - V_2) = 0$ ہے اور صفر کا مکمل صفر ہی ہوتا ہے۔ اس طرح مساوات 6.8 سے

$$\int_{\text{حجم}} [\nabla(V_1 - V_2)]^2 dh = 0$$

حاصل ہوتا ہے۔

کسی بھی مکمل کا جواب صرف دو صورتوں میں صفر کے برابر ہو سکتا ہے۔ پہلی صورت یہ ہے کہ کچھ خطے میں مکمل کی قیمت مثبت اور کچھ خطے میں اس کی قیمت منفی ہو۔ اگر مثبت اور منفی حصے بالکل برابر ہوں تب مکمل صفر کے برابر ہو گا۔ موجودہ صورت میں $[\nabla(V_1 - V_2)]^2$ کا مکمل لیا جا رہے ہے اور کسی بھی متغیر کا مربع کسی صورت منفی نہیں ہو سکتا لہذا موجودہ مکمل میں ایسا ممکن نہیں ہے۔ مکمل صفر ہونے کی دوسری صورت یہ ہے کہ صفر کا مکمل حاصل کیا جا رہا ہو لہذا

$$[\nabla(V_1 - V_2)]^2 = 0$$

ہی ہو گا یعنی

$$\nabla(V_1 - V_2) = 0$$

کے برابر ہے۔

اب $\nabla(V_1 - V_2) = 0$ کا مطلب ہے کہ $V_1 - V_2$ کی ڈھلوان ہر صورت صفر کے برابر ہے۔ یہ تب ہی ممکن ہے جب $V_1 - V_2$ کی قیمت کسی بھی محدود کے ساتھ تبدیل نہ ہو یعنی اگر مکمل کے پورے خطے میں

$$V_1 - V_2 = \text{اٹل قیمت}$$

ہو۔ حجم کے سرحد پر بھی یہ درست ہو گا۔ مگر سرحد پر

$$V_1 - V_2 = V_{1s} - V_{2s} = 0$$

کے برابر ہے لہذا یہ اٹل قیمت از خود صفر ہے۔ یوں

(6.9)

$$V_1 = V_2$$

ہو گا۔ اس کا مطلب ہے کہ دونوں جوابات بالکل برابر ہیں۔

مسئلہ یکتائی کو پونسن مساوات کے لئے بھی بالکل اسی طرح ثابت کیا جا سکتا ہے۔ پونسن مساوات کے دو جوابات V_1 اور V_2 پونسن مساوات پر پورا اتریں گے لہذا $\nabla^2 V_1 = -\frac{\rho h}{\epsilon}$ اور $\nabla^2 V_2 = -\frac{\rho h}{\epsilon}$ لکھے جا سکتے ہیں جن سے $\nabla^2(V_1 - V_2) = 0$ حاصل ہوتا ہے۔ سرحد پر اب بھی $V_{1s} - V_{2s} = 0$ ہو گا۔ یہاں سے آگے ثبوت بالکل یکتائی لاپلاس کی ثبوت کی طرح ہے۔

مسئلہ یکتائی کے تحت سرحدی حقائق کے لئے حاصل کئے گئے پونسن یا لاپلاس مساوات کے جوابات ہر صورت برابر ہوں گے۔ یہ ممکن نہیں کہ دو مختلف جوابات حاصل کئے جائیں۔

6.2 لاپلاس مساوات خطی ہے

تصور کریں کہ سرحدی شرائط لاگو کرنے کے بغیر لاپلاس مساوات کے دو حل V_1 اور V_2 حاصل کئے جائیں۔ یوں

$$\nabla^2 V_1 = 0$$

$$\nabla^2 V_2 = 0$$

لکھا جا سکتا ہے جن سے

$$\nabla^2(c_1V_1 + c_2V_2) = 0$$

بھی لکھا جا سکتا ہے جہاں c_1 اور c_2 مستقل ہیں۔ اس حقیقت کو یوں بیان کیا جاتا ہے کہ لاپلاس مساوات خطی⁵ ہے۔

6.3 نکلے اور کروئی محدود میں لاپلاس کی مساوات

نکلے محدود میں ڈھلوان کی مساوات صفحہ 154 پر مساوات 4.57 دیتا ہے جس سے

$$(6.10) \quad \begin{aligned} \nabla V &= \frac{\partial V}{\partial \rho} \mathbf{a}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \phi} \mathbf{a}_\phi + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{a}_z \\ &= -E_\rho \mathbf{a}_\rho - E_\phi \mathbf{a}_\phi - E_z \mathbf{a}_z \end{aligned}$$

لکھتے ہیں جہاں $\mathbf{E} = -\nabla V$ کا استعمال کیا گیا۔ نکلے محدود میں پھیلاؤ کی مساوات صفحہ 118 پر مساوات 3.37 دیتا ہے۔ اسی مساوات کو سمتیہ \mathbf{E} کے لئے

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho E_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

لکھتے ہیں۔ اس میں بائیں ہاتھ $\mathbf{E} = -\nabla V$ اور دائیں ہاتھ مساوات 6.10 سے قیمتیں پر کرتے ہوئے

$$\nabla \cdot \nabla V = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \phi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)$$

حاصل ہوتا ہے جہاں دونوں جانب منفی علامت کٹ جاتے ہیں۔ اس کو یوں

$$(6.11) \quad \nabla^2 V = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \right) + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \quad \text{نکلے}$$

لکھا جا سکتا ہے جو نکلے محدود میں لاپلاسی مساوات ہے۔

کروی محدود میں بالکل اسی طرح

$$(6.12) \quad \nabla^2 V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \quad \text{کروی}$$

جبکہ عمومی محدود میں

$$(6.13) \quad \nabla^2 V = \frac{1}{k_1 k_2 k_3} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{k_2 k_3}{k_1} \frac{\partial V}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{k_1 k_3}{k_2} \frac{\partial V}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{k_1 k_2}{k_3} \frac{\partial V}{\partial w} \right) \right] \quad \text{عمومی}$$

حاصل کی جاسکتی ہے۔

مشق 6.1: مساوات 6.12 حاصل کریں۔

6.4 لاپلاس مساوات کے حل

لاپلاس مساوات حل کرنے کے کئی طریقے ہیں۔ سادہ ترین مسئلے، سادہ مکمل سے ہی حل ہو جاتے ہیں۔ ہم اسی سادہ مکمل کے طریقے سے کئی مسئلے حل کریں گے۔ یہ طریقہ صرف اس صورت قابل استعمال ہوتا ہے جب میدان یک سمتی ہو یعنی جب یہ محدود کے تین سمتوں میں سے صرف ایک سمت میں تبدیل ہوتا ہو۔ چونکہ اس کتاب میں محدود کے تین نظام استعمال کئے جا رہے ہیں لہذا معلوم ایسا ہوتا ہے کہ کل نو مسئلے ممکن ہیں۔ درحقیقت ایسا نہیں ہے۔ کارٹیزی محدود میں x سمت میں تبدیل ہوتے میدان کا حل بالکل ویسا ہی ہے جیسے y یا z سمت میں تبدیل ہوتے میدان کا حل۔ اسی طرح x محدود سے کسی زاویے پر سیدھی لکیر کی سمت میں تبدیل ہوتا میدان بھی بالکل اسی طرح حل ہو گا۔ یوں کارٹیزی محدود میں کسی بھی سمت میں تبدیل ہوتے میدان اور x سمت میں تبدیل ہوتے میدان کے حل بالکل ایک جیسے ہوں گے لہذا کارٹیزی محدود میں صرف ایک مسئلے حل کرنا درکار ہے۔ نکلی محدود میں z محدود کے ساتھ تبدیل

ہوتے میدان کو ہم کارٹیسی محدد میں دیکھ لیں گے لہذا یہاں کل دو مسئلے حل کرنا درکار ہے جبکہ کرومی محدد میں بھی دو مسئلے پائے جاتے ہیں۔ آئیں ان تمام کو باری باری حل کریں۔

مثال 6.2: تصور کریں کہ V صرف x محدد کے ساتھ تبدیل ہوتی ہو۔ دیکھتے ہیں کہ ایسی صورت میں لاپلاس مساوات کا حل کیا ہو گا۔ اس پر بعد میں غور کریں گے کہ حقیقت میں ایسی کون سی صورت ہو گی کہ V صرف x محدد کے ساتھ تبدیل ہوتا ہو۔ ایسی صورت میں لاپلاس مساوات

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0$$

شکل اختیار کر لے گا۔ چونکہ V کی قیمت صرف x پر منحصر ہے لہذا مندرجہ بالا مساوات کو

$$\frac{d^2 V}{dx^2} = 0$$

لکھا جاسکتا ہے۔ پہلی مرتبہ تکمیل لیتے ہوئے

$$\frac{dV}{dx} = A$$

حاصل ہوتا ہے۔ دوبارہ تکمیل لیتے ہوئے

$$(6.14) \quad V = Ax + B$$

حاصل ہوتا ہے جو لاپلاس مساوات کا حل ہے۔ یہ کسی بھی سیدھی لکیر کی سمت میں تبدیل ہوتے برقی دباؤ کے مسئلے کو ظاہر کرتا ہے جہاں اس لکیر کو x کہا جائے گا۔ A اور B دو درجی تکمیل کے مستقل ہیں جن کی قیمتیں سرحدی شرائط کی مدد سے حاصل کی جاتی ہیں۔

آئیں مساوات 6.14 کا مطلب سمجھیں۔ اس کے مطابق برقی دباؤ کا دارومدار صرف x پر ہے جبکہ y اور z کا اس کی قیمت پر کوئی اثر نہیں۔ x کی کسی بھی قیمت پر یعنی $x = x_0$ سطح پر V کی قیمت اٹل ہو گی۔ ایسی ہم قوہ سطحیں x محدد کے عمودی ہوں گی۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مساوات 6.14 یہ متوازی چادر برق گیر (کپیسٹر) کا حل ہے۔

ہم ایسے برق گیر (کپیسٹر) کے دونوں چادروں پر برقی دباؤ اور چادروں کا x محدود پر مقام بیان کرتے ہوئے A اور B کی قیمتیں حاصل کر سکتے ہیں۔ یوں اگر برق گیر (کپیسٹر) کی پہلی چادر x_1 پر ہے جبکہ اس پر برقی دباؤ V_1 ہے اور اسی طرح دوسری چادر x_2 پر ہے جبکہ اس پر برقی دباؤ V_2 ہے تب

$$V_1 = Ax_1 + B$$

$$V_2 = Ax_2 + B$$

ہو گا جس سے

$$A = \frac{V_1 - V_2}{x_1 - x_2}$$

$$B = \frac{V_2x_1 - V_1x_2}{x_1 - x_2}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ یوں چادروں کے درمیان

$$(6.15) \quad V = \left(\frac{V_1 - V_2}{x_1 - x_2} \right) x + \frac{V_2x_1 - V_1x_2}{x_1 - x_2}$$

ہو گا۔

اگر ہم پہلی چادر کو $x = 0$ اور دوسری چادر کو d پر تصور کرتے جبکہ اسی ترتیب سے ان کی برقی دباؤ کو صفر اور V_0 کہتے تب ہمیں

$$(6.16) \quad V = \frac{V_0x}{d}$$

حاصل ہوتا جو نسبتاً آسان مساوات ہے۔

باب 5 میں ہم نے سطحی کثافتِ بار سے بالترتیب برقی میدان، برقی دباؤ اور کپیسٹنس حاصل کئے۔ موجودہ باب میں ہم پہلے لاپلاس کے مساوات کے حل سے برقی دباؤ حاصل کرتے ہیں۔ برقی دباؤ سے میدان بذریعہ $E = -\nabla V$ اور بہاؤ بذریعہ $D = \epsilon E$ حاصل کرتے ہوئے سطحی کثافتِ بار حاصل کرتے ہیں جو عمودی بہاؤ کے برابر ہے۔ سطحی کثافتِ بار سے سطح پر کل بار حاصل کرتے ہوئے $C = \frac{Q}{V}$ حاصل کیا جاتا ہے۔ ان اقدام کو بالترتیب دوبارہ پیش کرتے ہیں۔

• لاپلاس مساوات حل کرتے ہوئے برقی دباؤ V حاصل کریں۔

- تکمیل کے سرحدی شرائط سے تکمیل کے مستقل کی قیمتیں حاصل کریں۔
- برقی دباؤ سے برقی میدان اور برقی بہاؤ بذریعہ $E = -\nabla V$ اور $D = \epsilon E$ حاصل کریں۔
- برقی گیر (کپیسٹر) کے کسی ایک چادر پر برقی بہاؤ کی قیمت $D_S = D_n a_N$ حاصل کریں جو سطح کے عمودی ہو گا۔
- چونکہ سطح پر سطحی کثافت بار اور عمودی برقی بہاؤ برابر ہوتے ہیں لہذا $\rho_S = D_n$ ہو گا۔ مثبت کثافت بار کی صورت میں برقی بہاؤ کا موصل چادر سے اخراج جبکہ منفی کثافت بار کی صورت میں برقی بہاؤ کا چادر میں دخول ہو گا۔
- سطح پر بار بذریعہ سطحی تکمیل حاصل کریں۔

$$\text{• کپیسٹنس } C = \frac{Q}{V} \text{ ہو گا۔}$$

آئیں ان اقدام کو موجودہ مثال پر لاگو کریں۔

چونکہ موجودہ مثال میں مساوات 6.16 کے تحت

$$V = \frac{V_0 x}{d}$$

ہے لہذا

$$E = -\nabla V = -\frac{V_0}{d} a_x$$

اور

$$D = -\epsilon \frac{V_0}{d} a_x$$

چونکہ بہاؤ کی سمت مثبت سے منفی چادر کی جانب ہوتی ہے لہذا مثبت چادر $x = d$ پر جبکہ منفی چادر $x = 0$ پر ہے۔ مثبت چادر پر

$$D_S = D \Big|_{x=d} = -\epsilon \frac{V_0}{d} a_x$$

کے برابر ہے۔ چونکہ مثبت چادر کا

$$a_N = -a_x$$

ہے لہذا برقی بہاؤ چادر سے خارج ہو رہا ہے۔ یوں

$$\rho_S = \epsilon \frac{V_0}{d}$$

ہو گا۔ اگر چادر کی سطح کا رقبہ S ہو تب

$$Q = \int_S \rho_S dS = \int \epsilon \frac{V_0}{d} dS = \frac{\epsilon V_0 S}{d}$$

ہو گا جس سے

$$C = \frac{\epsilon S}{d}$$

حاصل ہوتا ہے۔ صفحہ 213 پر مساوات 5.58 یہی جواب دیتا ہے۔

اگر مندرجہ بالا مثال میں برقی گیر (کپیسٹر) کو y یا z محدد پر رکھا جاتا تو کپیسٹنس کی قیمت یہی حاصل ہوتی لہذا کارتیسی محدد کے لئے ایک مثال حل کر لینا کافی ہے۔ تکلی محدد میں z کے ساتھ تبدیل ہوتے برقی دباؤ کو حل کرنے سے کوئی نئی بات سامنے نہیں آتی۔ یہ بالکل کارتیسی محدد کے مثال کی طرح ہی ہے لہذا ہم باری باری ρ اور ϕ کے ساتھ تبدیل ہوتے برقی دباؤ کے مسئلے حل کرتے ہیں۔

مثال 6.3: اس مثال میں صرف ρ کے ساتھ تبدیل ہوتے برقی دباؤ پر غور کرتے ہیں۔ ایسی صورت میں لاپلاس کی مساوات

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) = 0$$

یا

$$(6.17) \quad \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dV}{d\rho} \right) = 0$$

صورت اختیار کر لے گی۔ یوں یا

$$\frac{1}{\rho} = 0$$

ہو گا جس سے

$$(6.18) \quad \rho = \infty$$

حاصل ہوتا ہے اور یا

$$(6.19) \quad \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dV}{d\rho} \right) = 0$$

ہو گا۔ اس تفرقی مساوات کو بار بار تکمیل لے کر حل کرتے ہیں۔ پہلی مرتبہ تکمیل لیتے ہوئے

$$\rho \frac{dV}{d\rho} = A$$

یا

$$dV = A \frac{d\rho}{\rho}$$

حاصل ہوتا ہے۔ دوسری مرتبہ تکمیل سے

$$V = A \ln \rho + B$$

حاصل ہوتا ہے۔ یہ ہم توہ سطحیں نکلی شکل کے ہیں۔ یوں یہ مساوات محوری تار کا برقی دباؤ دیتی ہے۔ ہم محوری تار کے بیرونی تار $\rho = b$ کو برقی زمین اور اندرونی تار $\rho = a$ کو V_0 برقی دباؤ پر تصور کرتے ہوئے

$$(6.20) \quad V = V_0 \frac{\ln \frac{b}{\rho}}{\ln \frac{b}{a}}$$

حاصل ہوتا ہے۔ ہم جانتے ہیں کہ کسی بھی شکل کے بار سے لامحدود فاصلے پر برقی دباؤ صفر ہی ہوتا ہے۔ اسی وجہ سے ہم لامحدود فاصلے کو ہی برقی زمین کہتے آ رہے ہیں۔ یوں لاپلاس مساوات کا پہلا حل یعنی مساوات 6.18 ہمارے امید کے عین مطابق ہے۔

مساوات 6.20 کو لے کر آگے بڑھتے ہوئے یوں

$$E = -\nabla V = \frac{V_0}{\rho} \frac{1}{\ln \frac{b}{a}} a_\rho$$

اور

$$D_n = D \Big|_{\rho=a} = \frac{\epsilon V_0}{a \ln \frac{b}{a}}$$

$$Q = \frac{\epsilon V_0 2\pi a L}{a \ln \frac{b}{a}}$$

حاصل ہوتے ہیں جن سے

$$(6.21) \quad C = \frac{2\pi\epsilon L}{\ln \frac{b}{a}}$$

حاصل ہوتا ہے۔ صفحہ 215 پر مساوات 5.59 یہی جواب دیتا ہے۔

مساوات 6.17 کو ρ سے ضرب دینے سے بھی مساوات 6.19 حاصل ہوتا ہے۔ البتہ یہ ضرب صرف اور صرف اس صورت ممکن ہے جب $\rho \neq 0$ ہو۔ یاد رہے کہ $\rho = 0$ کی صورت میں $\frac{\rho}{\rho} = \frac{0}{0}$ ہو گا جو غیر معین⁶ ہے۔ یوں مساوات 6.20 صرف اس صورت مساوات 6.19 کا حل ہو گا اگر $\rho \neq 0$ ہو۔ ان حقائق کو سامنے رکھتے ہوئے لاپلاس مساوات کا حل

$$(6.22) \quad V = V_0 \frac{\ln \frac{b}{\rho}}{\ln \frac{b}{a}} \quad \rho \neq 0$$

لکھنا زیادہ درست ہو گا۔

مثال 6.4: اب تصور کرتے ہیں کہ برقی دباؤ تکلی محدود کے متغیرہ ϕ کے ساتھ تبدیل ہوتا ہے۔ اس صورت میں لاپلاس مساوات

$$\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0$$

صورت اختیار کرے گا۔ یہاں بھی پہلا حل $\rho = \infty$ حاصل ہوتا ہے۔ ہم یہاں بھی $\rho = 0$ کو جواب کا حصہ تصور نہ کرتے ہوئے مساوات کو ρ^2 سے ضرب دیتے ہوئے اس سے جان چھڑاتے ہیں۔ یوں

$$\frac{d^2 V}{d\phi^2} = 0 \quad \rho \neq 0$$

رہ جاتا ہے۔ دو مرتبہ تکمل لینے سے

$$V = A\phi + B$$

حاصل ہوتا ہے۔ ایسی دو ہم توہ سطحیں شکل میں دکھائی گئی ہیں۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $\rho = 0$ کی صورت میں دونوں چادر آپس میں مل جائیں گی اور ان پر مختلف برقی دباؤ ممکن نہ ہو گا۔ یوں $\rho = 0$ قابل قبول جواب نہیں ہے۔ یہاں $\phi = 0$ کو برقی زمین جبکہ $\phi = \phi_0$ پر V_0 برقی دباؤ کی صورت میں

$$(6.23) \quad V = \frac{V_0 \phi}{\phi_0} \quad \rho \neq 0$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس سے

$$E = -\frac{V_0}{\phi_0 \rho} a_\phi$$

حاصل ہوتا ہے۔ ان چادروں کے کپیسٹنس کا حصول آپ سے حاصل کرنے کو سوال میں کہا گیا ہے۔

مثال 6.5: کروی محدود میں ϕ کے ساتھ تبدیلی کو مندرجہ بالا مثال میں دیکھا گیا لہذا اسے دوبارہ حل کرنے کی ضرورت نہیں۔ ہم پہلے r اور بعد میں θ کے ساتھ تبدیلی کے مسئلوں کو دیکھتے ہیں۔

یہ زیادہ مشکل مسئلہ نہیں ہے لہذا آپ ہی سے سوالات کے حصے میں درخواست کی گئی ہے کہ اسے حل کرتے ہوئے برقی دباؤ کی مساوات

$$(6.24) \quad V(r) = V_0 \frac{\frac{1}{r} - \frac{1}{b}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}$$

اور کپیسٹنس کی مساوات

$$(6.25) \quad C = \frac{4\pi\epsilon}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}$$

حاصل کریں جہاں $r = b$ پر برقی زمین اور $r = a$ پر V_0 برقی دباؤ ہے اور $b > a$ ۔

مثال 6.6: کروی محدود میں θ کے ساتھ تبدیل ہوتے برقی دباؤ کی صورت میں لاپلاس مساوات

$$(6.26) \quad \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dV}{d\theta} \right) = 0$$

صورت اختیار کرے گی۔ اگر $r \neq 0$ اور $\sin \theta \neq 0$ ہوں تب اس مساوات کو $r^2 \sin \theta$ سے ضرب دیتے ہوئے

$$(6.27) \quad \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dV}{d\theta} \right) = 0$$

لکھا جا سکتا ہے۔ $\sin \theta$ اس صورت صفر کے برابر ہو گا جب $\theta = 0$ یا $\theta = \pi$ ہوں۔ اس کے پہلی مرتبہ تکمیل سے

$$\sin \theta \frac{dV}{d\theta} = A$$

یا

$$dV = \frac{A d\theta}{\sin \theta}$$

حاصل ہوتا ہے۔ دوسری مرتبہ تکمیل سے

$$(6.28) \quad V = A \int \frac{d\theta}{\sin \theta} + B = A \ln \left(\tan \frac{\theta}{2} \right) + B$$

حاصل ہوتا ہے۔

یہ ہم توہ سطحیں مخروطی شکل رکھتے ہیں۔ اگر $\theta = \frac{\pi}{2}$ پر $V = 0$ اور $\theta = \theta_0$ پر $V = V_0$ ہوں جہاں $\theta_0 < \frac{\pi}{2}$ ہے تب ہمیں

$$(6.29) \quad V = V_0 \frac{\ln \left(\tan \frac{\theta}{2} \right)}{\ln \left(\tan \frac{\theta_0}{2} \right)}$$

حاصل ہوتا ہے۔

آئیں ایسی مخروط اور سیدھی سطح کے مابین کپیسٹنس حاصل کریں جہاں مخروط کی نوک سے انتہائی باریک فاصلے پر سیدھی سطح ہو اور مخروط کا محور اس سطح کے عمود میں ہو۔ پہلے برقی شدت حاصل کرتے ہیں۔

$$(6.30) \quad E = -\nabla V = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \mathbf{a}_\theta = -\frac{V_0}{r \sin \theta \ln \left(\tan \frac{\theta_0}{2} \right)} \mathbf{a}_\theta$$

مخروط کی سطح پر سطحی کثافت باریوں

$$\rho_s = D_n = -\frac{\epsilon V_0}{r \sin \theta_0 \ln \left(\tan \frac{\theta_0}{2} \right)}$$

ہو گا جس سے اس پر بار

$$Q = -\frac{\epsilon V_0}{\sin \theta_0 \ln \left(\tan \frac{\theta_0}{2} \right)} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{r \sin \theta_0 d\phi dr}{r}$$

ہو گا۔ تکمیل میں رداں کا حد لامحدود ہونے کی وجہ سے بار کی قیمت بھی لامحدود حاصل ہوتی ہے جس سے لامحدود کپیسٹنس حاصل ہو گا۔ حقیقت میں محدود جسامت کے سطحیں ہی پائی جاتی ہیں لہذا ہم رداں کے حدود 0 تا r_1 لیتے ہیں۔ ایسی صورت میں

$$(6.31) \quad C = \frac{2\pi\epsilon r_1}{\ln \left(\cot \frac{\theta_0}{2} \right)}$$

حاصل ہوتا ہے۔ یاد رہے کہ ہم نے لامحدود سطح سے شروع کیا تھا لہذا بار کی مساوات بھی صرف لامحدود سطح کے لئے درست ہے۔ اس طرح مندرجہ بالا مساوات کپیسٹنس کی قریبی قیمت ہوگی ناکہ بالکل درست قیمت۔

6.5 پوسن مساوات کے حل کی مثال

پوسن مساوات تب حل کیا جاسکتا ہے جب ρ_h معلوم ہو۔ حقیقت میں عموماً سرحدی برقی دباؤ وغیرہ معلوم ہوتے ہیں اور ہمیں ρ_h ہی درکار ہوتی ہے۔ ہم پوسن مساوات حل کرنے کی خاطر ایسی مثال لیتے ہیں جہاں ہمیں ρ_h معلوم ہو۔

سلیکان⁷ کی پتہری میں p اور n اقسام کے مواد کی ملاوٹ سے p اور n سلیکان پیدا کیا جاتا ہے۔ ایک ہی سلیکان پتہری پر آپس میں جڑے ہوئے p اور n خطے ڈایوڈ⁸ کو جنم دیتے ہیں۔ x محدد پر رکھے ایسے ہی ایک ڈایوڈ کی بات کرتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔ تصور کریں کہ $x < 0$ خطہ p اور $x > 0$ خطہ n قسم کا ہے۔ مزید یہ کہ دونوں جانب ملاوٹ کی مقدار یکساں ہے۔ آپ کو یاد ہو گا کہ p یا n خطہ از خود غیر بار شدہ ہوتا ہے البتہ p خطے میں آزاد خول⁹ اور n خطے میں آزاد الیکٹران¹⁰ پائے جاتے ہیں۔ آزاد خول اور آزاد الیکٹران حرکت کر سکتے ہیں۔ جس لمحہ یہ آپس میں جڑے خطے وجود میں آتے ہیں، اس وقت آزاد خول صرف p جانب جبکہ آزاد الیکٹران صرف n جانب پائے جاتے ہیں۔ یوں اس لمحے ہی آزاد خول p سے n جانب اور آزاد الیکٹران n سے p جانب نفوذ¹¹ کے ذریعے حرکت کرنا شروع کر دیتے ہیں۔ بار کے اس حرکت سے جلد p اور n کے سرحد کے دونوں جانب الٹ قطب کا بار جمع ہونے شروع ہو جاتا ہے۔ یوں دو چادر برقی گیر (کپیسٹر) پر بار کی طرح، سرحد کے دائیں یعنی $x > 0$ جانب مثبت جبکہ اس کے بائیں جانب منفی بار جمع ہو جاتا ہے۔ یہ بار برقی گیر (کپیسٹر) کے چادروں کے درمیان برقی میدان کی طرح $E = -Ea_x$ پیدا کرتا ہے جو بائیں سے دائیں جانب آزاد خول کے حرکت اور دائیں سے بائیں جانب آزاد الیکٹران کے حرکت کو روکتا ہے۔ جب تک برقی میدان E بار کے اس حرکت کو نہ روک سکے اس وقت تک بار کا نفوذ جاری رہے گا جس سے سرحد کے دونوں جانب بار کا انبار بڑھتا رہے گا جس سے E بڑھتی رہے گی۔ آخر کار E کی قیمت اتنی ہو جائے گی کہ یہ نفوذ کو مکمل طور پر روک دے گا۔ آئیں برقی سکون کے اس حال پر غور کریں۔ ابتدا میں p اور

silicon⁷
diode⁸
free holes⁹
free electrons¹⁰
diffusion¹¹

n خصلے دونوں بے بار تھے البتہ برقی سکون کی حالت اختیار کرنے کے بعد صاف ظاہر ہے کہ سرحد کے دائیں جانب مثبت جبکہ اس کے بائیں جانب منفی بار پایا جاتا ہے۔ سرحد کے دائیں جانب مثبت بار دو وجوہات کی بنا ہے۔ کچھ تو آزاد خول اس جانب منتقل ہوئے ہیں اور کچھ یہاں سے آزاد الیکٹران کی نفوذ سے مثبت ایٹم یہاں رہ گئے ہیں۔ اسی طرح سرحد کے دوسری جانب منفی بار کچھ تو آزاد الیکٹران کی آمد اور کچھ یہاں سے آزاد خول کے اخراج سے منفی ایٹموں کے رہ جانے کی وجہ سے ہے۔ سرحد کے دونوں جانب الٹ قطب کے بار میں قوت کشش پائی جاتی ہے جو انہیں سرحد کے قریب ہی رکھتے ہیں۔

سرحد کے دونوں جانب بار کے انبار کو شکل میں دکھایا گیا ہے۔ اس طرح کے انبار کو کئی مساوات سے ظاہر کرنا ممکن ہے جن میں غالباً سب سے سادہ مساوات

$$(6.32) \quad \rho = 2\rho_0 \operatorname{sech} \frac{x}{a} \tanh \frac{x}{a}$$

ہے جہاں زیادہ سے زیادہ کثافتِ بار ρ_0 ہے جو $x = 0.881a$ پر پائی جاتی ہے۔ ہمیں اس کثافتِ بار کے لئے پونسن مساوات

$$\nabla^2 V = -\frac{2\rho_0}{\epsilon} \operatorname{sech} \frac{x}{a} \tanh \frac{x}{a}$$

یعنی

$$\frac{d^2 V}{dx^2} = -\frac{2\rho_0}{\epsilon} \operatorname{sech} \frac{x}{a} \tanh \frac{x}{a}$$

حل کریں۔ پہلی مرتبہ کھل لیتے ہوئے

$$\frac{dV}{dx} = \frac{2\rho_0 a}{\epsilon} \operatorname{sech} \frac{x}{a} + A$$

حاصل ہوتا ہے جسے

$$E_x = -\frac{dV}{dx} = \frac{2\rho_0 a}{\epsilon} \operatorname{sech} \frac{x}{a} - A$$

بھی لکھا جاسکتا ہے۔ کھل کے مستقل A کی قیمت اس حقیقت سے حاصل کی جاسکتی ہے کہ سرحد سے دور کسی قسم کا کثافتِ بار یا برقی میدان نہیں پایا جاتا لہذا $x \rightarrow \mp\infty$ پر $E_x \rightarrow 0$ ہو گا جس سے $A = 0$ حاصل ہوتا ہے لہذا

$$(6.33) \quad E_x = -\frac{dV}{dx} = -\frac{2\rho_0 a}{\epsilon} \operatorname{sech} \frac{x}{a}$$

کے برابر ہے۔ دوسری مرتبہ تکمل لیتے ہوئے

$$V = \frac{4\rho_0 a^2}{\epsilon} \tan^{-1} e^{\frac{x}{a}} + B$$

حاصل ہوتا ہے۔ ہم برقی زمین کو عین سرحد پر لیتے ہیں۔ ایسا کرنے سے $B = -\frac{\rho_0 a^2 \pi}{\epsilon}$ حاصل ہوتا ہے۔ یوں

$$(6.34) \quad V = \frac{4\rho_0 a^2}{\epsilon} \left(\tan^{-1} e^{\frac{x}{a}} - \frac{\pi}{4} \right)$$

کے برابر ہو گا۔

شکل میں مساوات 6.32، مساوات 6.33 اور مساوات 6.34 دکھائے گئے ہیں جو بالترتیب حجمی کثافت بار، برقی میدان کی شدت اور برقی دباؤ دیتے ہیں۔

سرحد کے دونوں جانب کے مابین برقی دباؤ V_0 کو مساوات 6.34 کی مدد سے یوں حاصل کیا جا سکتا ہے۔

$$(6.35) \quad V_0 = V_{x \rightarrow +\infty} - V_{x \rightarrow -\infty} = \frac{2\pi\rho_0 a^2}{\epsilon}$$

سرحد کے ایک جانب کل بار کو مساوات 6.32 کی مدد سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ یوں کل مثبت بار

$$(6.36) \quad Q = S \int_0^{\infty} 2\rho_0 \operatorname{sech} \frac{x}{a} \tanh \frac{x}{a} dx = 2\rho_0 a S$$

حاصل ہوتا ہے جہاں ڈایوڈ کا رقبہ عمودی تراش S^{12} ہے۔ مساوات 6.35 سے a کی قیمت مساوات 6.36 میں پر کرنے سے

$$(6.37) \quad Q = S \sqrt{\frac{2\rho_0 \epsilon V_0}{\pi}}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اس مساوات سے کپیسٹنس کی قیمت $C = \frac{Q}{V_0}$ لکھ کر نہیں حاصل کی جا سکتی البتہ

$$I = \frac{dQ}{dt} = C \frac{dV_0}{dt}$$

سے

$$C = \frac{dQ}{dV_0}$$

لکھا جا سکتا ہے لہذا مساوات 6.37 کا تفرق لیتے ہوئے

$$C = \sqrt{\frac{\rho_0 \epsilon}{2\pi V_0}} S = \frac{\epsilon S}{2\pi a}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس مساوات کے پہلے جزو سے ظاہر ہے کہ برقی دباؤ بڑھانے سے کپیسٹنس کم ہوگی۔ مساوات کے دوسرے جزو سے یہ اخذ کیا جا سکتا ہے کہ ڈایوڈ بالکل ایسے دو چادر برقی گیر (کپیسٹر) کی طرح ہے جس کے چادر کا رقبہ S اور چادروں کے مابین فاصلہ $2\pi a$ ہو۔ یوں برقی دباؤ سے کپیسٹنس کے گٹھنے کو یوں سمجھا جا سکتا ہے کہ برقی دباؤ بڑھانے سے a بڑھتا ہے۔

6.6 لاپلاس مساوات کا ضربی حل

گزشتہ حصے میں صرف ایک محدود کے ساتھ تبدیل ہوتے برقی دباؤ کے لاپلاس مساوات پر غور کیا گیا۔ اس حصے میں ایسے میدان پر غور کیا جائے گا جہاں برقی دباؤ ایک سے زیادہ محدود کے ساتھ تبدیل ہوتا ہو۔ تصور کریں کہ V کارٹیزی محدود کے x اور y کے ساتھ تبدیل ہوتا ہو۔ ایسی صورت میں لاپلاس مساوات

$$(6.38) \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

صورت اختیار کرے گا۔ تصور کریں کہ ایسی مساوات کے حل کو دو تفاعل $X(x)$ اور $Y(y)$ کے حاصل ضرب $X(x)Y(y)$ کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے جہاں X تفاعل کا آزاد متغیرہ صرف x اور Y تفاعل کا آزاد متغیرہ صرف y ہو۔ یہاں آپ کو ایسا معلوم ہو رہا ہو گا کہ یہ شرط زیادہ تر ممکنہ جوابات کو پہلے سے ہی رد کرتا ہے۔ ایسا ہی ایک سادہ حل $V = x + y$ اور دوسرا نسبتاً مشکل حل $V = G(x) + H(y)$ ہو سکتے ہیں جنہیں ہم انجانے طور پر رد کر رہے ہو سکتے ہیں۔ ہم $V = x + y$ کو $V = V_1 + V_2$ لکھ سکتے ہیں جہاں

$$V_1 = X_1(x)Y_1(y) = 1x$$

$$V_2 = X_2(x)Y_2(y) = 1y$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں $Y_1(y) = 1$ اور $X_2(x) = 1$ کے برابر ہیں۔ یوں ہم دیکھتے ہیں کہ ہم x کو دو تفاعل کے ضرب کی صورت میں لکھ سکتے ہیں اور اسی طرح y کو بھی دو تفاعل کے ضرب کی صورت میں لکھ سکتے ہیں۔ لاپلاس مساوات خطی ہونے کی بنا پر ان جوابات کا مجموعہ $x + y$ بھی لاپلاس مساوات کا حل ہو گا۔ یوں آپ دیکھ سکتے ہیں کہ

ہم نے $V = x + y$ جو اب کو ہر گز رد نہیں کیا۔ ایسے ہی ثبوت سے ہم دیکھ سکتے ہیں کہ $V = G(x) + H(y)$ جو اب کو بھی رد نہیں کیا گیا۔

اب آتے ہیں اصل مسئلے پر۔ اگر $V = XY$ مساوات 6.38 کا حل ہو تب

$$\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} Y(y) + X(x) \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} = 0$$

ہو گا جسے

$$(6.39) \quad \frac{1}{X(x)} \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = -\frac{1}{Y(y)} \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ یہاں آنکھیں کھول دینے والی دلیل پیش کرتے ہیں۔ مساوات 6.39 میں بائیں جانب صرف x متغیرہ پایا جاتا ہے جبکہ دائیں جانب صرف y متغیرہ پایا جاتا ہے۔ یوں x تبدیل کرنے سے صرف بائیں ہاتھ تبدیل ہو سکتا ہے جبکہ دایاں ہاتھ جوں کا توں رہے گا۔ اب مساوات کہتا ہے کہ بائیں اور دائیں ہاتھ برابر ہیں۔ ایسا صرف اور صرف اس صورت ممکن ہو گا کہ نا تو x تبدیل کرنے سے بائیں ہاتھ تبدیل ہوتا ہو اور نا ہی y تبدیل کرنے سے دایاں ہاتھ تبدیل ہوتا ہو یعنی اگر دونوں ہاتھ کسی مستقل کے برابر ہوں جہاں اس مستقل کو m^2 لکھتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔ m^2 کو علیحدگی مستقل¹³ کہا جاتا ہے۔

$$(6.40) \quad \frac{1}{X(x)} \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = -\frac{1}{Y(y)} \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} = m^2$$

اس مساوات کو دو اجزاء

$$\frac{1}{X(x)} \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = m^2$$

$$\frac{1}{Y(y)} \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} = -m^2$$

یا

$$(6.41) \quad \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} - m^2 X(x) = 0$$

$$\frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} + m^2 Y(y) = 0$$

کی صورت میں لکھتے ہوئے باری باری حل کرتے ہیں۔

اس طرز کے مساوات آپ پہلے حل کر چکے ہوں گے جہاں جواب اندازے سے لکھتے ہوئے مساوات کو حل کیا جاتا ہے۔ اسی طریقے کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 6.41 کے پہلے جزو میں

$$X(x) = e^{\omega x}$$

پر کرتے ہیں۔ یوں $\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = \omega^2 e^{\omega x}$ ہو گا لہذا

$$\omega^2 e^{\omega x} - m^2 e^{\omega x} = 0$$

لکھا جائے گا جس سے

$$\omega = \mp m$$

حاصل ہو گا۔ ω کے دونوں قیمتیں استعمال کرتے ہوئے یوں اصل جواب

$$(6.42) \quad X(x) = A'e^{mx} + B'e^{-mx}$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 6.41 کے دوسرے جزو کا جواب اسی طرح

$$(6.43) \quad Y(y) = C \cos my + D \sin my$$

حاصل ہوتا ہے۔ یوں مساوات 6.38 کا پورا حل

$$(6.44) \quad V = XY = (A'e^{mx} + B'e^{-mx}) (C \cos my + D \sin my)$$

لکھا جائے گا۔

آئیں مساوات 6.41 کے حل کو ایک مرتبہ دوبارہ حاصل کریں۔ البتہ اس مرتبہ جواب کا اندازہ لگانے کی بجائے ہم ایک ایسی ترکیب استعمال کریں گے جو انتہائی زیادہ طاقتور ثابت ہو گا اور جو آگے بار بار استعمال آئے گا۔

اس ترکیب میں ہم تصور کرتے ہیں کہ $X(x)$ تفاعل کو طاقتی سلسلے¹⁴

$$(6.45) \quad X(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \dots$$

کی شکل میں لکھنا ممکن ہے جہاں a_0, a_1, a_2 وغیرہ طاقنی سلسلے کے مستقل ہیں۔ یوں

$$\frac{\partial X}{\partial x} = 0 + a_1 + 2a_2x^1 + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} na_nx^{n-1}$$

اور

(6.46)

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = 0 + 0 + 2 \times 1a_2 + 3 \times 2a_3x^1 + 4 \times 3a_4x^2 + \dots = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_nx^{n-2}$$

لکھے جاسکتے ہیں۔ مساوات 6.45 اور مساوات 6.46 کو مساوات 6.41 کے پہلے جزو میں پر کرتے ہیں

$$2 \times 1a_2 + 3 \times 2a_3x^1 + 4 \times 3a_4x^2 + \dots = m^2 (a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \dots)$$

جہاں ہم $m^2 X$ کو دائیں ہاتھ لے گئے ہیں۔ یہاں بائیں اور دائیں ہاتھ کے طاقنی سلسلے صرف اس صورت x کے ہر قیمت کے لئے برابر ہو سکتے ہیں جب دونوں جانب x کے برابر طاقت کے ضریب¹⁵ عین برابر ہوں یعنی جب

$$2 \times 1a_2 = m^2 a_0$$

$$3 \times 2a_3 = m^2 a_1$$

$$4 \times 3a_4 = m^2 a_2$$

یا

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} = m^2 a_n$$

ہوں۔ جفت ضریب کو a_0 کی صورت میں یوں

$$a_2 = \frac{m^2}{2 \times 1} a_0$$

$$a_4 = \frac{m^2}{4 \times 3} a_2 = \left(\frac{m^2}{4 \times 3} \right) \left(\frac{m^2}{2 \times 1} a_0 \right) = \frac{m^4}{m!} a_0$$

$$a_6 = \frac{m^6}{6!} a_0$$

لکھا جا سکتا ہے جسے عمومی طور پر

$$a_n = \frac{m^n}{n!} a_0 \quad (n \text{ جفت})$$

لکھا جا سکتا ہے۔ طاق ضربیہ کو a_1 کی صورت میں

$$a_3 = \frac{m^2}{3 \times 2} a_1 = \frac{m^3}{3!} \frac{a_1}{m}$$

$$a_5 = \frac{m^5}{5!} \frac{a_1}{m}$$

لکھا جا سکتا ہے جس سے ان کی عمومی مساوات

$$a_n = \frac{m^n}{n!} \frac{a_1}{m} \quad (n \text{ طاق})$$

لکھی جا سکتی ہے۔ انہیں واپس طاقی سلسلے میں پر کرتے ہوئے

$$X = a_0 \sum_{0, \text{جفت}}^{\infty} \frac{m^n}{n!} x^n + \frac{a_1}{m} \sum_{1, \text{طاق}}^{\infty} \frac{m^n}{n!} x^n$$

یا

$$X = a_0 \sum_{0, \text{جفت}}^{\infty} \frac{(mx)^n}{n!} + \frac{a_1}{m} \sum_{1, \text{طاق}}^{\infty} \frac{(mx)^n}{n!}$$

حاصل ہوتا ہے۔ غور کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ مندرجہ بالا مساوات میں پہلا طاقی سلسلہ دراصل $\cosh mx$ کے برابر

$$\cosh mx = \sum_{0, \text{جفت}}^{\infty} \frac{(mx)^n}{n!} = 1 + \frac{(mx)^2}{2!} + \frac{(mx)^4}{4!} + \dots$$

اور دوسرا طاقی سلسلہ $\sinh mx$

$$\sinh mx = \sum_{1, \text{طاق}}^{\infty} \frac{m^n}{n!} x^n = mx + \frac{(mx)^3}{3!} + \frac{(mx)^5}{5!} + \dots$$

کے برابر ہے۔ یوں

$$X = a_0 \cosh mx + \frac{a_1}{m} \sinh mx$$

یا

$$X = A \cosh mx + B \sinh mx$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں a_0 اور $\frac{a_1}{m}$ یا ان کی جگہ لکھے گئے A اور B کو سرحدی شرائط سے حاصل کیا جائے گا۔

$\cosh mx$ اور $\sinh mx$ کو

$$\cosh mx = \frac{e^{mx} + e^{-mx}}{2}$$

$$\sinh mx = \frac{e^{mx} - e^{-mx}}{2}$$

لکھ کر

$$X = A'e^{mx} + B'e^{-mx}$$

بھی لکھا جا سکتا ہے جہاں A' اور B' دو نئے مستقل ہیں۔ یہ مساوات 6.42 ہی ہے۔

اسی طاقی سلسلے کے طریقے کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 6.41 کے دوسرے جزو کا حل بھی دو طاقی سلسلوں کا مجموعہ حاصل ہوتا ہے جہاں ایک طاقی سلسلہ $\cos my$ اور دوسرا $\sin my$ کے برابر ہوتا ہے۔ یوں

$$(6.47) \quad Y = C \cos my + D \sin my$$

لکھا جا سکتا ہے جو عین مساوات 6.43 ہی ہے۔ یوں

$$(6.48) \quad V = XY = (A \cosh mx + B \sinh mx) (C \cos my + D \sin my)$$

یا

$$(6.49) \quad V = XY = (A'e^{mx} + B'e^{-mx}) (C \cos my + D \sin my)$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس آخری مساوات کا مساوات 6.44 کے ساتھ موازنہ کریں۔

مساوات 6.48 میں کل چار مستقل پائے جاتے ہیں جنہیں سرحدی شرائط سے حاصل کیا جاتا ہے۔ انہیں ان مستقل کو دو مختلف سرحدی شرائط کے لئے حاصل کریں۔ پہلی صورت میں بجائے یہ کہ سرحدی شرائط سے ان مستقل کو حاصل کریں، ہم مستقل پہلے چنتے ہیں اور بعد میں ان چنتے گئے مستقل کے مطابق سرحدی شرائط حاصل کرتے ہیں۔

تصور کریں کہ مساوات 6.48 میں A اور B دونوں یا C اور D دونوں صفر کے برابر ہیں۔ ایسی صورت میں $V = 0$ حاصل ہو گا جو برقی دباؤ کی عدم موجودگی کو ظاہر کرتی ہے۔ ہمیں عموماً برقی دباؤ کی موجودگی سے زیادہ دلچسپی ہوتی ہے۔ آئیں ایک اور صورت دیکھیں۔

تصور کریں کہ A اور C صفر کے برابر ہے۔ ایسی صورت میں مساوات 6.48 کو

$$(6.50) \quad V = V_0 \sinh mx \sin my$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں $BD = V_0$ لکھا گیا ہے۔ چونکہ

$$\sinh mx = \frac{1}{2} (e^{mx} - e^{-mx})$$

ہے لہذا $x = 0$ پر $\sinh mx = 0$ ہو گا جبکہ بڑھتے x کے ساتھ اس کی قیمت تقریباً e^{mx} کے تعلق سے بڑھتی ہے۔ $\sin my$ کی قیمت $y = 0$ ، $y = \frac{\pi}{m}$ ، $y = \frac{2\pi}{m}$ وغیرہ پر صفر کے برابر ہو گی۔ یوں صفر برقی دباؤ کے ہم قوہ سطحیں $x = 0$ اور $y = \frac{n\pi}{m}$ پر رکھی جا سکتی ہیں جہاں $n = 0, 1, \dots$ ہو سکتا ہے۔ ہم ایسی ہم قوہ سطحیں $x = 0$ ، $y = 0$ اور $y = \frac{\pi}{m}$ پر رکھتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔ آخر میں V_0 ہم قوہ سطح مساوات 6.50 میں $V = V_0$ پر کرنے سے حاصل کیا جا سکتا ہے یعنی

$$V_0 = V_0 \sinh mx \sin my$$

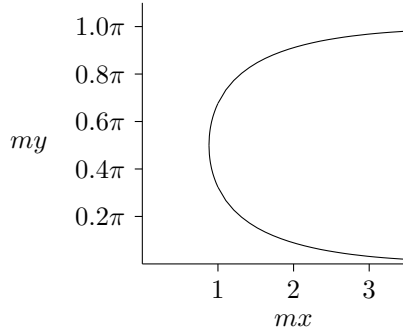
یا

$$my = \sin^{-1} \frac{1}{\sinh mx}$$

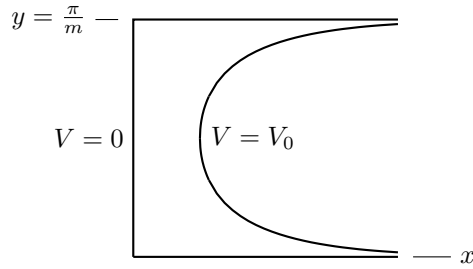
x کے مختلف قیمتوں کے لئے اس مساوات سے y کی قیمتیں حاصل کرتے ہوئے اس مساوات کے خط کو شکل 6.1 میں کھینچا گیا ہے۔

ان حقائق کو استعمال کرتے ہوئے موصل ہم قوہ سطحیں شکل 6.2 میں دکھائی گئی ہیں۔ یہ سطحیں z محور کی سمت میں لامحدود لمبائی رکھتی ہیں اور ان سے پیدا برقی دباؤ مساوات 6.50 دیتا ہے۔

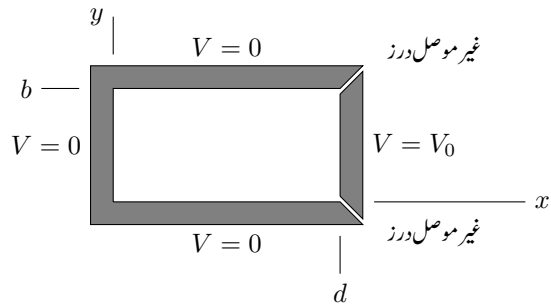
ہم نے لاپلاس مساوات کے حل یعنی مساوات 6.50 کو لیتے ہوئے ان ہم قوہ سطحوں کو دریافت کیا جو ایسی برقی دباؤ پیدا کرے گی۔ حقیقت میں عموماً موصل ہم قوہ سطحیں معلوم ہوں گی جن کا پیدا کردہ برقی دباؤ درکار ہو گا۔ آئیں ایسی ایک مثال دیکھیں۔



شکل 6.1: $my = \sin^{-1} \left(\frac{1}{\sinh mx} \right)$ کی مساوات۔



شکل 6.2: ہم قوہ سطحیں اور ان پر برقی دباؤ۔



شکل 6.3: موصل سطحوں سے گھیرے نخطے میں لاپلاس مساوات متعدد اجزاء کے مجموعے سے حاصل ہوتا ہے۔

شکل 6.3 میں موصل سطحیں اور ان پر برقی دباؤ دیا گیا ہے۔ یہ سطحیں z سمت میں لامحدود لمبائی رکھتی ہیں۔ سطحوں کے گھیرے نخلے میں برقی دباؤ حاصل کرنا درکار ہے۔

یہاں سرحدی شرائط کچھ یوں ہیں۔ $x = 0$ ، $y = 0$ اور $y = b$ پر برقی دباؤ صفر ہے جبکہ $x = d$ پر برقی دباؤ V_0 ہے۔ دونوں ہم قوہ سطحوں کے مابین انتہائی باریک غیر موصل درز ہیں جن کی بنا پر ان کے برقی دباؤ مختلف ہو سکتے ہیں۔ ان درز کے اثر کو نظر انداز کیا جائے گا۔

موجودہ مسئلے میں بھی برقی دباؤ صرف x اور y کے ساتھ تبدیل ہوتا ہے لہذا مساوات 6.38 ہی اس مسئلے کا لاپلاس مساوات ہے جس کا حل مساوات 6.48 ہے۔ ہم سرحدی شرائط لاگو کرتے ہوئے مساوات کے مستقل حاصل کرتے ہیں۔ مساوات 6.38 میں $x = 0$ پر برقی دباؤ صفر پر کرنے سے

$$0 = (A \cosh 0 + B \sinh 0) (C \cos my + D \sin my)$$

$$0 = A (C \cos my + D \sin my)$$

حاصل ہوتا ہے۔ y کے تمام قیمتوں کے لئے یہ مساوات صرف

$$A = 0$$

کی صورت میں درست ہو سکتا ہے لہذا پہلا مستقل صفر کے برابر حاصل ہوتا ہے۔ $y = 0$ پر صفر برقی دباؤ پر کرنے سے

$$0 = B \sinh mx (C \cos 0 + D \sin 0)$$

$$0 = BC \sinh mx$$

لکھا جائے گا جو x کی ہر قیمت کے لئے صرف $BC = 0$ کی صورت میں درست ہو گا۔ اب چونکہ $A = 0$ ہے لہذا B صفر نہیں ہو سکتا چونکہ ایسی صورت میں مساوات 6.38 سے برقی دباؤ صفر حاصل ہو گا۔ یہ جواب ہمیں مطلوب نہیں ہے۔ ہم وہ جواب چاہتے ہیں جس سے برقی دباؤ کے بارے میں علم حاصل ہو۔ اس لئے $C = 0$ کے برابر ہے۔ اس طرح مساوات 6.48

$$(6.51) \quad V = BD \sinh mx \sin my$$

صورت اختیار کر لے گی۔ اس مساوات میں $y = b$ پر صفر برقی دباؤ پر کرتے ہیں۔

$$0 = BD \sinh mx \sin mb$$

ہم B یا D کو صفر کے برابر نہیں لے سکتے چونکہ ایسی صورت میں $V = 0$ جو اب حاصل ہوتا ہے جس میں ہمیں کوئی دلچسپی نہیں۔ یہ مساوات x کی ہر قیمت کے لئے صرف اس صورت درست ہو گا اگر

$$\sin mb = 0$$

ہو جس سے

$$mb = n\pi$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

کے برابر ہو سکتا ہے۔ اس طرح $m = \frac{n\pi}{b}$ لکھتے ہوئے مساوات 6.51

$$(6.52) \quad V = V_1 \sinh \frac{n\pi x}{b} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

صورت اختیار کر لے گا جہاں BD کو V_1 لکھا گیا ہے۔ مساوات 6.52 تین اطراف کے سطحوں پر صفر برقی دباؤ کے شرائط پر پورا اترتا حل ہے۔ البتہ $x = d$ پر V_0 برقی دباؤ کے شرط کو مندرجہ بالا مساوات سے پورا کرنا ممکن نہیں۔ ہمیں عموماً بالکل اسی طرز کے مسئلوں سے واسطہ پڑتا ہے جہاں آخری قدم پر معلوم ہوتا ہے کہ ہماری کمر دیوار کے ساتھ لگ گئی ہے جہاں سے ظاہری طور پر نکلنے کا کوئی راستہ نہیں۔ گھبرائیں نہیں۔ ہمیں درپیش مسئلے کے تمام ممکنہ جوابات کو مساوات 6.52 کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے۔ یوں ان تمام جوابات کا مجموعہ بھی قابل قبول حل ہو گا یعنی ہم

$$(6.53) \quad V = \sum_{n=0}^{\infty} V_n \sinh \frac{n\pi x}{b} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (0 < y < b, n = 0, 1, 2, \dots)$$

بھی لکھ سکتے ہیں جہاں n کی ہر قیمت پر منفرد V_1 کو V_n سے ظاہر کیا گیا ہے۔ n اور V_n کی قیمتیں ایسی رکھی جاتی ہیں کہ $x = d$ پر V_0 برقی دباؤ کے شرط کو پورا کیا جائے۔ اس آخری شرط کو مساوات میں پر کرتے ہوئے

$$V_0 = \sum_{n=0}^{\infty} V_n \sinh \frac{n\pi d}{b} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

یعنی

$$(6.54) \quad V_0 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi y}{b}$$

ملتا ہے جہاں

$$c_n = V_n \sinh \frac{n\pi d}{b}$$

لکھا گیا ہے۔

مساوات 6.54 فوریئر تسلسل¹⁶ ہے جس کے مستقل یا آسانی حاصل کئے جاسکتے ہیں۔ چونکہ ہمیں $0 < y < b$ کے خطے سے غرض ہے لہذا اس خطے کے باہر ہمیں برقی دباؤ سے کوئی غرض نہیں۔ ایسی صورت میں ہم فوریئر تسلسل کے طاق یا جفت جوابات حاصل کر سکتے ہیں۔ طاق جوابات اس صورت حاصل ہوں گے اگر ہم $0 < y < b$ کو آدھا میعاد تصور کرتے ہوئے بقایا آدھے میعاد $b < y < 2b$ پر برقی دباؤ کو $-V_0$ تصور کریں یعنی

$$V = +V_0 \quad (0 < y < b)$$

$$V = -V_0 \quad (b < y < 2b)$$

اسی صورت میں فوریئر تسلسل کے مستقل

$$c_n = \frac{1}{b} \left[\int_0^b V_0 \sin \frac{n\pi y}{b} dy + \int_b^{2b} (-V_0) \sin \frac{n\pi y}{b} dy \right]$$

سے

$$c_n = \frac{4V_0}{n\pi} \quad (n = 1, 3, 5, \dots)$$

$$c_n = 0 \quad (n = 2, 4, 6, \dots)$$

حاصل ہوتے ہیں۔ اب چونکہ $c_n = V_n \sinh \frac{n\pi d}{b}$ کے برابر ہے لہذا

$$V_n = \frac{4V_0}{n\pi \sinh\left(\frac{n\pi d}{b}\right)} \quad (n = 1, 3, 5, \dots)$$

ہوگا اور یوں مساوات 6.53 کو

$$(6.55) \quad V = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{\sinh \frac{n\pi x}{b}}{\sinh \frac{n\pi d}{b}} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس مساوات سے مختلف نقطوں پر برقی دباؤ $V(x, y)$ حاصل کرتے ہوئے ان میں برابر برقی دباؤ رکھنے والے نقطوں سے گزرتی سطح ہم قوہ سطح ہوگی۔

مثال 6.7: شکل 6.3 میں $d = b$ اور $V_0 = 90 \text{ V}$ ہونے کی صورت میں ڈبے کے عین وسط میں برقی دباؤ حاصل کریں۔

حل: ڈبے کا وسط $(\frac{b}{2}, \frac{b}{2})$ ہے۔ مساوات 6.55 کے پہلے چند اجزاء لیتے ہوئے

$$\begin{aligned} V &= \frac{4 \times 90}{\pi} \left(\frac{\sinh \frac{\pi}{2}}{\sinh \pi} \sin \frac{\pi}{2} + \frac{1 \sinh \frac{3\pi}{2}}{3 \sinh 3\pi} \sin \frac{3\pi}{2} + \frac{1 \sinh \frac{5\pi}{2}}{5 \sinh 5\pi} \sin \frac{5\pi}{2} \right) \\ &= \frac{4 \times 90}{\pi} (0.199268 - 0.0029941887 + 0.0000776406) \\ &= 22.5 \text{ V} \end{aligned}$$

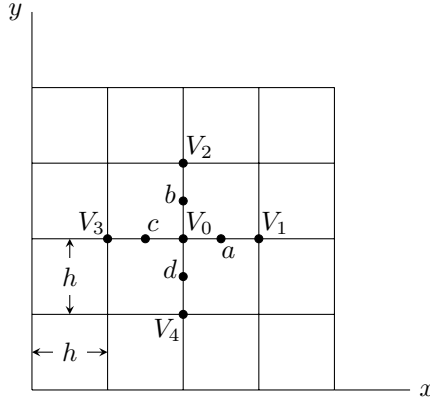
حاصل ہوتا ہے۔

6.7 عددی دہرانے کا طریقہ

لاپلاس مساوات حل کرنے کے کئی ترکیب ہم دیکھ چکے۔ کمپیوٹر کی مدد سے عددی دہرانے¹⁷ کے طریقے سے مساوات حل کئے جاتے ہیں۔ انہیں لاپلاس مساوات اسی ترکیب سے حل کریں۔

تصور کرتے ہیں کہ کسی خطے میں برقی میدان صرف x اور y کے ساتھ تبدیل ہوتا ہے۔ شکل 6.4 میں ایسی سطح دکھائی گئی ہے جسے h چوڑائی اور اتنے ہی لمبائی کے مربع کے ٹکڑوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔ اس میدان میں آپس میں قریبی پانچ نقطوں پر برقی دباؤ V_0, V_1, V_2, V_3 اور V_4 ہیں۔ اگر یہ خطہ ہر جانب یکساں خاصیت رکھتا ہو اور یہ بار سے پاک ہو تب $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$ اور $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ ہوں گے جس سے دو محدود

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0$$



شکل 6.4: لاپلاس مساوات کے تحت کسی بھی نقطے پر برقی دباؤ قریبی نقطوں کے برقی دباؤ کا اوسط ہوتا ہے۔

لکھا جاسکتا ہے۔ اب $E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$ اور $E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}$ ہونے کی وجہ سے مندرجہ بالا مساوات

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

صورت اختیار کر لیتی ہے جو لاپلاس مساوات ہے۔ شکل 6.4 میں نقطہ a اور نقطہ c پر $\frac{\partial V}{\partial x}$ اور $\frac{\partial V}{\partial y}$ کی قیمتیں تقریباً

$$\left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_a \doteq \frac{V_1 - V_0}{h}$$

$$\left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_c \doteq \frac{V_0 - V_3}{h}$$

ہوں گیں۔ یوں ہم

$$\left. \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right|_0 \doteq \frac{\left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_a - \left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_c}{h} \doteq \frac{V_1 - V_0 - V_0 + V_3}{h^2}$$

لکھ سکتے ہیں۔ بالکل اسی طرح ہم

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \Big|_0 \doteq \frac{\frac{\partial V}{\partial y} \Big|_b - \frac{\partial V}{\partial y} \Big|_d}{h} \doteq \frac{V_2 - V_0 - V_0 + V_4}{h^2}$$

بھی لکھ سکتے ہیں۔ ان دو جوابات کو لاپلاس مساوات میں پر کرنے

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \doteq \frac{V_1 + V_2 + V_3 + V_4 - 4V_0}{h^2} = 0$$

سے

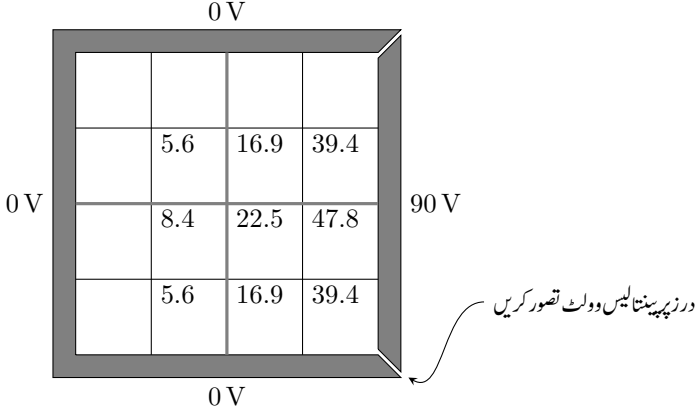
$$(6.56) \quad V_0 \doteq \frac{V_1 + V_2 + V_3 + V_4}{4}$$

حاصل ہوتا ہے۔ h لمبائی جتنی کم ہو مندرجہ بالا مساوات اتنا زیادہ درست ہو گا۔ h کی لمبائی انتہائی چھوٹی کرنے سے مندرجہ بالا مساوات بالکل صحیح ہو گا۔ یہ مساوات کہتا ہے کہ کسی بھی نقطے پر برقی دباؤ اس نقطے کے گرد چار نقطوں کے برقی دباؤ کا اوسط ہوتا ہے۔

عددی دہرانے کے طریقے میں تمام خطے کو شکل 6.4 کی طرز پر مربعوں میں تقسیم کرتے ہوئے مربع کے ہر کونے پر مساوات 6.56 کی مدد سے برقی دباؤ حاصل کیا جاتا ہے۔ تمام خطے پر بار بار اسی طریقے سے برقی دباؤ حاصل کی جاتی ہے حتیٰ کہ کسی بھی نقطے پر متواتر جوابات میں تبدیلی نہ پائی جائے۔ اس طریقے کو مثال سے بہتر سمجھا جا سکتا ہے۔

شکل 6.5 میں مربع شکل کے لامحدود لمبائی کے ڈبے کا عمودی تراش دکھایا گیا ہے۔ اس کے چار اطراف صفر برقی دباؤ پر ہیں جبکہ نہایت باریک غیر موصل فاصلے پر چوتھی طرف نوے ولٹ پر ہے۔ اس ڈبے کو یوں خانوں میں تقسیم کیا گیا ہے کہ یا تو انہیں سولہ چھوٹے خانے تصور کیا جا سکتا ہے اور یا چار درمیانے جسامت کے خانے۔ اس کے علاوہ پورے ڈبے کو ایک ہی بڑا خانہ بھی تصور کیا جا سکتا ہے۔ آئیں ان خانوں کے کونوں پر مساوات 6.56 کی مدد سے برقی دباؤ حاصل کریں۔

اگرچہ کمپیوٹر پر ایسے مسائل حل کرتے ہوئے تمام کونوں پر ابتدائی برقی دباؤ صفر تصور کرتے ہوئے آگے بڑھا جاتا ہے۔ قلم و کاغذ استعمال کرتے ہوئے ذرا سوچ کر چلانا بہتر ثابت ہوتا ہے۔ ہم پورے مربع شکل کو ایک ہی بڑا خانہ تصور کرتے ہوئے اس کے عین وسط میں برقی دباؤ حاصل کرتے ہیں۔ ایسا کرنے کی خاطر ہم بڑے خانے کے چار



شکل 6.5: رقبہ عمودی تراش کو خانوں میں تقسیم کرتے ہوئے، ہر کونے پر گرد کے چار نقطوں کے اوسط برابر برقی دباؤ ہوگا۔

کونوں کو قریبی نقطے چنتے ہیں۔ یوں بڑے خانے کے چار کونوں کی برقی دباؤ زیر استعمال آئے گی۔ اب دو کونوں پر صفر برقی دباؤ ہے جبکہ دو کونے غیر موصل درز پر مشتمل ہیں۔ درز کے ایک جانب صفر جبکہ اس کی دوسری جانب نوے وولٹ ہیں، لہذا درز میں ان دو قیمتوں کا اوسط یعنی پینٹا لیس وولٹ برقی دباؤ تصور کیا جاسکتا ہے۔ اس طرح بڑے خانے کے وسط میں

$$V = \frac{45 + 45 + 0 + 0}{4} = 22.5 \text{ V}$$

حاصل ہوتا ہے۔ شکل 6.5 میں یہ قیمت دکھائی گئی ہے۔

آئیں اب چار درمیانے جسامت کے خانوں کے کونوں پر برقی دباؤ حاصل کریں۔ یہاں بھی ہم ان خانوں کے کونوں کو چار قریبی نقطے چنتے ہیں۔ اوپر دائیں بڑے خانے کے وسط میں برقی دباؤ حاصل کرنے کی خاطر اس خانے کے چار کونوں کے برقی دباؤ زیر استعمال لائے جائیں گے۔ یوں درز پر پینٹا لیس وولٹ تصور کرتے ہوئے

$$V = \frac{90 + 45 + 0 + 22.5}{4} = 39.4 \text{ V}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ اسی طرح دائیں نیچے بڑے خانے کے وسط میں بھی

$$V = \frac{90 + 45 + 0 + 22.5}{4} = 39.4 \text{ V}$$

0 V			
0 V			
	6.3 6.4 6.4	16.7 16.8 16.8	38.7 38.6 38.6
	8.7 8.8 8.8	22.3 22.4 22.4	47.5 47.4 47.4
	6.3 6.4 6.4	16.7 16.8 16.8	38.7 38.6 38.6
0 V			

شکل 6.6: چار متبہ دہرانے کے بعد جوابات تبدیل ہونا بند ہو جاتے ہیں۔ یہی اصل جواب ہیں۔

حاصل ہوتا ہے۔ ہم اس قیمت کو بغیر حل کئے شکل کو دیکھ کر ہی لکھ سکتے تھے چونکہ شکل کا اوپر والا آدھا حصہ اور اس کا نچلا آدھا حصہ بالکل یکساں ہیں لہذا ان دونوں حصوں میں بالکل یکساں برقی دباؤ ہو گا۔ اس حقیقت کو یہاں سے استعمال کرنا شروع کرتے ہیں۔ اوپر اور نیچے بائیں بڑے خانے بالکل یکساں ہیں لہذا دونوں کے وسط میں

$$V = \frac{22.5 + 0 + 0 + 0}{4} = 5.6 \text{ V}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ بقایا کونوں پر برقی دباؤ حاصل کرتے ہوئے نقطے کے بائیں، دائیں، اوپر اور نیچے نقطوں کو قریبی نقطے چنتے ہیں۔ یوں

$$\frac{90 + 39.4 + 22.5 + 39.4}{4} = 47.8 \text{ V}$$

$$\frac{39.4 + 0 + 5.6 + 22.5}{4} = 16.9 \text{ V}$$

$$\frac{22.5 + 5.6 + 0 + 5.6}{4} = 8.4 \text{ V}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ شکل 6.5 میں یہ تمام قیمت دکھائی گئی ہے۔

آئیں شکل میں اوپر سے نیچے چلتے ہوئے پہلے دائیں، پھر درمیانے اور آخر میں بائیں قطار کے تمام کونوں پر برقی دباؤ حاصل کریں۔ ہم یہی سلسلہ بار بار دہرائیں گے حتیٰ کہ کسی بھی کونے پر متواتر حاصل کردہ جوابات تبدیل ہونا بند

کردیں۔ ہر کونے پر برقی دباؤ مساوات 6.56 کے استعمال سے حاصل کیا جائے گا جہاں کونے کے اوپر، نیچے، دائیں اور بائیں نقطوں کے برقی دباؤ کو استعمال کیا جائے گا۔ یاد رہے کہ موصل سطحوں پر برقی دباؤ ہمیں پہلے سے ہی معلوم ہے لہذا ان پر برقی دباؤ حاصل کرنے کی کوشش نہیں کی جائے گی۔

اس طرح دائیں قطار کے اوپر جانب 39.4 V کی نئی قیمت

$$\frac{90 + 0 + 16.9 + 47.8}{4} = 38.7 \text{ V}$$

ہو جائے گی۔ اوپر اور نچلے آدھے حصوں کی مشابہت سے ہم قطار کی چلی قیمت بھی یہی لکھتے ہیں۔ شکل 6.6 میں یہ قیمتیں دکھائی گئی ہیں۔ مساوات 6.56 میں نئی سے نئی قیمتیں استعمال کی جاتی ہیں۔ یوں 47.8 V کی نئی قیمت

$$\frac{90 + 38.7 + 22.5 + 38.7}{4} = 47.5 \text{ V}$$

ہو گی۔

درمیانے قطار پر آتے ہیں۔ یہاں اوپر 16.9 V کی نئی قیمت

$$\frac{38.7 + 0 + 5.6 + 22.5}{4} = 16.7 \text{ V}$$

ہو گی جو قطار کے نچلے کونے کی بھی قیمت ہے۔ اس قطار کے درمیانے نقطے کی نئی قیمت

$$\frac{47.5 + 16.7 + 8.4 + 16.7}{4} = 22.3 \text{ V}$$

ہو گی۔

اسی طرح بائیں قطار کی نئی قیمتیں بھی حاصل کی جاتی ہیں۔ ان تمام کو شکل 6.6 میں دکھایا گیا ہے۔ یہی سلسلہ دوبارہ دہرانے سے مزید نئے اور بہتر جوابات حاصل ہوں گے جنہیں گزشتہ جوابات کے نیچے لکھا گیا ہے۔ شکل میں اس طرح تین مرتبہ دہرانے سے حاصل کئے گئے جوابات دکھائے گئے ہیں۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کسی بھی نقطے کے آخری دو حاصل کردہ جوابات میں کوئی تبدیلی نہیں پائی جاتی۔ اسی لئے ان آخری جوابات کو حتمی جوابات تسلیم کیا جاتا ہے۔

یہاں ڈبے کے عین وسط میں برقی دباؤ 22.4 V حاصل ہوا ہے۔ مثال 6.7 میں ڈبے کے وسط پر برقی دباؤ طاقی سلسلے کی مدد سے 22.5 V حاصل ہوئی تھی جو تقریباً اتنی ہی قیمت ہے۔ یاد رہے کہ یہاں ہم نے اشاریہ کے بعد صرف ایک ہندسہ رکھتے ہوئے برقی دباؤ حاصل کئے۔ اسی وجہ سے دونوں جوابات میں معمولی فرق ہے۔

اگر ہم سوچ سے کام نہ لیتے ہوئے سیدھ و سیدھ مساوات 6.56 میں شروع سے دائیں، بائیں، اوپر اور نیچے نقطوں کی قیمتیں استعمال کرتے، تب ہمیں قطعی جوابات دس مرتبہ دہرانے کے بعد حاصل ہوتے۔ اگرچہ قلم و کاغذ استعمال کرتے ہوئے آپ ضرور سوچ سمجھ سے ہی کام لیں گے البتہ کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے ایسا کرنے کی ضرورت پیش نہیں آتی۔ کمپیوٹر کے لئے کیا ایک مرتبہ اور کیا دس ہزار مرتبہ۔

اس مثال میں ہم نے بہت کم نقطوں پر برقی دباؤ حاصل کی تاکہ دہرانے کا طریقہ باآسانی سمجھا جاسکے۔ کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے آپ زیادہ سے زیادہ نقطے چن سکتے ہیں۔ بہتر سے بہتر نتائج، زیادہ سے زیادہ نقطے چنے سے حاصل ہوتا ہے ناکہ کم نقطوں پر زیادہ ہندسوں پر مبنی جوابات سے۔ دہرانے کا طریقہ اس مرتبہ تک دہرایا جاتا ہے جب تک کسی بھی نقطے پر دو متواتر حاصل کردہ جوابات میں فرق اتنی کم ہو کہ اسے رد کرنا ممکن ہو۔ یوں ایک مائیکرو وولٹ تک درست جوابات حاصل کرنے کی خاطر اس وقت تک دہرائی کی جائے گی جب تک کسی بھی نقطے پر دو متواتر جوابات میں فرق ایک مائیکرو وولٹ سے کم نہ ہو جائے۔

سوالات

سوال 6.1: برقی دباؤ $V = 0.002x^2yz^3$ V ہے۔ نقطہ $N(2, -3, -4)$ پر E ، V اور $|\rho_h|$ حاصل کریں۔ نقطہ N پر ہم قوتہ سطح اور سمت بہاؤ خط کے مساوات حاصل کریں۔ کیا برقی دباؤ لاپلاس کی مساوات پر پورا اترتا ہے؟

جوابات: 1.536 V ، $E = -1.536a_x + 0.512a_y + 1.152a_z \frac{V}{m}$ ، $|\rho_h| = 1.344 \frac{C}{m^2}$ ، $x^2yz^3 - 768 = 0$ ؛ سمت بہاؤ خط ان مساوات سے ظاہر ہوگی: $2y^2 - x^2 = 14$ اور $2z^2 - 3x^2 = 6$ ؛ چونکہ حاصل کردہ حجمی کثافت بار صفر کے برابر نہیں ہے لہذا لاپلاس کی مساوات پر برقی دباؤ پورا نہیں اترتا۔

سوال 6.2: دباؤ کا میدان $V = xy^2z - kxz^3$ لاپلاس مساوات پر پورا اترتا ہے۔ مستقل k کی قیمت حاصل کرتے ہوئے نقطہ $N(5, 2, 4)$ پر E کی سمت میں اکائی سمتیہ دریافت کریں۔

جوابات: $k = \frac{1}{3}$ ، $0.053a_x - 0.799a_y + 0.599a_z$

سوال 6.3: خلاء میں نقطہ $N(2, -3, 1)$ پر میدان $V = x + y^2(z^3 - x^2)$ اور $V = 3x^2 + y^2 - 4z^2$ میں ρ_h حاصل کریں۔

جوابات: -0.265 nC/m^3 ، 0 C/m^3

سوال 6.4: محدد کے مرکز $(0, 0, 0)$ پر $V = 3x^3 + y^4 + 2z$ اور $V = e^{2x} \sin 2y$ کے لاپلاس کی قیمت حاصل کریں۔ کیا یہ تفاعل لاپلاس مساوات پر پورا اترتے ہیں؟ جوابات: 0 ، 0 ، نہیں، جی ہاں

سوال 6.5: میدان $V = 5\rho^2 \sin 2\phi$ کا لاپلاس حاصل کریں۔

جواب: $\nabla^2 V = 0$

سوال 6.6: ثابت کریں کہ $V = \rho V_0 \cos \phi$ لاپلاس مساوات پر پورا اترتا ہے۔ اسی برقی دباؤ کو کارٹیزی محدد میں لکھتے ہوئے $V = 0$ اور $V = V_0$ سطحیں دریافت کریں۔

جوابات: $V = V_0x$ ، $x = 0$ ، $x = 1$

سوال 6.7: متوازی چادر برقی گیر (کپیسٹر) میں $V = 10x + 15y - 30z + 55$ ہے۔ چادر کا رقبہ 100 cm^2 جبکہ ان کے درمیان فاصلہ 0.5 mm ہے۔ برقی گیر (کپیسٹر) پر برقی دباؤ کی قیمت حاصل کریں۔ اس کی کپیسٹنس بھی حاصل کریں۔

جوابات: 17.5 mV ، 177 pF

سوال 6.8: نگی محدود میں میدان $V(\rho, \phi, z) = 55\phi + 72V$ دیا گیا ہے۔ نقطہ $N(2.2, 62^\circ, 3)$ پر V ، E اور کثافت توانائی حاصل کریں۔ خطہ ρ_1 تا ρ_2 ، ϕ_1 تا ϕ_2 ، z_1 تا z_2 میں کل توانائی حاصل کریں۔

جوابات: 132 V ، $-25a_\phi \frac{V}{m}$ ، 2.77 nJ/m^3 ، $13.4(\phi_2 - \phi_1)(z_2 - z_1) \ln \frac{\rho_2}{\rho_1} \text{ nJ}$

سوال 6.9: متوازی چادر برقی گیر (کپیسٹر) کے چادروں کے درمیان فاصلہ d اور برقی مستقل ϵ ہے۔ دونوں چادر صفر وولٹ پر ہیں جبکہ ان کے درمیان خطے میں حجمی کثافت بار ρ_h پائی جاتی ہے۔ پونسن مساوات حل کرتے ہوئے چادروں کے درمیان برقی دباؤ اور E حاصل کریں۔

جوابات: $V(z) = \frac{\rho_0 z}{2\epsilon}(d - z)$ ، $E = \frac{\rho_0}{2\epsilon}(2z - d)a_z \frac{V}{m}$

سوال 6.10: نگی محدود استعمال کرتے ہوئے خلاء میں برقی دباؤ کی مساوات $V = \frac{\sin 2\phi}{\rho}$ دی گئی ہے۔ نقطہ $(0.4, 45^\circ, 2)$ پر حجمی کثافت بار ρ_h حاصل کریں۔ نقطہ $(2.5, 75^\circ, 3)$ پر موصل سطح موجود ہے۔ اس پر سطحی کثافت بار ρ_s حاصل کریں۔

جوابات: 415 pC/m^3 ، $\mp 2.55 \frac{\text{pC}}{\text{m}^2}$ ؛ چونکہ یہ نہیں بتلایا گیا کہ میدان موصل کے کس جانب ہے لہذا یہ نہیں بتلایا جا سکتا کہ کثافت مثبت یا منفی ہے۔

سوال 6.11: رداس a کے دو عدد دائری چادر سے متوازی چادر برقی گیر (کپیسٹر) بنایا جاتا ہے۔ یہ چادر $z = 0$ اور $z = d$ پر پائے جاتے ہیں جبکہ z محدود ان کے محور سے گزرتی ہے۔ ٹنگی چادر صفر وولٹ جبکہ بالائی چادر V_0 وولٹ پر ہے۔ برقی گیر (کپیسٹر) میں بھرے گئی ذو برقی کا برقی مستقل $\epsilon(\rho) = \epsilon - 0(1 + \frac{\rho}{a})$ ہے جو رداسی سمت میں تبدیل ہوتا ہے۔ برقی گیر (کپیسٹر) میں V اور E حاصل کریں۔ بالائی چادر پر برقی بار حاصل کرتے ہوئے کپیسٹنس حاصل کریں۔ چادر کے کناروں پر میدان کے پھولنے¹⁸ کو نظر انداز کریں۔

جوابت: چونکہ E محدود z کی سمت میں ہے جبکہ ϵ محدود ρ کی سمت میں تبدیل ہوتا ہے لہذا لاپلاس اور پوٹنٹیل کے مساوات قابل استعمال ہیں۔ یوں $V(z) = \frac{V_0 z}{d}$ ، $E = -\frac{V_0}{d}$ ، $\rho_s = \epsilon_0(1 + \frac{\epsilon}{d})\frac{V_0}{d}$ اور $Q = \frac{5\pi a^2 \epsilon_0 V_0}{3d}$ اور $C = \frac{5\pi a^2 \epsilon_0}{3d}$ ہیں۔

سوال 6.12: صفحہ 242 پر مساوات 6.13 عمومی محدود میں لاپلاسی دیتا ہے۔ اس مساوات کو حاصل کریں۔

سوال 6.13: مثال 6.4 کو حتمی نتیجے تک پہنچاتے ہوئے اس کا کمپیسٹننس حاصل کریں۔

سوال 6.14: مثال 6.5 میں دیے مساوات 6.24 اور مساوات 6.25 حاصل کریں۔

سوال 6.15: مساوات 6.28 کے مکمل کو حل کریں۔

سوال 6.16: مساوات 6.29 حاصل کریں۔

سوال 6.17: مساوات 6.31 حل کریں۔

سوال 6.18: مساوات 6.41 کے دوسرے جزو کا حل طاقی سلسلے کے طریقے سے حاصل کریں۔ ثابت کریں کہ اس حل کو مساوات 6.47 کی شکل میں لکھا جاسکتا ہے۔

سوال 6.19: دہرانے کے طریقے میں اشاریہ کے نشان کے بعد دو ہندسوں تک درستگی استعمال کرتے ہوئے شکل 6.5 میں دئے تمام نقطوں پر برقی دباؤ چار مرتبہ دہرانے سے حاصل کریں۔ ڈبے کے وسط میں برقی دباؤ کیا حاصل ہوتی ہے۔

جواب: 22.49 V

باب 7

ساکن مقناطیسی میدان

برقی میدان کا منبع برقی بار ہے جس پر باب 2 میں تفصیل سے بات کی گئی۔ مقناطیسی میدان کا منبع یا تو مقناطیس ہو سکتا ہے، یا وقت کے ساتھ بدلتا برقی میدان اور یا پھر برقی رو۔ اس کتاب میں مقناطیس سے پیدا ہونے والے مقناطیسی میدان پر غور نہیں کیا جائے گا۔ وقت کے ساتھ بدلنے والے برقی میدان سے پیدا ہونے والے مقناطیسی میدان پر ایک اور باب میں غور کیا جائے گا جبکہ اس باب میں برقی رو سے پیدا ہونے والے مقناطیسی میدان پر غور کیا جائے گا۔

7.1 بایوٹ-سیوارٹ کا قانون

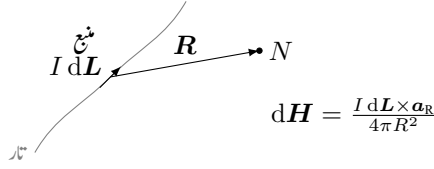
برقی رو اور اس سے پیدا ہونے والے مقناطیسی میدان کا تعلق بایوٹ-سیوارٹ¹ کا قانون²

$$(7.1) \quad d\mathbf{H} = \frac{I d\mathbf{L} \times \mathbf{a}_R}{4\pi R^2}$$

بیان کرتا ہے جہاں سے مقناطیسی شدت H کی اکائی ایمپیئر فی میٹر ($\frac{A}{m}$) حاصل ہوتی ہے۔ آپس میں شکل 7.1 کی مدد سے اس قانون کا مطلب سمجھیں۔

¹ Biot-Savart law

² یہ قانون فرانس کے بایوٹ اور سیوارٹ نے 1820 میں پیش کیا۔ یہ دونوں ایمپیئر کے ساتھی تھے۔



شکل 7.1: باپوٹ سیوارٹ کا قانون۔

یہ قانون باریک تار کی انتہائی چھوٹی لمبائی dL جس میں برقی رو I گزر رہی ہو کی وجہ سے نقطہ N پر پیدا سمی برقی میدان H دیتا ہے۔ نقطہ N باریک تار کے چھوٹے حصے سے R فاصلے پر ہے۔ باریک تار سے مراد ایسی ٹھوس ٹکلی نما موصل تار ہے جس کی موٹائی کم سے کم ہو۔ چھوٹی لمبائی dL کی سمت برقی رو کی سمت میں ہے اور $I dL$ مقناطیسی میدان کا منبع ہے۔

مقناطیسی شدت کی قیمت برقی رو ضرب باریک چھوٹی تار کی لمبائی $I dL$ اور a_R کے سمتی ضرب کے برائے راست تناسب جبکہ ان کے مابین فاصلہ R کے مربع کے بالعکس تناسب رکھتی ہے۔ تناسبی مستقل $\frac{1}{4\pi}$ ہے۔

باپوٹ-سیوارٹ کے قانون کا موازنہ کولمب کے قانون کے ساتھ کرنے کی غرض سے دونوں مساوات کو ایک ساتھ لکھتے ہیں۔

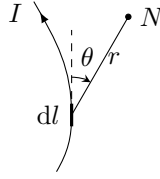
$$(7.2) \quad dH_2 = \frac{I_1 dL_1 \times a_{R21}}{4\pi R_{21}^2}$$

$$dE_2 = \frac{dQ_1 a_{R21}}{4\pi \epsilon_0 R_{21}^2}$$

ان مساوات میں زیر نوشت میں 2 اس مقام کو ظاہر کرتی ہے جہاں میدان کی قیمت حاصل کی گئی ہے جبکہ زیر نوشت میں 1 میدان کے منبع کے مقام کو ظاہر کرتی ہے۔ دونوں میدان فاصلے کے مربع کا بالعکس تناسب رکھتے ہیں۔ دونوں اقسام کے میدان کی شدت اور میدان کی منبع کا خطی تعلق ہے۔ دونوں میں فرق میدان کی سمت کا ہے۔ برقی میدان کی سمت منبع سے اس نقطہ کی جانب ہے جس پر میدان حاصل کیا جا رہا ہو۔ مقناطیسی میدان کی سمت سمتی ضرب کے دائیں ہاتھ کے قانون سے حاصل ہوتی ہے۔

شکل 7.2 میں تار کے چھوٹے حصے dl سے نقطہ N پر مقناطیسی میدان کی مقدار

$$(7.3) \quad dH = \frac{I dl \sin \theta}{4\pi r^2}$$



شکل 7.2: تار کے چھوٹے حصے سے پیدا میدان۔

ہو گا۔

بایوٹ-سیوارٹ کے قانون کو مساوات 7.1 کی شکل میں تجرباتی طور پر ثابت نہیں کیا جا سکتا چونکہ ہر ایک تار کی چھوٹی لمبائی میں برقی رو تب گزرے گی جب برقی رو اس چھوٹی تار تک پہنچائی جائے۔ جو تار اس تک برقی رو پہنچائے گی، وہ بھی مقناطیسی میدان پیدا کرے گی۔ انہیں علیحدہ علیحدہ نہیں کیا جا سکتا۔ ہم فی الحال صرف ایک سمتی برقی رو کی بات کر رہے ہیں۔ ایک سمتی برقی رو کی صورت میں وقت کے ساتھ حجمی کثافتِ بار تبدیل نہیں ہو گا لہذا صفحہ 180 پر دئے استمراری مساوات

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho_h}{\partial t}$$

سے

$$(7.4) \quad \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

حاصل ہو گا جسے مسئلہ پھیلاؤ کی مدد سے

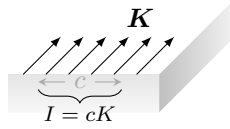
$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

لکھا جا سکتا ہے۔ یہ مساوات کہتی ہے کہ کسی بھی بند سطح سے گزرتی ہوئی برقی رو صفر کے برابر ہے۔ یہ صرف اس صورت ممکن ہے جب برقی رو کسی بند راہ پر گزر رہی ہو۔ ہمیں ایسی ہی مکمل بند راہ کے برقی رو کے اثر کو دیکھنا ہو گا ناکہ تار کے کسی چھوٹے حصے کے برقی رو کو۔

یوں بایوٹ-سیوارٹ قانون کی مکمل شکل

$$(7.5) \quad \mathbf{H} = \oint \frac{I d\mathbf{L} \times \mathbf{a}_R}{4\pi R^2}$$

ہی تجرباتی طور پر ثابت کی جا سکتی ہے۔



شکل 7.3: سطحی کثافت برقی رو کے c چوڑائی میں کل cK برقی رو ہوگا۔

مساوات 7.1 سے مساوات 7.5 لکھی جا سکتی ہے۔ البتہ مساوات 7.5 میں مکمل کے اندر کوئی بھی ایسی اضافی تفاعل شامل کیا جا سکتا ہے جس کا بند مکمل صفر کے برابر ہو۔ مقداری میدان کا ڈھلوان ہر صورت بقائی میدان ہوتا ہے لہذا مساوات 7.5 میں ∇G کے شمول سے اس کے جواب میں کوئی فرق نہیں پڑے گا۔ G کوئی بھی مقداری میدان ہو سکتا ہے۔

واضح رہے کہ کسی بھی نقطے پر مقناطیسی میدان مکمل برقی دور کے اثر کو شامل کرنے سے ہی حاصل کیا جا سکتا ہے۔ برقی رو گزرتی تار کے کچھ حصے کے میدان یا ایسے میدان سے پیدا قوت کی بات بے معنی ہوگی۔

شکل 7.3 میں یکساں سطحی کثافت برقی رو K دکھایا گیا ہے۔ سطحی کثافت برقی رو کو ایمپیرنی اکائی چوڑائی پیش کیا جاتا ہے لہذا c چوڑائی کے حصے میں

$$I = cK$$

برقی رو ہوگا۔ اگر کثافت برقی رو یکساں نہ ہو تب کسی بھی چوڑائی میں کل برقی رو بذریعہ مکمل

$$I = \int K dc$$

حاصل ہوگی جہاں dc چوڑائی کا چھوٹا حصہ ہے۔ یوں dL کو سطحی کثافت برقی رو K یا حجمی کثافت برقی رو J کی صورت میں

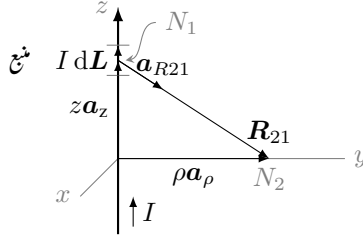
$$(7.6) \quad I dL = K dS = J dh$$

لکھا جا سکتا ہے۔ یوں باپوٹ-سیوارٹ کے قانون کو

$$(7.7) \quad \mathbf{H} = \int_S \frac{\mathbf{K} \times \mathbf{a}_R dS}{4\pi R^2}$$

یا

$$(7.8) \quad \mathbf{H} = \int_h \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{a}_R dh}{4\pi R^2}$$



شکل 7.4: سیدھی لامحدود تار سے پیدا مقامی میدان

لکھا جا سکتا ہے۔

آئیں سیدھی لامحدود لمبائی کی تار جس میں سے برقی رو گزر رہی ہو کی مقامی میدان باؤٹ-سیوارٹ کے قانون سے حاصل کریں۔ شکل 7.4 میں صورت حال دکھائی گئی ہے۔ اس تار کے دونوں سرے لامحدود فاصلے پر ہیں۔ تار کے قریب نقطہ N_2 پر مقامی میدان کا بیشتر حصہ تار کے اس حصے کی وجہ سے ہو گا جو N_2 کے قریب ہو۔ یوں لامحدود فاصلے پر تار کے سروں تک برقی رو پہنچانے والی تار کا نقطہ N_2 پر اثر کو نظر انداز کرتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔

نقطہ N_1 پر تار کے چھوٹے حصے dL میں برقی رو کو منبع مقامی میدان تصور کرتے ہوئے مساوات 7.1 کی مدد سے نقطہ N_2 پر مقامی میدان لکھا جا سکتا ہے۔ چونکہ

$$\mathbf{R}_{21} = \rho \mathbf{a}_\rho - z \mathbf{a}_z$$

کے برابر ہے لہذا

$$R_{21} = |\mathbf{R}_{21}| = \sqrt{\rho^2 + z^2}$$

$$\mathbf{a}_R = \frac{\mathbf{R}_{21}}{|\mathbf{R}_{21}|} = \frac{\rho \mathbf{a}_\rho - z \mathbf{a}_z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}$$

لکھے جا سکتے ہیں۔ نکلی محدود میں چھوٹی لمبائی

$$dL = d\rho \mathbf{a}_\rho + \rho d\phi \mathbf{a}_\phi + dz \mathbf{a}_z$$

لکھی جاتی ہے۔ چونکہ یہاں $d\rho = 0$ اور $d\phi = 0$ ہیں لہذا $dL = dz \mathbf{a}_z$ لکھتے ہوئے مساوات 7.1 کو

$$dH_2 = \frac{I dz \mathbf{a}_z \times (\rho \mathbf{a}_\rho - z \mathbf{a}_z)}{4\pi(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ پورے تار کا مقناطیسی میدان اس مساوات کے مکمل سے حاصل ہو گا جہاں تکمیل $-\infty$ تا $+\infty$ حاصل کیا جائے گا۔ اس طرح

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{I dz \mathbf{a}_z \times (\rho \mathbf{a}_\rho - z \mathbf{a}_z)}{4\pi(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{I\rho}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathbf{a}_\phi dz}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں صفحہ 26 پر مساوات 1.23 کی مدد سے $\mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_\rho = \mathbf{a}_\phi$ جبکہ مساوات 1.24 کی مدد سے $\mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_z = 0$ لکھے گئے ہیں۔

مندرجہ بالا مساوات میں تکمیل کے اندر \mathbf{a}_ϕ پر نظر رکھنی ہو گی۔ اگرچہ \mathbf{a}_ϕ اکائی سمتیہ ہے لہذا اس کی لمبائی تبدیل نہیں ہو سکتی البتہ یہ دیکھنا ضروری ہے کہ آیا تکمیل کا متغیرہ یعنی z تبدیل کرنے سے \mathbf{a}_ϕ کی سمت تو تبدیل نہیں ہوتی۔ صفحہ 30 پر مساوات 1.34 کے تحت

$$\mathbf{a}_\phi = -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \mathbf{a}_x + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \mathbf{a}_y$$

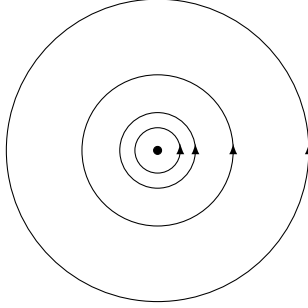
لکھا جا سکتا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ z تبدیل کرنے سے \mathbf{a}_ϕ پر کوئی اثر نہیں پڑتا لہذا \mathbf{a}_ϕ کو تکمیل کے باہر منتقل کیا جا سکتا ہے۔ یوں

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_2 &= \frac{I\rho \mathbf{a}_\phi}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ (7.9) \quad &= \frac{I\rho \mathbf{a}_\phi}{4\pi} \frac{z}{\rho^2 \sqrt{\rho^2 + z^2}} \Bigg|_{-\infty}^{+\infty} \end{aligned}$$

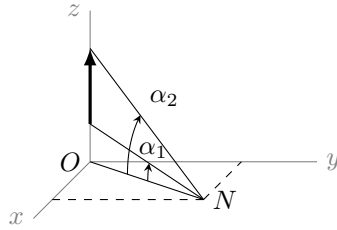
سے

$$(7.10) \quad \mathbf{H}_2 = \frac{I}{2\pi\rho} \mathbf{a}_\phi$$

حاصل ہوتا ہے۔ شکل 7.5 میں برقی رو صفحہ سے باہر نکل رہی ہے جبکہ گول دائرے مقناطیسی میدان کو ظاہر کرتے ہیں۔ اگر تار کو دائیں ہاتھ سے یوں پکڑا جائے کہ انگوٹھا برقی رو کی سمت میں ہو تب اس ہاتھ کی انگلیاں تار کے گرد مقناطیسی میدان کی سمت میں لپٹی ہوں گی۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ یہ مقناطیسی میدان نا تو z تبدیل کرنے اور نا ہی زاویہ ϕ تبدیل کرنے سے تبدیل ہوتا ہے۔ اس کی قیمت صرف تار سے فاصلے پر منحصر ہے۔



شکل 7.5: سیدھی لمبی تار کا مقناطیسی میدان تار کے گرد دائرے بناتا ہے۔ برقی رو صفحے سے باہر نکل رہی ہے۔



شکل 7.6: سیدھی محدود لمبائی کے تار کی مقناطیسی شدت۔

اگر شکل 7.4 میں تار لامحدود نہ ہو تب مساوات 7.6 میں تکمیل کے محدود حدود پر کرنے سے مقناطیسی میدان کی شدت

$$(7.11) \quad \mathbf{H} = \frac{I}{4\pi\rho} (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1) \mathbf{a}_\phi$$

حاصل ہوتی ہے جہاں شکل 7.6 میں α_1 اور α_2 کی نشاندہی کی گئی ہے۔ تار کا نچلا سرا xy سطح یعنی $z = 0$ سطح سے نیچے ہونے کی صورت میں α_1 کی قیمت منفی ہو گی۔ یہی کچھ تار کے دوسرے سرے اور α_2 کے لئے بھی درست ہے۔

7.2 ایمپیئر کا دوری قانون

کولمب کے قانون کی مدد سے مختلف طرز پر پائے جانے والے بار کے برقی میدان حاصل کرنے کے بعد ہم نے گاوس کا قانون اخذ کیا جس سے ہماری زندگی نہایت آسان ہو گئی۔ گاوس کے قانون کی مدد سے متناکل بار سے پیدا برقی میدان انتہائی آسانی سے حاصل ہوتا ہے۔ متناکل برقی رو کے مقناطیسی میدان حاصل کرنے کا بھی اتنا ہی آسان طریقہ موجود ہے جسے ایمپیئر کا دوری قانون³ کہتے ہیں۔ اس قانون کو بايوٹ-سیوارٹ کے قانون سے حصہ 7.7.2 میں حاصل کیا گیا ہے۔ فی الحال ہم اس قانون کو استعمال کرنا سیکھتے ہیں۔ اس قانون کے استعمال کے وقت مسئلے پر غور کرتے ہوئے بغیر حساب و کتاب کے فیصلہ کیا جاتا ہے کہ مقناطیسی میدان کے کون کون سے اجزاء موجود نہیں ہونے چاہئے۔ یہ فیصلہ برقی رو کے راستے کو دیکھ کر کیا جاتا ہے۔

ایمپیئر کا دوری قانون کہتا ہے کہ یک سمتی برقی رو کے گرد کسی بھی راہ H کا لکیری بند تکمیل گھیرے برقی رو کے برابر ہو گا یعنی

$$(7.12) \quad \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I$$

لکیری بند تکمیل کی سمت میں برقی رو کے گرد دائیں ہاتھ کی انگلیاں گھمانے سے اسی ہاتھ کا انگوٹھا مثبت برقی رو کی سمت دے گا۔ ایسا کرتے وقت انگوٹھے کو باقی چار انگلیوں کے عمودی رکھا جاتا ہے۔

³ Ampere's circuital law

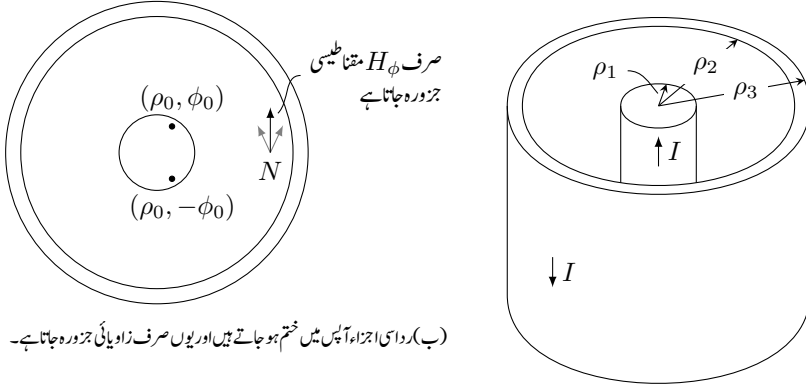
کسی بھی راہ H کے لکیری مکمل سے مراد اس راہ کو انتہائی چھوٹے چھوٹے ٹکڑوں dL میں تقسیم کر کے ہر ٹکڑے پر H کی قیمت استعمال کرتے ہوئے $H \cdot dL$ حاصل کر کے تمام $H \cdot dL$ کا مجموعہ حاصل کرنا ہے۔ مقناطیسی شدت H کی قیمت مختلف مقامات پر عموماً مختلف ہو گی۔ یوں کسی ایک نقطے پر $H \cdot dL$ کی قیمت کسی دوسرے نقطے کے $H \cdot dL$ سے مختلف ہو گی۔ اینڈیسیس کلاوری قانون کہتا ہے کہ اگرچہ ایک سمتی برقی رو کے گرد دو مختلف بند راہوں پر جگہ جگہ $H \cdot dL$ کی قیمتیں مختلف ہوں گی لیکن دونوں راہ پر ان کا مجموعہ عین برقی رو کے برابر ہو گا۔

کسی بھی سطح کا محیط، بند راہ ہوتی ہے۔ اسی طرح کوئی بھی بند راہ، لامحدود سطحوں کا محیط ہوتا ہے۔ یوں بند راہ کا گھیرا ہوا برقی روان تمام سطحوں کو چھیرتا ہوا گزرے گا جن کا محیط یہ بند راہ ہو۔

گاوس کے قانون کا استعمال تب ممکن ہوتا ہے جب بند سطح میں کل برقی بار معلوم ہو۔ اینڈیسیس کلاوری قانون اس صورت استعمال کیا جاسکتا ہے جب بند راہ میں گھیرا کل ایک سمتی برقی رو معلوم ہو۔

آئیں شکل 7.4 میں دکھائے گئے برقی رو گزارتے سیدھی لامحدود لمبائی کے تار کی مقناطیسی شدت اینڈیسیس کلاوری قانون یعنی مساوات 7.12 کی مدد سے دوبارہ حاصل کریں۔ اس مساوات کو استعمال کرتے ہوئے برقی رو کے گرد راہ یوں چینی جاتی ہے کہ اس پر H اور dL یا تو آپس میں عمودی ہوں اور یا H کی قیمت قطعی اور اس کی سمت dL کے متوازی ہو۔ پہلی صورت میں دونوں متغیرات کے مابین نوے درجے کا زاویہ ہے اور $\cos 90 = 0$ ہوتا ہے لہذا $H \cdot dL$ صفر کے برابر ہو گا اور یوں راہ کے اس حصے پر مکمل صفر کے برابر ہو گا۔ دوسری صورت میں متغیرات کے مابین صفر درجے کا زاویہ ہے اور $\cos 0 = 1$ ہوتا ہے لہذا $H \cdot dL$ کو $H dL$ لکھا جاسکتا ہے اور ساتھ ہی ساتھ مقناطیسی شدت کی قیمت قطعی ہونے کی وجہ سے H کو مکمل کے باہر لے جایا جاسکتا ہے۔ یوں راہ کے اس راستے پر مکمل کی قیمت HL کے برابر ہو گی جہاں L راہ کے اس حصے کی لمبائی ہے۔

تار کے گرد اور اس کے ساتھ ساتھ حرکت کرنے سے واضح ہوتا ہے کہ مسئلے کی نوعیت نا تو تار کے گرد زاویہ ϕ پر اور نا ہی محدود z پر منحصر ہے۔ تار سے دور یا اس کے قریب ہونے سے ہی مسئلے کی نوعیت میں تبدیلی آتی ہے۔ یوں صاف ظاہر ہے کہ مقناطیسی شدت صرف ρ پر منحصر ہو سکتی ہے۔ اسی طرح ہاپوٹ-سیوارٹ کے قانون کو مد نظر رکھتے ہوئے ہم دیکھ سکتے ہیں کہ مقناطیسی شدت a_ϕ سمت رکھتی ہے یعنی اس کا صرف H_ϕ جزو پایا جائے گا۔ یوں اگر ρ تبدیل کئے بغیر تار کے گرد چلا جائے تو ہم یقین رکھ سکتے ہیں کہ H کی حتمی قیمت H_ϕ تبدیل نہیں ہو گی۔ ساتھ



(ب) در اسی اجزاء آپس میں ختم ہو جاتے ہیں اور یوں صرف زاویائی جزورہ جاتا ہے۔

(ا) ہم محوری تار کے اندرونی تار میں مثبت جبکہ بیرونی تار میں منفی برقی رو ہے۔

شکل 7.7: ہم محوری تار۔

یہ ساتھ اس راہ پر کسی بھی نقطے پر $d\mathbf{L} = \rho d\phi \mathbf{a}_\phi$ اور $H_\phi \mathbf{a}_\phi$ آپس میں متوازی ہوں گے لہذا ایمپیئر کے دوری قانون سے

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = \int_0^{2\pi} H_\phi \rho d\phi = H_\phi \rho \int_0^{2\pi} d\phi = H_\phi 2\pi \rho = I$$

یا

$$H_\phi = \frac{I}{2\pi \rho}$$

حاصل ہوتا ہے جو ہم پہلے بھی حاصل کر چکے ہیں۔

ایمپیئر کے دوری قانون کے استعمال کی دوسری مثال کی خاطر ہم شکل 7.7 میں دکھائے گئے ہم محوری تار لیتے ہیں۔ فرض کریں کہ z محدود لمبائی کے ہم محوری تار کے اندرونی حصے میں I اور اس کے بیرونی سطح میں -I برقی رو گزر رہی ہے۔ اندرونی موصل موٹی ساخت کے تار کو نہایت تہی فرضی تاروں کا مجموعہ تصور کیا جا سکتا ہے۔ آئیں ان تہی فرضی تاروں سے نقطہ N پر پیدا مقناطیسی شدت پر غور کریں۔ نقطہ N کو کارٹیس می محدود کے x محدود پر رکھتے ہوئے مسئلے کی نوعیت شکل 7.7-ب میں دکھائی گئی ہے۔ پچھلی مثال سے یہ واضح ہے کہ ایسی کسی بھی

پتلی تار کی مقناطیسی شدت میں H_z جزو نہیں پایا جاتا۔ ساتھ ہی ساتھ ہم یہ بھی جانتے ہیں کہ ایسی تار کی مقناطیسی شدت تار کے گرد گول دائرہ بناتی ہے۔ کسی بھی فرضی تار جو (ρ_0, ϕ_0) پر پائی جاتی ہو N پر ΔH_ρ اور ΔH_ϕ اجزاء پیدا کرے گی۔ اسی طرح $(\rho_0, -\phi_0)$ پر پتلی تار سے پیدا مقناطیسی شدت کے بھی ایسے رداسی اور زاویائی اجزاء ہوں گے۔ ان دونوں پتلی تاروں کے رداسی اجزاء آپس میں الٹ سمت میں ہوں گے لہذا یہ ایک دوسرے کو ختم کریں گے جبکہ زاویائی اجزاء ایک ہی سمت میں ہوتے ہیں لہذا N پر صرف زاویائی جزو پایا جائے گا۔

اندرونی ٹھوس موصل تار کے گرد ایسا گول دائرہ لیتے ہیں جس کا رداس ρ اندرونی تار کے رداس ρ_1 سے زیادہ مگر بیرونی تار کے اندرونی رداس ρ_2 سے کم ہو۔ اس راہ پر ہم امپیسز کے دوری قانون کی مدد سے

$$(7.13) \quad H_\phi = \frac{I}{2\pi\rho} \quad (\rho_1 < \rho < \rho_2)$$

لکھ سکتے ہیں۔

اندرونی تار کا رقبہ عمودی تراش $\pi\rho_1^2$ ہے لہذا اس میں کثافت برقی رو $\frac{I}{\pi\rho_1^2}$ ہو گی۔ اگر ρ کو اندرونی ٹھوس موصل تار کے رداس ρ_1 سے کم رکھا جائے تب یہ راہ

$$I_{\text{گیرے}} = \frac{I}{\pi\rho_1^2} \pi\rho^2 = \frac{\rho^2}{\rho_1^2} I$$

برقی رو کو گھیرے گا لہذا امپیسز کے دوری قانون کے تحت اندرونی ٹھوس تار میں

$$H_\phi = \frac{\rho I}{2\pi\rho_1^2} \quad (\rho < \rho_1)$$

مقناطیسی شدت پایا جائے گا۔ اسی طرح اگر ρ کو بیرونی تار کے بیرونی رداس ρ_3 سے زیادہ رکھا جائے تب یہ راہ اندرونی تار کے $+I$ اور بیرونی تار کے $-I$ کو گھیرے گی لہذا یہ کل $I - I = 0$ برقی رو کو گھیرے گا لہذا

$$H_\phi = 0 \quad (\rho_3 < \rho)$$

ہو گا۔ آخر میں اس صورت کو بھی دیکھتے ہیں جب ρ بیرونی تار کے اندر پایا جائے۔ ایسی صورت میں یہ راہ

$$I_{\text{گیرے}} = I - \left(\frac{\rho^2 - \rho_2^2}{\rho_3^2 - \rho_2^2} \right) I = \left(\frac{\rho_3^2 - \rho^2}{\rho_3^2 - \rho_2^2} \right) I$$

برقی رو گھیرے گی لہذا بیرونی تار میں

$$H_\phi = \frac{I}{2\pi\rho} \left(\frac{\rho_3^2 - \rho^2}{\rho_3^2 - \rho_2^2} \right) \quad (\rho_2 < \rho < \rho_3)$$

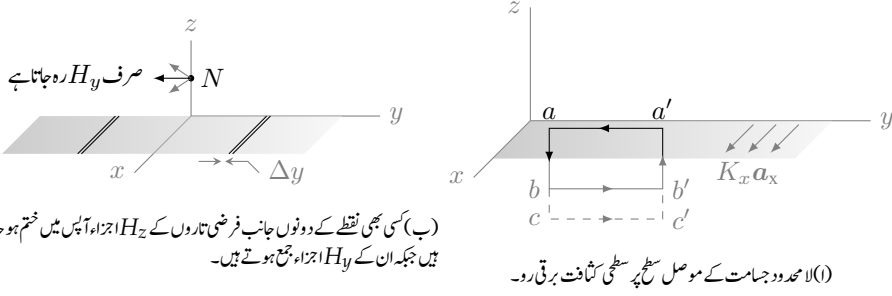
ہو گا۔

ہم محوری تار کے باہر مقناطیسی شدت صفر کے برابر ہے۔ اس کی وجہ یہ ہے کہ تار کے باہر کوئی بھی بند گول دائرہ اندرونی تار کی برقی رو I اور بیرونی تار کی برقی رو $-I$ دونوں کو گھیرتا ہے۔ یہ دونوں برابر مقدار مگر الٹ سمت کے برقی رو ہر نقطے پر برابر مگر الٹ سمت میں مقناطیسی شدت پیدا کرتے ہیں جن کا مجموعہ صفر کے برابر ہوتا ہے۔ ہم محوری تار کی یہ خاصیت کہ یہ بیرون تار کسی قسم کا مقناطیسی میدان نہیں پیدا کرتا انتہائی اہمیت کا حامل ہے۔ ہم محوری تار اسی خاصیت کی بنا پر ہر ایسی جگہ پر استعمال کیا جاتا ہے جہاں تار میں پائے گئے برقی اشارات سے بیرونی تار کسی قسم کا اثر ناقابل برداشت ہو۔

اسپیئر کے دوری قانون کے استعمال کی تیسری مثال کو شکل 7.8-الف میں دکھایا گیا ہے جہاں $z = 0$ لامحدود چوڑائی اور لامحدود لمبائی کے موصل سطح پر $K_x a_x$ سطحی کثافت برقی رو گزر رہی ہے۔ ہمیں اس سطح کے قریب نقطہ N پر مقناطیسی شدت حاصل کرنے سے دلچسپی ہے۔ سطح کے $x = +\infty$ سرے سے $x = -\infty$ سرے تک برقی رو بذریعہ دو لامحدود چوڑائی کے موصل سطحوں سے واپس پہنچتی ہے۔ یہ سطحیں $z = +\infty$ اور $z = -\infty$ پر ہیں۔ اتنی دور سطحوں کے اثر کو نقطہ N پر نظر انداز کیا جاسکتا ہے۔

موصل سطح کو Δy چوڑائی کی فرضی تاروں میں تقسیم کیا جاسکتا ہے۔ ایسا شکل 7.8-ب میں دکھایا گیا ہے۔ یوں ہر ایسی فرضی تار $K_x \Delta y a_x$ برقی رو گزارے گی۔ لامحدود تار کے مقناطیسی میدان سے ہم بخوبی واقف ہیں۔ ایسی کسی بھی فرضی تار کی برقی رو H_x جزو پیدا نہیں کرے گا۔ سطح پر N کے ایک جانب فرضی تار کا H_z جزو، سطح پر N کے دوسری جانب فرضی تار کے H_z جزو کو ختم کرتا ہے جبکہ ان کے H_y اجزاء مل کر دگنی مقناطیسی شدت پیدا کرتے ہیں۔ اس طرح مقناطیسی شدت کا صرف اور صرف H_y جزو ممکن ہے۔

شکل 7.8-الف میں موصل سطح کے کچھ حصے کو گھیرتی ہوئی مستطیلی راہ $a'abb'$ دکھائی گئی ہے۔ aa' یا bb' کی لمبائی y_1 ہے جبکہ ab یا $a'b'$ کی لمبائی $2z_1$ ہے۔ اس راہ کے z_1 حصوں پر مقناطیسی شدت صفر کے برابر ہے لہذا اس حصے پر مقناطیسی شدت کا تکمیل بھی صفر کے برابر ہو گا۔ راہ کے y_1 اطراف سطح سے دونوں جانب z_1 فاصلے پر ہیں۔ سطح کے دونوں اطراف بالکل یکساں مشابہت رکھتے ہیں۔ باپوٹ-سیوارٹ کے قانون سے آپ دیکھ سکتے



شکل 7.8: لامحدود سطحی کثافت برقی رو۔

ہیں کہ سطحی کثافت برقی رو موصل سطح کے اوپر جانب $-H_y a a_y$ جبکہ اس کے چلی جانب $+H_y b a_y$ مقناطیسی شدت پیدا کرتا ہے۔ مستطیلی راہ $K y_1$ برقی رو کو گھیرتی ہے لہذا امپیریکل کے دوری قانون کے تحت

$$H_y a y_1 + H_y b y_1 = K_x y_1$$

یا

$$(7.14) \quad H_y a + H_y b = K_x$$

ہو گا۔ اب اگر موصل سطح کے ایک جانب مستطیلی راہ کا y_1 حصہ قدر دور کرتے ہوئے z_2 فاصلے پر کر دیا جائے تب مندرجہ بالا مساوات

$$H_y a + H_y c = K_x$$

صورت اختیار کر لے گی جس سے صاف ظاہر ہے کہ $H_y b$ اور $H_y c$ عین برابر ہیں یعنی مقناطیسی شدت کا دارومدار سطح سے فاصلے پر ہر گز نہیں ہے۔ اس طرح تمام ایسے نقطے جو مثبت z پر پائے جاتے ہوں پر مقناطیسی شدت برابر ہو گی۔ یہی کچھ تمام ایسے نقطوں کے لئے بھی درست ہے جو منفی z پر پائے جاتے ہوں۔

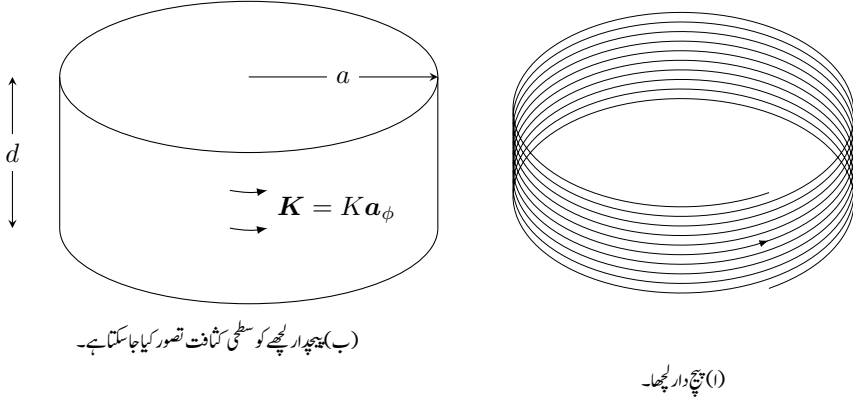
سطح کے دونوں اطراف بالکل یکساں مشابہت رکھتے ہیں لہذا دونوں جانب مقناطیسی شدت بھی برابر ہو گا یعنی

$$|H_{ya}| = |H_{yb}|$$

ہو گا۔ اس طرح مساوات 7.14 سے $H_{ya} = H_{yb} = H_y = \frac{K_x}{2}$ لکھتے ہوئے

$$H_y = -\frac{1}{2} K_x a_x \quad (z > 0)$$

$$H_y = +\frac{1}{2} K_x a_x \quad (z < 0)$$



(ب) بیچدار لچھے کو سطحی کثافت تصور کیا جاسکتا ہے۔

(1) بیچدار لچھا۔

شکل 7.9: بیچدار لچھے کے میدان کا حصول۔

حاصل ہوتا ہے جسے بہتر طور پر

$$(7.15) \quad H = \frac{1}{2} K \times a_N$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں a_N موصل سطح کی عمودی اکائی سمتیہ ہے۔

اگر $z = -h$ پر دوسری لامحدود موصل سطح رکھی جائے جس میں سطحی کثافت برقی رو $K_x a_x$ ہو تب دونوں سطحی کثافت برقی رو کی مجموعی مقناطیسی شدت

$$(7.16) \quad \begin{aligned} H &= K \times a_N & (-h < z < 0) \\ H &= 0 & (z < -h, \quad z > 0) \end{aligned}$$

ہو گی۔

ایمپیر کے دوری قانون کے استعمال میں سب سے مشکل کام ایسی راہ تلاش کرنا ہے جس پر مقناطیسی میدان یا راہ کے عمودی ہو اور یا پھر اس کی قیمت مستقل ہو۔ جہاں قبل از وقت ایسا جاننا ممکن نہ ہو وہاں بایوٹ-سیوارٹ کا قانون ہی قابل استعمال ہو گا۔

آئیں ایمپیر کے دوری قانون کو استعمال کرتے ہوئے شکل 7.9-الف میں دکھائے گئے، لامحدود لمبائی کے بیچدار لچھے⁴ کا مقناطیسی میدان حاصل کریں۔ لچھے کا رداس a جبکہ اس میں لمبائی جانب d فاصلے پر N چکر پائے جاتے ہیں جن میں برقی رو I گزر رہی ہے۔ لچھے کا محور عین z محور پر پایا جاتا ہے۔

⁴solenoid

لچھے کے چکر انتہائی قریب قریب ہونے کی صورت میں لچھے کے تاروں میں برقی رو کو سطحی کثافت رو تصور کیا جا سکتا ہے۔ شکل 7.9-ب میں ایسا ہی کرتے ہوئے لچھے کو نکلی سطحی کثافت

$$\mathbf{K} = K\mathbf{a}_\phi = \frac{NI}{d}\mathbf{a}_\phi$$

تصور کیا گیا ہے۔ سطحی کثافت برقی رو کی صورت میں سطح کے باہر مقناطیسی میدان صفر کے برابر ہو گا جبکہ اس کے اندر میدان نہ تو ρ اور نہ ہی ϕ پر منحصر ہے۔ لامحدود لمبائی کی نکلی میں میدان z پر بھی منحصر نہیں ہو گا۔ ساتھ ہی ساتھ میدان صرف اور صرف \mathbf{a}_z سمت میں ہو گا۔

نکلی کے اندر اور باہر، z محدود کے متوازی لمبائی d کے فرضی لکیروں کے سرے آپس میں جوڑنے سے بند راہ پر ایمپیسر کا دوری قانون لاگو کرتے ہوئے میدان

$$(7.17) \quad \mathbf{H} = K\mathbf{a}_z = \frac{NI}{d}\mathbf{a}_z \quad \text{نکلی کے اندر}$$

$$(7.18) \quad \mathbf{H} = 0 \quad \text{نکلی کے باہر}$$

حاصل ہوتا ہے۔

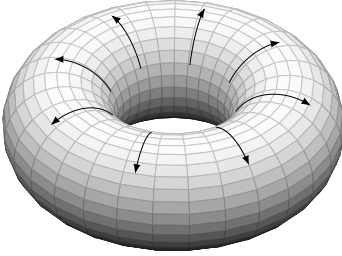
محدود لمبائی کی پیچدار لچھا جس کے چکر قریب قریب ہوں کا میدان مساوات 7.17 ہی دیتی ہے۔ یہ مساوات لچھے کے سروں اور تار سے دور میدان کی صحیح قیمت دیتی ہے۔

آئیں ایمپیسر کے دوری قانون کی ایک اور مثال دیکھیں۔ شکل 7.9-الف کے پیچدار لچھے کو دائری شکل دے کر شکل 7.10-الف حاصل ہوتا ہے۔

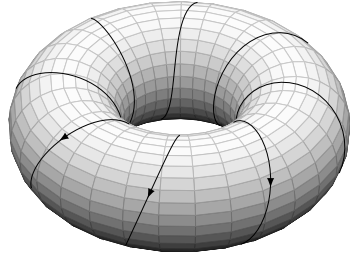
شکل 7.10-الف میں اندر سے ⁶⁵ شکل کی سطح پر N چکر کی لپٹی تار میں I برقی رو گزر رہی ہے۔ اندر سے $z = 0$ سطح پر پڑی ہے جبکہ z محدود اس کے محور سے گزرتا ہے۔ لپٹی تار کے چکر قریب قریب ہونے کی صورت میں اندر سے کی سطح پر K کثافت برقی رو تصور کی جا سکتی ہے۔ اندر سے کا عمودی تراش ردا a کا دائرہ ہے جبکہ اندر سے کا اوسط ردا b ہے۔ اس طرح اندر سے کا اندرونی ردا $b - a$ جبکہ اس کا بیرونی ردا $b + a$ ہو گا۔ یوں اندر سے کے محور کے قریبی سطح پر کثافت برقی رو

$$K = \frac{NI}{2\pi(b-a)} \quad \frac{A}{m}$$

⁶⁵ بچپن میں اندر سے کس نے شکل اندر سے کی طرح ہے لہذا اس کتاب میں اسے اندر سے ہی لکھا جائے گا۔ آپ اسے سائیکل کے تار میں موجود ٹیوب تصور کر سکتے ہیں۔
toroid⁶



(ب) اندر سے کی سطح پر کثافت برقی رو دکھائی جاتی ہے۔



(i) اندر سے لچھا۔

شکل 7.10: اندر سے کی سطح پر تار میں برقی رو کو کثافت برقی رو تصور کیا جاسکتا ہے۔

ہوگی۔ ایمپیر کا دوری قانون استعمال کرنے کی غرض سے ہم اندر سے کے اندر رداس $(b - a) < \rho < (b + a)$ کا دائرہ لیتے ہیں۔ یہ فرضی دائرہ اندر سے کے محور کے قریبی سطح پر کثافت K کو گھیرے گا لہذا یہ

$$2\pi(b - a)K$$

برقی رو کو گھیرے گا۔ یوں ایمپیر کے دوری قانون سے اس رداس پر مقناطیسی میدان

$$(7.19) \quad \mathbf{H} = \frac{2\pi(b - a)K}{2\pi\rho} = \frac{NI}{2\pi\rho} \mathbf{a}_\phi \quad \text{اندر سے کے اندر}$$

$$\mathbf{H} = 0 \quad \text{اندر سے کے باہر}$$

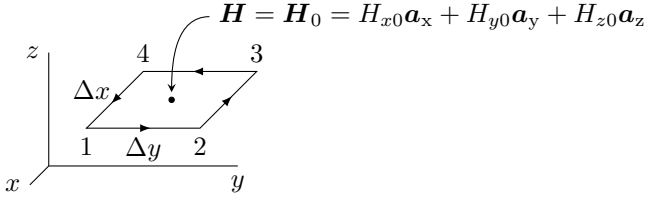
ہو گا۔

شکل 7.10- الف میں تار کے چکر قریب قریب نہ ہونے کی صورت میں جب تک ہم دو چکر کے مابین فاصلے سے چند گنا زیادہ دور، تار سے ہٹ کر رہیں، یہی مساوات اصل میدان کی قیمت کے قریب قریب جواب دے گی۔

7.3 گردش

آپ کو یاد ہو گا کہ ہم نے گاوس کے قانون کو انتہائی چھوٹی حجم پر لاگو کرتے ہوئے پھیلاؤ کی مساوات حاصل کی تھی۔ اس حصے میں ہم ایمپیر کے دوری قانون کو انتہائی چھوٹی بند راہ پر استعمال کرتے ہوئے گردش⁷ کی مساوات

curl⁷



شکل 7.11: گردش کی تعریف۔

حاصل کریں گے۔

کار تیبی محدود میں ہم کسی نقطے N پر Δx اور Δy اطراف کی چھوٹی بند راہ لیتے ہیں۔ شکل 7.11 میں اس چھوٹی بند راہ کو دکھایا گیا ہے جو رقبہ $\Delta x \Delta y$ کو گھیرتی ہے۔ یہ راہ مقناطیسی میدان $\mathbf{H} = H_x \mathbf{a}_x + H_y \mathbf{a}_y + H_z \mathbf{a}_z$ میں پائی جاتی ہے۔ شکل میں راہ پر تیر کے نشان راہ پر چلنے کی سمت کو ظاہر کرتے ہیں۔ اس رقبے کے عین وسط میں نقطہ (x_0, y_0, z_0) پر مقناطیسی شدت

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_0 &= H_x(x_0, y_0, z_0) \mathbf{a}_x + H_y(x_0, y_0, z_0) \mathbf{a}_y + H_z(x_0, y_0, z_0) \mathbf{a}_z \\ &= H_{x0} \mathbf{a}_x + H_{y0} \mathbf{a}_y + H_{z0} \mathbf{a}_z \end{aligned}$$

کے برابر ہے۔ ایمپیئر کے دوری قانون کے تحت اس بند راہ کے گرد مقناطیسی شدت کا تکمیل رقبہ $\Delta x \Delta y$ سے گزرتی برقی رو کے برابر ہو گا۔ آئیں اس تکمیل کو حاصل کریں۔ ایسا کرنے کی خاطر ہم بند راہ پر 1 سے 2 کی طرف چلتے ہوئے پورا چکر کاٹیں گے۔

کار تیبی محدود میں کسی بھی چھوٹے فاصلے کو $d\mathbf{L} = dx \mathbf{a}_x + dy \mathbf{a}_y + dz \mathbf{a}_z$ لکھا جاسکتا ہے۔ شکل 7.11 میں 1 تا 2 پر $dx = 0$ اور $dz = 0$ ہیں لہذا اس چھوٹے فاصلے کو $d\mathbf{L} = dy \mathbf{a}_y$ لکھا جاسکتا ہے۔ چھوٹے چکور کا وسط (x_0, y_0, z_0) ہے۔ یوں چکور کا 1 کونا $(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0 - \frac{\Delta y}{2})$ پر اور 2 کونا $(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0 + \frac{\Delta y}{2})$ پر ہو

گا۔ یوں راہ کے پہلے حصے 1 تا 2 پر لکیری مکمل

$$\begin{aligned} \int_{y_0 - \frac{\Delta y}{2}}^{y_0 + \frac{\Delta y}{2}} (H_x \mathbf{a}_x + H_y \mathbf{a}_y + H_z \mathbf{a}_z) \cdot d\mathbf{y} \mathbf{a}_y &= \int_{y_0 - \frac{\Delta y}{2}}^{y_0 + \frac{\Delta y}{2}} H_y dy \\ &= H_{y21} \int_{y_0 - \frac{\Delta y}{2}}^{y_0 + \frac{\Delta y}{2}} dy \\ &= H_{y21} \Delta y \end{aligned}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں 1 تا 2 پر مقناطیسی شدت کو H_y کے بجائے H_{y21} لکھتے ہوئے اور اس راہ پر مقناطیسی شدت میں تبدیلی کو نظر انداز کرتے ہوئے مکمل کے باہر لے جایا گیا۔ ہمیں اس طرح کے مکمل بار بار حاصل کرنے ہوں گے لہذا اس پورے عمل کو ہم

$$(7.20) \quad (\mathbf{H} \cdot d\mathbf{L})_{21} = H_{y21} \Delta y$$

لکھیں گے۔ ہمیں رقبے کے عین وسط میں مقناطیسی شدت معلوم ہے البتہ راہ کے پہلے حصے پر ہمیں اس کے بارے میں معلومات فراہم نہیں ہے۔ ایسی صورت میں ہمیں ٹیلر تسلسل⁸ کو بروئے کار لانا ہو گا۔

ٹیلر تسلسل

$$f(x + \delta x) = f(x) + \frac{1}{1!} \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (\delta x)^2 + \dots$$

سے آپ بخوبی واقف ہیں جہاں $\frac{\partial f}{\partial x}$ اور دیگر تفرق کو نقطہ x پر حاصل کیا جاتا ہے۔ اگر اس میں $\delta x = \frac{\Delta x}{2}$ پر کیا جائے تو اس کی نئی شکل

$$f\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = f(x) + \frac{1}{1!} \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2 + \dots$$

حاصل ہوتی ہے جسے ہم اب استعمال کرتے ہیں۔

اگر نقطہ (x_0, y_0, z_0) پر تفاعل H_y کی قیمت $H_y(x_0, y_0, z_0)$ ہو تب نقطہ $(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0, z_0)$ پر اس کی قیمت مسئلہ ٹیلر سے

$$\begin{aligned} H_y(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0, z_0) &= H_y(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial H_y}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} + \dots \\ &= H_{y0} + \frac{\partial H_y}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} + \dots \end{aligned}$$

حاصل ہوتی ہے جہاں $\frac{\partial H_y}{\partial x}$ کو نقطہ (x_0, y_0, z_0) پر حاصل کیا جاتا ہے۔ راہ 1 تا 2 پر مقناطیسی شدت کی قیمت ٹیلر تسلسل کے پہلے دو اجزاء سے حاصل کرتے ہوئے

$$(7.21) \quad H_{y21} \doteq H_{y0} + \frac{\partial H_y}{\partial x} \frac{\Delta x}{2}$$

لکھ کر مساوات 7.20 کو

$$(7.22) \quad (\mathbf{H} \cdot d\mathbf{L})_{21} \doteq \left(H_{y0} + \frac{\partial H_y}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) \Delta y$$

لکھا جا سکتا ہے۔

مساوات 7.21 کو یوں بھی حاصل کیا جا سکتا ہے۔ چھوٹے رقبے کے وسط میں x کے ساتھ H_y میں تبدیل ہونے کی شرح $\frac{\partial H_y}{\partial x}$ ہے۔ یوں اگر x میں Δx تبدیلی پیدا ہو تب H_y میں تبدیلی تقریباً $\frac{\partial H_y}{\partial x} \Delta x$ ہو گی اور یوں اس کی نئی قیمت تقریباً $H_y + \frac{\partial H_y}{\partial x} \Delta x$ ہو گی۔ اسی طرح اگر x میں $\frac{\Delta x}{2}$ تبدیلی پیدا ہو تب H_y میں تبدیلی تقریباً $\frac{\partial H_y}{\partial x} \frac{\Delta x}{2}$ ہو گی اور یوں اس کی نئی قیمت تقریباً $H_y + \frac{\partial H_y}{\partial x} \frac{\Delta x}{2}$ ہو گی۔ اب رقبے کے وسط سے $\frac{\Delta x}{2} + \frac{\Delta x}{2}$ پر 1 تا 2 راہ کا درمیانہ نقطہ ہے لہذا یہاں

$$(7.23) \quad H_{y21} \doteq H_{y0} + \frac{\partial H_y}{\partial x} \frac{\Delta x}{2}$$

ہو گا جو عین مساوات 7.21 ہی ہے۔

راہ کے اگلے حصے یعنی 2 تا 3 یہی کچھ کرتے ہوئے

$$(7.24) \quad (\mathbf{H} \cdot d\mathbf{L})_{32} = H_{x32}(-\Delta x) \doteq - \left(H_{x0} + \frac{\partial H_x}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} \right) \Delta x$$

جبکہ 4 تا 3 پر

$$(7.25) \quad (\mathbf{H} \cdot d\mathbf{L})_{43} = H_{43}(-\Delta y) \doteq - \left(H_{y0} - \frac{\partial H_y}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) \Delta y$$

اور 4 تا 1 پر

$$(7.26) \quad (\mathbf{H} \cdot d\mathbf{L})_{14} = H_{x14}\Delta x \doteq \left(H_{x0} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} \right) \Delta x$$

حاصل ہوتے ہیں۔ مساوات 7.22، مساوات 7.24، مساوات 7.25 اور مساوات 7.26 کو جمع کرتے ہوئے پورے بند راستے کا کھل

$$(7.27) \quad \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} \doteq \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \Delta x \Delta y$$

حاصل ہوتا ہے۔ اگر اس چھوٹے بند راہ کے گھیرے رقبے پر کثافت برقی رو

$$\mathbf{J} = J_x \mathbf{a}_x + J_y \mathbf{a}_y + J_z \mathbf{a}_z$$

ہو تب اس رقبے سے $J_z \Delta x \Delta y$ برقی رو گزرے گی۔ ایمپیر کے دوری قانون کے تحت بند راہ کا کھل اور رقبے سے گزرتی برقی رو برابر ہوں گے یعنی

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} \doteq \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \Delta x \Delta y \doteq J_z \Delta x \Delta y$$

ہو گا جسے

$$\frac{\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}}{\Delta x \Delta y} \doteq \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \doteq J_z$$

لکھا جاسکتا ہے۔ رقبے کو جتنا چھوٹا کیا جائے مندرجہ بالا مساوات اتنی ہی زیادہ درست ہو گی حتیٰ کہ $\Delta x \rightarrow 0$ اور $\Delta y \rightarrow 0$ کی صورت میں یہ مکمل طور پر درست ہو گا اور یوں مساوات میں تقریباً برابر کی علامت \doteq کی جگہ بالکل برابر $=$ کی علامت استعمال کی جائے گی یعنی

$$(7.28) \quad \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}}{\Delta x \Delta y} = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = J_z$$

لکھا جائے گا۔

اگر ہم کارتیسی محدد کے بقایا دو محدد کے عمودی چھوٹے رقبے لیں اور مندرجہ بالا عمل دہرائیں تو ہمیں

$$(7.29) \quad \lim_{\substack{\Delta y \rightarrow 0 \\ \Delta z \rightarrow 0}} \frac{\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}}{\Delta y \Delta z} = \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = J_x$$

اور

$$(7.30) \quad \lim_{\substack{\Delta z \rightarrow 0 \\ \Delta x \rightarrow 0}} \frac{\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}}{\Delta z \Delta x} = \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = J_y$$

حاصل ہوں گے۔ مساوات 7.29 میں چھوٹے رقبے کے اطراف Δy اور Δz ہیں جس سے $J_x \Delta y \Delta z$ برقی رو گزرتی ہے۔ اسی طرح مساوات 7.30 میں چھوٹے رقبے کے اطراف Δx اور Δz ہیں جس سے $J_y \Delta z \Delta x$ برقی رو گزرتی ہے۔

ایمپیر کے دوری قانون سے شروع کرتے ہوئے ہم نے مساوات 7.28، مساوات 7.29 اور مساوات 7.30 حاصل کئے جو مقناطیسی شدت کے بند تکمل فی اکائی رقبہ کو گھیرے گئے کثافت برقی رو کے برابر ٹھہراتے ہیں۔ کسی بھی متغیرہ کے بند تکمل فی اکائی رقبہ کو اس متغیرہ کی گردش⁹ کہتے ہیں۔ انتہائی چھوٹے رقبے کے گرد گردش کرتے ہوئے کسی بھی متغیرہ کے بند تکمل کو اس نقطے پر متغیرہ کے گھومنے یا گردش کی ناپ تصور کی جاسکتی ہے۔ اسی لئے اس عمل کو گردش کہا جاتا ہے۔

کسی بھی سمتیہ کی گردش بھی سمتیہ ہوگی۔ گردش کا کوئی بھی جزو انتہائی چھوٹے سیدھے رقبے کے گرد سمتیہ کے بند تکمل فی یہی رقبہ کے برابر ہو گا جہاں بند تکمل کی راہ درکار جزو کے عمودی سطح میں پایا جاتا ہو اور رقبے کی قیمت صفر کے قریب سے قریب تر ہو۔ گردش کی یہ تعریف کسی بھی محدد پر مبنی نہیں ہے۔ اس تعریف کی حسابی شکل

$$H \text{ گردش} = \lim_{\Delta S_n \rightarrow 0} \frac{\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}}{\Delta S_n}$$

ہے جہاں H کی گردش حاصل کی گئی ہے۔ اس مساوات میں ΔS_n وہ چھوٹا سیدھا رقبہ ہے جس کے گرد H کا بند تکمل حاصل کیا گیا ہے۔ گردش از خود سیدھے سطح کے عمودی ہو گا۔ رقبہ ΔS_n لکھتے ہوئے زیر نوشت میں n اسی حقیقت کی یاد دہانی کرتا ہے کہ رقبے اور گردش کے درمیان نوے درجے کا زاویہ پایا جاتا ہے۔

کار تیبی محدد میں گردش H کے x ، y اور z اجزاء مساوات 7.29، مساوات 7.30 اور مساوات 7.28 بالترتیب دیتے ہیں لہذا

(7.31)

$$H \text{ گردش} = \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) \mathbf{a}_x + \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \mathbf{a}_y + \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \mathbf{a}_z = \mathbf{J}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اس مساوات کو قالب کے حتمی قیمت¹⁰ کی شکل میں

$$(7.32) \quad H \text{ گردش} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = \mathbf{J}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ صفحہ 115 پر مساوات 3.29 نیبلا ∇ کے عمل کو بیان کرتا ہے جسے یہاں دوبارہ پیش کرتے ہیں

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{a}_z$$

اور صفحہ 22 پر مساوات 1.19 دو سمتیات کا سمتی ضرب دیتا ہے۔ ان سے گردش نہایت خوبصورتی سے

(7.33)

$$H \text{ گردش} = \nabla \times H$$

لکھی جا سکتی ہے۔ آپ جلد دیکھیں گے کہ صرف کار تیبی محدد میں ہی گردش ∇ اور H کے صلیبی ضرب سے حاصل ہوتا ہے۔ اس کے باوجود کسی بھی محدد میں گردش کو $\nabla \times H$ سے ہی ظاہر کیا جاتا ہے۔ یوں کار تیبی محدد میں H کی گردش یوں لکھی جائے گی۔

$$(7.34) \quad \nabla \times H = \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) \mathbf{a}_x + \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \mathbf{a}_y + \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \mathbf{a}_z$$

ایمپیئر کے دوری قانون کی نقطہ شکل

(7.35)

$$\nabla \times H = \mathbf{J}$$

لکھی جاسکتی ہے جو میکس ویل کی دوسری مساوات ہے جو وقت کے ساتھ تبدیل نہ ہوتے میدان کے لئے درست ہے۔ یہاں میکس ویل کی تیسری مساوات کا بھی ذکر کر لیتے ہیں جو $\oint E \cdot dL$ کی نقطہ شکل

$$(7.36) \quad \nabla \times E = 0$$

ہے۔ میکس ویل کے چوتھی مساوات پر اس کتاب میں آگے غور کیا جائے گا۔

آپ جانتے ہیں کہ ساکن برقی میدان بقائی میدان ہوتا ہے لہذا اس میں بار q کو کسی بھی بند راہ پر پورا چکر گھمانے کے لئے صفر توانائی درکار ہوگی۔ یوں $\oint E \cdot dL$ q صفر کے برابر ہو گا جس سے E کا گردش بھی صفر ہو گا۔ مساوات 7.36 یہی کہتی ہے۔ اس کے برعکس وقت کے ساتھ غیر تغیر پذیر مقناطیسی میدان غیر بقائی میدان ہے جس میں بار کو برقی رو گھیرتی ہوئی کسی بھی بند راہ پر پورا چکر گھمانے کے لئے توانائی درکار ہوگی۔ اسی لئے اس کی گردش صفر نہیں ہوگی۔ مساوات 7.35 یہی کہتی ہے۔

مشق 7.1: گردش یعنی $\nabla \times H$ کو

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} a_x + \frac{\partial}{\partial y} a_y + \frac{\partial}{\partial z} a_z \right) \times (H_x a_x + H_y a_y + H_z a_z)$$

لکھ کر سمتی ضرب سے مساوات 7.31 حاصل کریں۔

مشق 7.2: اگر $H = (x^2y + 2z)a_x + (xz - y)a_y + (e^xyz)a_z$ تب $\nabla \times H$ کیا ہو گا اور اس کی قیمت نقطہ $(0, 1, 2)$ پر کیا ہوگی۔

جوابات: $\nabla \times H = (e^xz - x)a_x + (2 - e^xyz)a_y + (z - x^2)a_z$ اور نقطے پر گردش کی قیمت $2a_x + 2a_z$ ہوگی۔

مثال 7.1: سمتیہ $\mathbf{A} = A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z$ کے گردش کی گردش یعنی $\nabla \times \nabla \times \mathbf{A}$ حاصل کریں۔

حل: مساوات 7.34 سے

$$(7.37) \quad \nabla \times \mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathbf{a}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \mathbf{a}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathbf{a}_z$$

لکھتے ہیں۔ مساوات 7.34 دوبارہ استعمال کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} &= \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \right] \mathbf{a}_x \\ &+ \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \right] \mathbf{a}_y \\ &+ \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \right] \mathbf{a}_z \end{aligned}$$

تمام تفرق حاصل کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} &= \left[\frac{\partial^2 A_y}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z \partial x} \right] \mathbf{a}_x \\ &+ \left[\frac{\partial^2 A_z}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial x \partial y} \right] \mathbf{a}_y \\ &+ \left[\frac{\partial^2 A_x}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y \partial z} \right] \mathbf{a}_z \end{aligned}$$

اس مساوات کے پہلے جزو میں $\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2}$ ، دوسرے جزو میں $\frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2}$ اور تیسرے میں $\frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}$ شامل کرتے ہوئے ذرا مختلف ترتیب سے لکھتے ہیں۔

(7.38)

$$\begin{aligned}\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = & \left[\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z \partial x} \right] \mathbf{a}_x - \left[\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \right] \mathbf{a}_x \\ & + \left[\frac{\partial^2 A_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z \partial y} \right] \mathbf{a}_y - \left[\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \right] \mathbf{a}_y \\ & + \left[\frac{\partial^2 A_x}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \right] \mathbf{a}_z - \left[\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \right] \mathbf{a}_z\end{aligned}$$

یہاں رک کر \mathbf{A} کے پھیلاؤ کی ڈھلوان یعنی $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A})$ حاصل کرتے ہیں۔ پھیلاؤ

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

استعمال کرتے ہوئے

$$\begin{aligned}\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) = & \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial z} \right) \mathbf{a}_x \\ & + \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y \partial z} \right) \mathbf{a}_y \\ & + \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \right) \mathbf{a}_z\end{aligned}$$

(7.39)

حاصل ہوتا ہے۔ اگر ہم

$$\begin{aligned}\nabla^2 \mathbf{A} \equiv & \nabla^2 A_x \mathbf{a}_x + \nabla^2 A_y \mathbf{a}_y + \nabla^2 A_z \mathbf{a}_z \\ = & \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \right) \mathbf{a}_x + \left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \right) \mathbf{a}_y \\ & + \left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \right) \mathbf{a}_z\end{aligned}$$

(7.40)

لکھیں تب مندرجہ بالا دو مساواتوں کی مدد سے مساوات 7.38 کو یوں لکھا جاسکتا ہے۔

(7.41)

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} \equiv \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$$

مساوات 7.40 سمتیہ کی لاپلاسی¹¹ ہے۔

مثال 7.2: سمتیہ S اور مقداری M کے حاصل ضرب کی گردش کے لئے ثابت کریں کہ

$$(7.42) \quad \nabla \times (MS) \equiv (\nabla M) \times S + M(\nabla \times S)$$

کے برابر ہے۔

حل: سمتیہ اور مقداری کے حاصل ضرب کو

$$MS = M(S_x \mathbf{a}_x + S_y \mathbf{a}_y + S_z \mathbf{a}_z) = MS_x \mathbf{a}_x + MS_y \mathbf{a}_y + MS_z \mathbf{a}_z$$

لکھتے ہوئے اس کی گردش مساوات 7.34 کی طرح لکھ کر

$$\begin{aligned} \nabla \times MS &= \left(\frac{\partial MS_z}{\partial y} - \frac{\partial MS_y}{\partial z} \right) \mathbf{a}_x + \left(\frac{\partial MS_x}{\partial z} - \frac{\partial MS_z}{\partial x} \right) \mathbf{a}_y \\ &\quad + \left(\frac{\partial MS_y}{\partial x} - \frac{\partial MS_x}{\partial y} \right) \mathbf{a}_z \end{aligned}$$

تفرق کھولتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \nabla \times MS &= \left(\frac{\partial M}{\partial y} S_z + M \frac{\partial S_z}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} S_y - M \frac{\partial S_y}{\partial z} \right) \mathbf{a}_x \\ &\quad + \left(\frac{\partial M}{\partial z} S_x + M \frac{\partial S_x}{\partial z} - \frac{\partial M}{\partial x} S_z - M \frac{\partial S_z}{\partial x} \right) \mathbf{a}_y \\ &\quad + \left(\frac{\partial M}{\partial x} S_y + M \frac{\partial S_y}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} S_x - M \frac{\partial S_x}{\partial y} \right) \mathbf{a}_z \end{aligned}$$

اس کو یوں ترتیب دیتے ہیں

$$\nabla \times M\mathbf{S} = \left(\frac{\partial M}{\partial y} S_z - \frac{\partial M}{\partial z} S_y \right) \mathbf{a}_x + \left(\frac{\partial M}{\partial z} S_x - \frac{\partial M}{\partial x} S_z \right) \mathbf{a}_y + \left(\frac{\partial M}{\partial x} S_y - \frac{\partial M}{\partial y} S_x \right) \mathbf{a}_z$$

$$+ M \left[\left(\frac{\partial S_z}{\partial y} - \frac{\partial S_y}{\partial z} \right) \mathbf{a}_x + \left(\frac{\partial S_x}{\partial z} - \frac{\partial S_z}{\partial x} \right) \mathbf{a}_y + \left(\frac{\partial S_y}{\partial x} - \frac{\partial S_x}{\partial y} \right) \mathbf{a}_z \right]$$

اس مساوات کا دوسرا جزو $M(\nabla \times \mathbf{S})$ کے برابر ہے جبکہ اس کا پہلا جزو $(\nabla M) \times \mathbf{S}$ کے برابر ہے جسے

$$(\nabla M) \times \mathbf{S} = \left(\frac{\partial M}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial M}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial M}{\partial z} \mathbf{a}_z \right) \times (S_x \mathbf{a}_x + S_y \mathbf{a}_y + S_z \mathbf{a}_z)$$

لکھ کر صلیبی ضرب کے بعد ترتیب دینے سے

$$(\nabla M) \times \mathbf{S} = \left(\frac{\partial M}{\partial y} S_z - \frac{\partial M}{\partial z} S_y \right) \mathbf{a}_x + \left(\frac{\partial M}{\partial z} S_x - \frac{\partial M}{\partial x} S_z \right) \mathbf{a}_y + \left(\frac{\partial M}{\partial x} S_y - \frac{\partial M}{\partial y} S_x \right) \mathbf{a}_z$$

حاصل کیا جاسکتا ہے۔

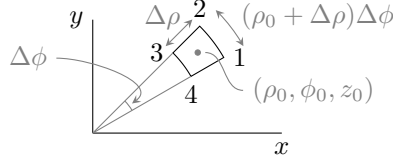
7.3.1 نلکی محمد میں گردش

نلکی محمد میں J_z کثافت برقی رو کے عمودی سطح پر چھوٹا رقبہ لیتے ہیں جسے شکل 7.12 میں دکھایا گیا ہے۔ ایسے رقبے کے اطراف $\Delta\rho$ اور $\rho\Delta\phi$ ہوں گے جبکہ اس سطح پر z کی قیمت تبدیل نہیں ہوگی۔ اس رقبے کے وسط میں

$$\mathbf{H}_0(\rho_0, \phi_0, z_0) = H_{\rho 0} \mathbf{a}_\rho + H_{\phi 0} \mathbf{a}_\phi + H_{z 0} \mathbf{a}_z$$

ہوگا۔ کارٹیس میں محمد میں رقبے کے وسط سے $\frac{\Delta x}{2}$ اور $-\frac{\Delta x}{2}$ فاصلے پر اطراف کی لمبائیاں عین برابر تھیں۔ نلکی محمد میں رقبے کے وسط سے $\frac{\Delta\rho}{2}$ فاصلے پر طرف کی لمبائی $(\rho_0 + \frac{\Delta\rho}{2})\Delta\phi$ جبکہ وسط سے $-\frac{\Delta\rho}{2}$ فاصلے پر طرف کی لمبائی $(\rho_0 - \frac{\Delta\rho}{2})\Delta\phi$ ہے۔ انہیں اطراف پر مقناطیسی شدت بالترتیب

$$H_{\phi 21} \doteq H_{\phi 0} + \frac{\partial H_{\phi}}{\partial \rho} \frac{\Delta\rho}{2}$$



شکل 7.12: نگی محدود میں چھوٹا رقبہ۔

اور

$$H_{\phi 43} \doteq H_{\phi 0} - \frac{\partial H_{\phi}}{\partial \rho} \frac{\Delta \rho}{2}$$

ہوگی جہاں $\frac{\partial H_{\phi}}{\partial \rho}$ چھوٹے رقبے کے وسط میں حاصل کیا جائے گا۔ یوں 1 سے 2 جانب چھوٹے رقبے کے گرد چکر کاٹتے ہوئے ان دو اطراف پر مکمل

$$\begin{aligned} (\mathbf{H} \cdot d\mathbf{L})_{21} &\doteq \left(H_{\phi 0} + \frac{\partial H_{\phi}}{\partial \rho} \frac{\Delta \rho}{2} \right) \left(\rho_0 + \frac{\Delta \rho}{2} \right) \Delta \phi \\ &\doteq \left[H_{\phi 0} \rho_0 + H_{\phi 0} \frac{\Delta \rho}{2} + \rho_0 \frac{\partial H_{\phi}}{\partial \rho} \frac{\Delta \rho}{2} + \frac{\partial H_{\phi}}{\partial \rho} \left(\frac{\Delta \rho}{2} \right)^2 \right] \Delta \phi \end{aligned}$$

اور

$$\begin{aligned} (\mathbf{H} \cdot d\mathbf{L})_{43} &\doteq \left(H_{\phi 0} - \frac{\partial H_{\phi}}{\partial \rho} \frac{\Delta \rho}{2} \right) \left[- \left(\rho_0 - \frac{\Delta \rho}{2} \right) \Delta \phi \right] \\ &\doteq \left[-H_{\phi 0} \rho_0 + H_{\phi 0} \frac{\Delta \rho}{2} + \rho_0 \frac{\partial H_{\phi}}{\partial \rho} \frac{\Delta \rho}{2} - \frac{\partial H_{\phi}}{\partial \rho} \left(\frac{\Delta \rho}{2} \right)^2 \right] \Delta \phi \end{aligned}$$

ہوں گے۔

چھوٹے رقبے کے وسط سے $\frac{\Delta \phi}{2}$ یا $-\frac{\Delta \phi}{2}$ پر اطراف $\Delta \rho$ لمبائی رکھتے ہیں جبکہ ان پر اوسط شدت بالترتیب

$$H_{\phi 32} \doteq H_{\rho 0} + \frac{\partial H_{\rho}}{\partial \phi} \frac{\Delta \phi}{2}$$

اور

$$H_{\phi 14} \doteq H_{\rho 0} - \frac{\partial H_{\rho}}{\partial \phi} \frac{\Delta \phi}{2}$$

ہیں۔ یوں ان اطراف پر مکمل

$$(\mathbf{H} \cdot d\mathbf{L})_{32} \doteq \left(H_{\rho 0} + \frac{\partial H_{\rho}}{\partial \phi} \frac{\Delta \phi}{2} \right) (-\Delta \rho)$$

اور

$$(\mathbf{H} \cdot d\mathbf{L})_{14} \doteq \left(H_{\rho 0} - \frac{\partial H_{\rho}}{\partial \phi} \frac{\Delta \phi}{2} \right) \Delta \rho$$

ہوں گے۔

یوں پورا مکمل ان چار جوابات کا مجموعہ

$$(7.43) \quad \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} \doteq \left(H_{\phi 0} + \rho_0 \frac{\partial H_{\phi}}{\partial \rho} - \frac{\partial H_{\rho}}{\partial \phi} \right) \Delta \rho \Delta \phi$$

ہو گا۔ اس چھوٹے رقبے سے $J_z \rho_0 \Delta \rho \Delta \phi$ برقی رو گزرے گی۔ یوں ایمپیر کے دوری قانون سے

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} \doteq \left(H_{\phi 0} + \rho_0 \frac{\partial H_{\phi}}{\partial \rho} - \frac{\partial H_{\rho}}{\partial \phi} \right) \Delta \rho \Delta \phi \doteq J_z \rho_0 \Delta \rho \Delta \phi$$

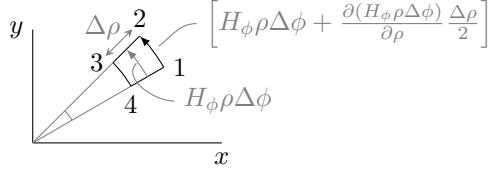
یعنی

$$\frac{\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}}{\rho_0 \Delta \rho \Delta \phi} \doteq \left(\frac{H_{\phi 0}}{\rho_0} + \frac{\partial H_{\phi}}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial H_{\rho}}{\partial \phi} \right) \doteq J_z$$

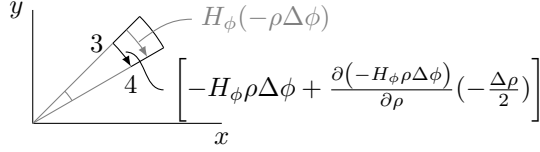
لکھا جاسکتا ہے۔ اگر $\Delta \rho$ اور $\Delta \phi$ کو کم سے کم کرتے ہوئے صفر کے قریب تر کر دیا جائے تب مندرجہ بالا مساوات بالکل درست ہوگی اور تقریباً برابر کی علامت \doteq کی جگہ برابر کی علامت $=$ استعمال کی جائے گی۔ اس طرح گردش کا پہلا جزو

$$(7.44) \quad \lim_{\substack{\Delta \rho \rightarrow 0 \\ \Delta \phi \rightarrow 0}} \frac{\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}}{\rho_0 \Delta \rho \Delta \phi} = \left(\frac{H_{\phi 0}}{\rho_0} + \frac{\partial H_{\phi}}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial H_{\rho}}{\partial \phi} \right) = J_z$$

لکھا جاسکتا ہے۔



(ا) چھوٹے رقبے کے وسط پر مکمل کے قیمت سے بیرونی
زاویائی مکمل کی قیمت کا حصول۔



(ب) چھوٹے رقبے کے وسط پر مکمل کے قیمت سے
اندرونی زاویائی مکمل کی قیمت کا حصول۔

شکل 7.13: زاویائی حصوں پر مکمل کے قیمت کے حصول کا بہتر طریقہ۔

اس سے پہلے کہ ہم گردش کے بقایا دو اجزاء بھی حاصل کریں، انہیں مساوات 7.43 کو قدر مختلف اور بہتر طریقے سے حاصل کریں۔ شکل 7.13-الف کو دیکھتے ہوئے آگے پڑھیں۔ اگر ہم کسی نقطے کے $-\frac{\Delta\phi}{2}$ سے نقطے کے $+\frac{\Delta\phi}{2}$ تک حرکت کریں تو ہم $\rho\Delta\phi$ فاصلہ طے کریں گے۔ اس راہ پر مکمل تقریباً

$$\mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = H_\phi \rho \Delta\phi$$

کے برابر ہو گا۔ اس مکمل کو تفاعل g تصور کرتے ہوئے یعنی $g = H_\phi \rho \Delta\phi$ لیتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ اگر ہم چھوٹے رقبے کے وسط سے رداسی سمت میں $+\frac{\Delta\rho}{2}$ حرکت کریں تو اس تفاعل کی قیمت میں تبدیلی

$$\Delta(\mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}) = \frac{\partial g}{\partial \rho} \frac{\Delta\rho}{2} = \frac{\partial(H_\phi \rho \Delta\phi)}{\partial \rho} \frac{\Delta\rho}{2}$$

لکھی جاسکتی ہے جہاں $\frac{\partial(H_\phi \rho \Delta\phi)}{\partial \rho}$ کو چھوٹے رقبے کے وسط پر حاصل کیا جاتا ہے جہاں رداس ρ_0 کے برابر ہے۔ چونکہ چھوٹے رقبے کے عین وسط پر اس مکمل کی قیمت $H_{\phi 0} \rho_0 \Delta\phi$ کے برابر ہے لہذا وسط سے $\frac{\Delta\rho}{2}$ فاصلے پر مکمل کی قیمت

$$(7.45) \quad \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}_{21} = H_\phi \rho \Delta\phi + \frac{\partial(H_\phi \rho \Delta\phi)}{\partial \rho} \frac{\Delta\rho}{2}$$

ہو گی۔ اسی طرح، جیسا شکل 7.13-ب میں دکھایا گیا ہے، اگر ہم کسی نقطے کے $+\frac{\Delta\phi}{2}$ سے نقطے کے $-\frac{\Delta\phi}{2}$ تک حرکت کریں تو اس راہ پر مکمل

$$\mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = H_\phi(-\rho\Delta\phi)$$

کے برابر ہو گا۔ اگر اس نقطے کو چھوٹے رقبے کا وسط تصور کیا جائے تب وسط سے $-\frac{\Delta\rho}{2}$ فاصلے پر یہی مکمل

$$\begin{aligned} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}_{43} &= -H_\phi\rho\Delta\phi + \frac{\partial(-H_\phi\rho\Delta\phi)}{\partial\rho} \left(-\frac{\Delta\rho}{2}\right) \\ (7.46) \quad &= -H_\phi\rho\Delta\phi + \frac{\partial(H_\phi\rho\Delta\phi)}{\partial\rho} \frac{\Delta\rho}{2} \end{aligned}$$

ہو گا۔

اسی طرح، جیسے شکل 7.14-الف میں دکھایا گیا ہے، کسی بھی نقطے پر $-\frac{\Delta\rho}{2}$ تا $+\frac{\Delta\rho}{2}$ حرکت کرتے ہوئے مکمل کی قیمت $H_\rho\Delta\rho$ ہو گی۔ اس نقطے سے $-\frac{\Delta\phi}{2}$ پر مکمل کی قیمت میں تبدیلی رونما ہو گی جسے

$$\Delta(\mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}) = \frac{\partial(H_\rho\Delta\rho)}{\partial\phi} \left(-\frac{\Delta\phi}{2}\right)$$

لکھا جاسکتا ہے اور یوں مکمل کی نئی قیمت

$$\mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = H_\rho\Delta\rho - \frac{\partial(H_\rho\Delta\rho)}{\partial\phi} \frac{\Delta\phi}{2}$$

ہو گی۔ اگر چھوٹے رقبے کے عین وسط کو یہی نقطہ تصور کیا جائے تب مندرجہ بالا مساوات 4 تا 1 پر مکمل دیتا ہے یعنی

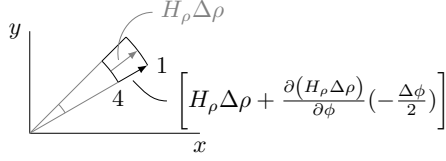
$$(7.47) \quad \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}_{14} = H_\rho\Delta\rho - \frac{\partial(H_\rho\Delta\rho)}{\partial\phi} \frac{\Delta\phi}{2}$$

اسی طرح، جیسے شکل 7.14-ب میں دکھایا گیا ہے، کسی بھی نقطے پر $+\frac{\Delta\rho}{2}$ تا $-\frac{\Delta\rho}{2}$ حرکت کرتے ہوئے مکمل کی قیمت

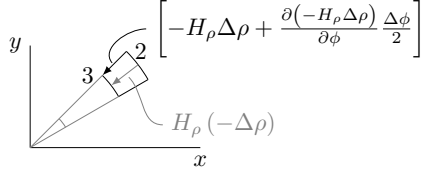
$$\mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = H_\rho(-\Delta\rho)$$

ہو گی۔ اس نقطے کو چھوٹے رقبے کا وسط تصور کرتے ہوئے وسط سے $+\frac{\Delta\phi}{2}$ پر یہی مکمل

$$(7.48) \quad \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}_{32} = -H_\rho\Delta\rho - \frac{\partial(H_\rho\Delta\rho)}{\partial\phi} \frac{\Delta\phi}{2}$$



(ا) چھوٹے رقبے کے وسط پر رداسی تکمل کے قیمت سے کم زاویہ پر تکمل کی قیمت کا حصول۔



(ب) چھوٹے رقبے کے وسط پر رداسی تکمل کے قیمت سے زیادہ زاویہ پر تکمل کی قیمت کا حصول۔

شکل 7.14: رداسی حصول پر تکمل کے قیمت کے حصول کا بہتر طریقہ۔

کے برابر ہو گا۔

مساوات 7.45، مساوات 7.46، مساوات 7.47 اور مساوات 7.48 کا مجموعہ چھوٹے رقبے کے گرد پورا تکمل دیتا ہے یعنی

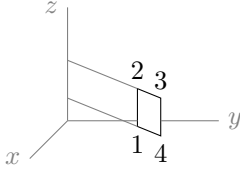
$$(7.49) \quad \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = \frac{\partial(H_\phi \rho \Delta\phi)}{\partial\rho} \Delta\rho - \frac{\partial(H_\rho \Delta\rho)}{\partial\phi} \Delta\phi$$

$$= \left[\frac{\partial(H_\phi \rho)}{\partial\rho} - \frac{\partial H_\rho}{\partial\phi} \right] \Delta\rho \Delta\phi$$

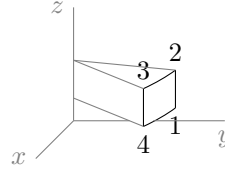
جہاں تفرق رقبے کے وسط پر حاصل کئے جاتے ہیں۔ اس مساوات کو یوں بھی لکھا جاسکتا ہے

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = \left[H_{\phi 0} + \rho_0 \frac{\partial H_\phi}{\partial\rho} - \frac{\partial H_\rho}{\partial\phi} \right] \Delta\rho \Delta\phi$$

جو بالکل مساوات 7.43 ہی ہے۔ یاد رہے کہ $\frac{\partial(H_\phi \rho)}{\partial\rho}$ کو چھوٹے رقبے کے وسط میں حاصل کیا جائے گا۔ یوں رداس



(ب) نکلی محدود میں شدت کا زاویائی جزو حاصل کرنے کے لئے چھوٹا رقبہ۔



(i) نکلی محدود میں شدت کا رداسی جزو حاصل کرنے کے لئے چھوٹا رقبہ۔

شکل 7.15: نکلی محدود میں گردش کے رداسی اور زاویائی اجزاء کے رقبے۔

ρ_0 اور مقناطیسی شدت $H_{\phi 0}$ کے برابر ہوں گے۔ مساوات 7.49 سے گردش

$$(7.50) \quad \lim_{\substack{\Delta\rho \rightarrow 0 \\ \Delta\phi \rightarrow 0}} \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial(H_{\phi}\rho)}{\partial\rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_{\phi}}{\partial\phi} \right] = J_z$$

آئیں اب نکلی محدود میں گردش کے بقایا دو اجزاء بھی حاصل کریں۔ گردش کا رداسی جزو حاصل کرنے کی خاطر ہم $\rho = \rho_0$ سطح پر چھوٹا رقبہ لیتے ہیں جس کے اطراف Δz اور $\rho_0 \Delta\phi$ لمبائی رکھیں گے۔ اس رقبے کو شکل 7.15-الف میں دکھایا گیا ہے۔ اس پر 1 سے 2 جانب گھومتے ہوئے کا لکیری مکمل حاصل کیا جائے گا۔ مستقل رداس کے سطح پر کسی بھی نقطے کے قریب $-\frac{\Delta z}{2}$ تا $+\frac{\Delta z}{2}$ چلتے ہوئے مکمل $H_z \Delta z$ حاصل ہوتا ہے۔ اس نقطے سے $+\frac{\Delta\phi}{2}$ زاویہ پر اس مکمل کی قیمت ٹیلر تسلسل سے

$$\mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}_{21} = H_z \Delta z + \frac{\partial(H_z \Delta z)}{\partial\phi} \left(+\frac{\Delta\phi}{2} \right)$$

حاصل ہوتی ہے۔ اسی طرح نقطے کے قریب $+\frac{\Delta z}{2}$ تا $-\frac{\Delta z}{2}$ چلتے ہوئے مکمل $-H_z \Delta z$ جبکہ نقطے سے $-\frac{\Delta\phi}{2}$ زاویہ پر

$$\mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}_{43} = -H_z \Delta z + \frac{\partial(-H_z \Delta z)}{\partial\phi} \left(-\frac{\Delta\phi}{2} \right)$$

حاصل ہوتا ہے۔ ان دو جوابات سے رقبے کے z اطراف کا مکمل

$$(7.51) \quad \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}_{21} + \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}_{43} = +\frac{\partial H_z}{\partial\phi} \Delta z \Delta\phi$$

حاصل ہوتا ہے۔ کسی بھی نقطے کے قریب $-\frac{\Delta\phi}{2}$ تا $+\frac{\Delta\phi}{2}$ پر تکمیل کی قیمت $H_\phi\rho\Delta\phi$ جبکہ نقطے سے $-\frac{\Delta z}{2}$ فاصلے پر یہی تکمیل ٹیئر تسلسل سے

$$\mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}_{14} = H_\phi\rho\Delta\phi + \frac{\partial(H_\phi\rho\Delta\phi)}{\partial z} \left(-\frac{\Delta z}{2}\right)$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح نقطے کے قریب $+\frac{\Delta\phi}{2}$ تا $-\frac{\Delta\phi}{2}$ پر تکمیل کی قیمت $-H_\phi\rho\Delta\phi$ جبکہ نقطے سے $+\frac{\Delta z}{2}$ فاصلے پر یہی تکمیل ٹیئر تسلسل سے

$$\mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}_{32} = -H_\phi\rho\Delta\phi + \frac{\partial(-H_\phi\rho\Delta\phi)}{\partial z} \left(+\frac{\Delta z}{2}\right)$$

حاصل ہوتا ہے۔ ان دو جوابات کے مجموعے سے چھوٹے رقبے کے گرد گھومتے ہوئے زاویائی حصے کا تکمیل

$$(7.52) \quad \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}_{14} + \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}_{32} = -\rho \frac{\partial H_\phi}{\partial z} \Delta z \Delta\phi$$

حاصل ہوتا ہے۔

مساوات 7.51 اور مساوات 7.52 کا مجموعہ چھوٹے رقبے کے گرد کل تکمیل دیتا ہے جو رقبے سے گزرتی برقی رو $J_\rho\rho\Delta\phi\Delta z$ کے برابر ہو گا یعنی

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = \left[\frac{\partial H_z}{\partial \phi} - \rho \frac{\partial H_\phi}{\partial z} \right] \Delta z \Delta\phi = J_\rho\rho\Delta\phi\Delta z$$

جس سے گردش کا رداسی جزو

$$(7.53) \quad \lim_{\substack{\Delta\phi \rightarrow 0 \\ \Delta z \rightarrow 0}} \frac{\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}}{\rho\Delta\phi\Delta z} = \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} - \frac{\partial H_\phi}{\partial z} \right] = J_\rho$$

ملتا ہے۔

شکل 7.15-ب میں 1 سے 2 جانب گھومتے ہوئے H کے لکیری تکمل مندرجہ ذیل ہیں

$$\begin{aligned} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}_{21} &= H_z \Delta z + \frac{\partial(H_z \Delta z)}{\partial \rho} \left(-\frac{\Delta \rho}{2} \right) \\ \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}_{43} &= -H_z \Delta z + \frac{\partial(-H_z \Delta z)}{\partial \rho} \left(+\frac{\Delta \rho}{2} \right) \\ \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}_{32} &= H_\rho \Delta \rho + \frac{\partial(H_\rho \Delta \rho)}{\partial z} \frac{\Delta z}{2} \\ \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}_{14} &= -H_\rho \Delta \rho + \frac{\partial(-H_\rho \Delta \rho)}{\partial z} \left(-\frac{\Delta z}{2} \right) \end{aligned}$$

اور یوں ایمپیر کے دوری قانون سے

$$(7.54) \quad \lim_{\substack{\Delta \rho \rightarrow 0 \\ \Delta z \rightarrow 0}} \frac{\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}}{\Delta \rho \Delta z} = \left(\frac{\partial H_\rho}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \right) = J_\phi$$

لکھا جاسکتا ہے۔

مساوات 7.54، مساوات 7.53 اور مساوات 7.50 کا مجموعہ نکلی محدود میں گردش دیتا ہے یعنی

$$(7.55) \quad \nabla \times \mathbf{H} = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} - \frac{\partial H_\phi}{\partial z} \right) \mathbf{a}_\rho + \left(\frac{\partial H_\rho}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \right) \mathbf{a}_\phi + \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial(H_\phi \rho)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_\rho}{\partial \phi} \right] \mathbf{a}_z$$

یہاں ایک مرتبہ پھر یہ بتلانا ضروری ہے کہ نکلی محدود میں ∇ اور \mathbf{H} کا صلیبی ضرب کسی صورت مندرجہ بالا مساوات کا دایاں ہاتھ نہیں دیتا۔ اس کے باوجود \mathbf{H} کے گردش کو $\nabla \times \mathbf{H}$ سے ہی ظاہر کیا جاتا ہے۔

مشق 7.3: اگر $\mathbf{H} = (3\rho \cos \phi + 5)\mathbf{a}_\rho + 6 \sin \phi \mathbf{a}_\phi + 2\mathbf{a}_z$ ہو تب $\nabla \times \mathbf{H}$ کیا ہوگا۔

جواب: $\nabla \times \mathbf{H} = \left(\frac{6}{\rho} + 3 \right) \sin \phi \mathbf{a}_z$

7.3.2 عمومی محدود میں گردش کی مساوات

صفحہ 118 پر حصہ 3.10 میں عمومی محدود کے استعمال سے پھیلاؤ کی مساوات حاصل کی گئی۔ یہاں عمومی محدود میں گردش کی مساوات حاصل کرتے ہیں۔ عمومی محدود کے متغیرات (u, v, w) جبکہ اکائی سمتیات (a_u, a_v, a_w) ہیں۔ ان میں تین اطراف

$$dL_u = k_1 du$$

$$dL_v = k_2 dv$$

$$dL_w = k_3 dw$$

لکھے جاتے ہیں۔

گردش کا پہلا جزو حاصل کرنے کی خاطر ہم نقطہ (u, v, w) پر u کے عمودی سطح پر چھوٹا رقبہ لیتے ہیں جس کے اطراف $k_2 \Delta v$ اور $k_3 \Delta w$ ہوں گے۔ اب $v - \frac{\Delta v}{2}$ سے $v + \frac{\Delta v}{2}$ تک فاصلہ $k_2 \Delta v$ کے برابر ہے لہذا اس پر چلتے ہوئے مکمل $H_v k_2 \Delta v$ کے برابر ہو گا۔ نقطہ (u, v, w) سے $-\frac{\Delta w}{2}$ پر یہی مکمل ٹیلر تسلسل سے

$$\mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}_{21} = H_v k_2 \Delta v + \frac{\partial(H_v k_2 \Delta v)}{\partial w} \left(-\frac{\Delta w}{2} \right)$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح $v + \frac{\Delta v}{2}$ سے $v - \frac{\Delta v}{2}$ تک مکمل $-H_v k_2 \Delta v$ کے برابر ہو گا۔ نقطہ (u, v, w) سے $+\frac{\Delta w}{2}$ پر یہی مکمل

$$\mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}_{43} = -H_v k_2 \Delta v + \frac{\partial(-H_v k_2 \Delta v)}{\partial w} \left(\frac{\Delta w}{2} \right)$$

ہو گا۔ یوں ان اطراف پر کل مکمل

$$(7.56) \quad \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}_{21} + \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}_{43} = -\frac{\partial(H_v k_2)}{\partial w} \Delta v \Delta w$$

ہو گا۔ یہی طریقہ کار استعمال کرتے ہوئے

$$\mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}_{32} = H_w k_3 \Delta w + \frac{\partial(H_w k_3 \Delta w)}{\partial v} \left(\frac{\Delta v}{2} \right)$$

$$\mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}_{14} = -H_w k_3 \Delta w + \frac{\partial(-H_w k_3 \Delta w)}{\partial v} \left(-\frac{\Delta v}{2} \right)$$

حاصل ہوتے ہیں جن سے

$$(7.57) \quad \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}_{32} + \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}_{14} = \frac{\partial(H_w k_3)}{\partial v} \Delta v \Delta w$$

لکھا جاسکتا ہے۔ یوں چھوٹے رقبے کے گرد کل تکمل

$$(7.58) \quad \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = \left[\frac{\partial(H_w k_3)}{\partial v} - \frac{\partial(H_v k_2)}{\partial w} \right] \Delta v \Delta w$$

لکھتے ہوئے ایمپیر کے دوری قانون سے

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = \left[\frac{\partial(H_w k_3)}{\partial v} - \frac{\partial(H_v k_2)}{\partial w} \right] \Delta v \Delta w = J_u k_2 k_3 \Delta v \Delta w$$

لکھ کر گردش کا پہلا جزو

$$(7.59) \quad \lim_{\substack{\Delta v \rightarrow 0 \\ \Delta w \rightarrow 0}} \frac{\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}}{k_2 k_3 \Delta v \Delta w} = \frac{1}{k_2 k_3} \left[\frac{\partial(H_w k_3)}{\partial v} - \frac{\partial(H_v k_2)}{\partial w} \right] = J_u$$

حاصل ہوتا ہے۔ آپ اسی مساوات میں متغیرات ذرا دیکھ کر تبدیل کرتے ہوئے گردش کے بقایا دو اجزاء

$$(7.60) \quad \lim_{\substack{\Delta u \rightarrow 0 \\ \Delta w \rightarrow 0}} \frac{\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}}{k_1 k_3 \Delta u \Delta w} = \frac{1}{k_1 k_3} \left[\frac{\partial(H_u k_1)}{\partial w} - \frac{\partial(H_w k_3)}{\partial u} \right] = J_v$$

اور

$$(7.61) \quad \lim_{\substack{\Delta u \rightarrow 0 \\ \Delta v \rightarrow 0}} \frac{\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}}{k_1 k_2 \Delta u \Delta v} = \frac{1}{k_1 k_2} \left[\frac{\partial(H_v k_2)}{\partial u} - \frac{\partial(H_u k_1)}{\partial v} \right] = J_w$$

لکھ سکتے ہیں۔ عمومی محدود میں گردش کے ان اجزاء کو

$$(7.62) \quad \nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{k_2 k_3} \left[\frac{\partial(H_w k_3)}{\partial v} - \frac{\partial(H_v k_2)}{\partial w} \right] \mathbf{a}_u + \frac{1}{k_1 k_3} \left[\frac{\partial(H_u k_1)}{\partial w} - \frac{\partial(H_w k_3)}{\partial u} \right] \mathbf{a}_v \\ + \frac{1}{k_1 k_2} \left[\frac{\partial(H_v k_2)}{\partial u} - \frac{\partial(H_u k_1)}{\partial v} \right] \mathbf{a}_w$$

یا قالب کا حتمی قیمت

$$(7.63) \quad \mathbf{H} \text{ گردش} = \begin{vmatrix} \frac{\mathbf{a}_u}{k_2 k_3} & \frac{\mathbf{a}_v}{k_3 k_1} & \frac{\mathbf{a}_w}{k_1 k_2} \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ k_1 H_u & k_2 H_v & k_3 H_w \end{vmatrix}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

7.3.3 کروئی محدود میں گردش کی مساوات

جیسے صفحہ 118 پر حصہ 3.10 میں بتلایا گیا عمومی محدود میں

$$k_1 = 1$$

$$k_2 = r$$

$$k_3 = r \sin \theta$$

اور \mathbf{a}_u کی جگہ \mathbf{a}_r ، \mathbf{a}_v کی جگہ \mathbf{a}_θ اور \mathbf{a}_w کی جگہ \mathbf{a}_ϕ پر کرنے سے کروئی محدود حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 7.62 میں یہی کچھ پر کرتے ہوئے یوں کروئی محدود میں گردش کی مساوات

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial(H_\phi r \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial(H_\theta r)}{\partial \phi} \right] \mathbf{a}_r + \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial H_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(H_\phi r \sin \theta)}{\partial r} \right] \mathbf{a}_\theta + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(H_\theta r)}{\partial r} - \frac{\partial H_r}{\partial \theta} \right] \mathbf{a}_\phi$$

یا

$$(7.64) \quad \nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial(H_\phi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial H_\theta}{\partial \phi} \right] \mathbf{a}_r + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial H_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(r H_\phi)}{\partial r} \right] \mathbf{a}_\theta + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(r H_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial H_r}{\partial \theta} \right] \mathbf{a}_\phi$$

حاصل ہوتی ہے۔

مشق 7.4: مندرجہ ذیل میدانوں کے لئے $\nabla \times \mathbf{H}$ حاصل کریں۔

$$\mathbf{H} = 3\rho^2 \cos \phi \mathbf{a}_\rho - 2\rho \sin \phi \mathbf{a}_\phi + \frac{z}{\rho} \mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{H} = 2r^2 \cos \theta \mathbf{a}_r - 5r \sin \theta \mathbf{a}_\theta$$

جوابات: $\nabla \times \mathbf{H} = (2r - 10) \sin \theta \mathbf{a}_\phi$ ، $\nabla \times \mathbf{H} = \frac{z}{\rho^2} \mathbf{a}_\phi + (3\rho - 4) \sin \phi \mathbf{a}_z$

7.4 مسئلہ سٹوکس

شکل 7.16-الف میں ایک رقبہ دکھایا گیا ہے جسے دو چھوٹے ٹکڑوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔ بائیں چھوٹے رقبے کے لئے گردش

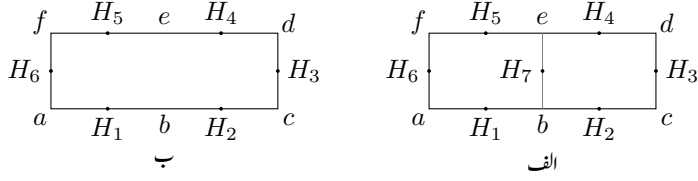
$$\frac{\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}_B}{\Delta S_B} \doteq (\nabla \times \mathbf{H}_B)_N$$

لکھی جاسکتی ہے جہاں زیر نوشت میں N اس بات کی یاد دہانی کرتا ہے کہ گردش رقبے ΔS_B کے عمودی ہے اور زیر نوشت میں B بائیں رقبے کو ظاہر کرتا ہے۔ یوں $d\mathbf{L}_B$ سے مراد بائیں رقبے کی سرحد پر چھوٹا فاصلہ ہے جبکہ \mathbf{H}_B سے مراد بائیں چھوٹے رقبے کے وسط میں مقناطیسی شدت ہے۔ اس طرح اسی مساوات کو

$$\frac{\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}_B}{\Delta S_B} \doteq (\nabla \times \mathbf{H}_B) \cdot \mathbf{a}_N$$

یا

$$\begin{aligned} \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}_B &\doteq (\nabla \times \mathbf{H}_B) \cdot \mathbf{a}_N \Delta S_B \\ &= (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot \Delta \mathbf{S}_B \end{aligned}$$



شکل 7.16: چھوٹے رقبوں کے گرد لکیری مکمل پورے رقبے کے گرد لکیری مکمل کے برابر ہے۔

بھی لکھا جا سکتا ہے جہاں a_N اس رقبے کی اکائی عمودی سمتیہ ہے۔ اب شکل کو دیکھ کر

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}_B \doteq H_1 \cdot \Delta L_{ba} + H_7 \cdot \Delta L_{eb} + H_5 \cdot \Delta L_{fe} + H_6 \cdot \Delta L_{af}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

اسی طرح دائیں چھوٹے رقبے کے لئے

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}_D \doteq (\nabla \times \mathbf{H}_D) \cdot \Delta \mathbf{S}_D$$

اور

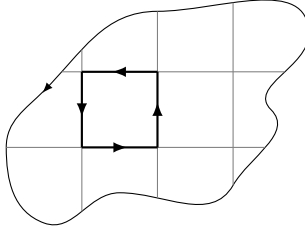
$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}_D \doteq H_2 \cdot \Delta L_{cb} + H_3 \cdot \Delta L_{dc} + H_4 \cdot \Delta L_{ed} + H_7 \cdot \Delta L_{be}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

دائیں رقبے کے لکیری مکمل میں $H_7 \cdot \Delta L_{be} = -H_7 \cdot \Delta L_{eb}$ لکھ کر دونوں رقبوں کے لکیری مکمل جمع کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}_B + \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}_D &\doteq H_1 \cdot \Delta L_{ba} + H_2 \cdot \Delta L_{cb} + H_3 \cdot \Delta L_{dc} \\ &+ H_4 \cdot \Delta L_{ed} + H_5 \cdot \Delta L_{fe} + H_6 \cdot \Delta L_{af} \\ &\doteq (\nabla \times \mathbf{H}_B) \cdot \Delta \mathbf{S}_B + (\nabla \times \mathbf{H}_D) \cdot \Delta \mathbf{S}_D \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ چھوٹے رقبوں کے مشترک طرف ΔL_{be} پر دونوں کے لکیری مکمل آپس میں کٹ گئے ہیں۔ یہاں پہلی مساوات پورے رقبے کے گرد لکیری مکمل کے برابر ہے جو شکل 7.16-ب کو دیکھ کر لکھی جا سکتی ہے۔ ہم نے شکل 7.16-الف میں رقبے کے صرف دو ٹکڑے لئے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ رقبے کے زیادہ



شکل 7.17: کسی بھی بڑے رقبے کو انتہائی چھوٹے رقبوں میں تقسیم کرتے ہوئے ہر کے گرد لکیری مکمل لیں۔ ان تمام کا مجموعہ پورے رقبے کے سرحد پر لکیری مکمل کے برابر ہوگا۔

نکلنے کرتے ہوئے بھی یہی طریقہ کار استعمال کیا جا سکتا ہے۔ اس طرح اگر کسی بھی بڑے رقبے کو انتہائی چھوٹے چھوٹے رقبوں میں تقسیم کرتے ہوئے ہر ایک کے گرد لکیری مکمل لیا جائے تو ان کا مجموعہ پورے رقبے کی سرحد پر گھومتے لکیری مکمل کے برابر ہوگا۔ شکل 7.17 میں بڑے رقبے کو چھوٹے حصوں میں تقسیم کیا دکھایا گیا ہے۔ ہر دو بڑے چھوٹے رقبوں کے مشترکہ طرف پر لکیری مکمل آپس میں کٹ جائیں گے۔ یوں تمام چھوٹے رقبوں کے لکیری مکمل کے مجموعے کو بڑے رقبے کا لکیری مکمل لیتے ہوئے اور تمام چھوٹے رقبوں کے $(\nabla \times \mathbf{H}_B) \cdot \Delta S$ کے مجموعے کو مکمل کی شکل میں لکھتے ہوئے

$$(7.65) \quad \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = \int_S (\nabla \times \mathbf{H}_B) \cdot d\mathbf{S}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں $d\mathbf{L}$ کو صرف بڑے رقبے S کی سرحد پر لیا جاتا ہے۔

اگرچہ ہم نے مساوات 7.65 مقناطیسی میدان کے لئے حاصل کیا، درحقیقت یہ ایک عمومی مساوات ہے جو کسی بھی سمتی میدان کے لئے درست ہے۔ یہ مساوات مسئلہ سٹوکس¹² بیان کرتا ہے۔

مسئلہ سٹوکس سے ایمپیئر کا دوری قانون باآسانی حاصل ہوتا ہے۔ ایسا کرنے کی خاطر $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$ کے دونوں اطراف کا $d\mathbf{S}$ کے ساتھ غیر سمتی ضرب لیتے ہوئے دونوں اطراف کھلی سطح S پر سطحی مکمل لیتے ہوئے مسئلہ سٹوکس کا استعمال کریں گے۔

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}$$

کشافت برقی رو کی سطحی تکمل سطح S سے گزرتی برقی رو کے برابر ہے لہذا مندرجہ بالا سے

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I$$

حاصل ہوتا ہے جو ایمپیئر کا دوری قانون ہے۔ ایمپیئر کے دوری قانون کے اس مختصر حصول سے یہ حقیقت بھی واضح ہوتی ہے کہ I ان تمام سطحوں سے گزرتی برقی رو ہے جن کی سرحد تکمل میں استعمال بند راہ ہے۔

مسئلہ سٹوکس سطحی تکمل اور بند لکیری تکمل کے مابین تعلق بیان کرتا ہے۔ آپ کو یاد ہو گا کہ مسئلہ پھیلاؤ حجمی تکمل اور بند سطحی تکمل کے مابین تعلق بیان کرتا ہے۔ یہ دونوں مسئلے عمومی سمتیاتی ثبوت پیش کرنے میں اہم کردار ادا کرتے ہیں۔ آئیں ایسی ایک مثال دیکھتے ہیں جس میں ہم $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A}$ کو بیان کرنے کا مختلف طریقہ حاصل کرنے کی کوشش کرتے ہیں جہاں \mathbf{A} کوئی بھی عمومی سمتی میدان ہو سکتا ہے۔

شروع کرنے سے پہلے یاد رہے کہ گردش کا حاصل جواب سمتیہ ہوتا ہے جبکہ پھیلاؤ کا حاصل جواب غیر سمتی ہوتا ہے۔ کسی بھی عمومی سمتیہ میدان \mathbf{A} کا گردش $\nabla \times \mathbf{A}$ بھی سمتیہ ہو گا جبکہ اس گردش کا پھیلاؤ $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A}$ غیر سمتی ہو گا جسے T کہتے ہیں یعنی

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = T$$

دونوں اطراف کا حجمی تکمل لیتے ہیں۔

$$\int_{\text{حجم}} (\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A}) dh = \int_{\text{حجم}} T dh$$

بائیں ہاتھ پر مسئلہ پھیلاؤ لاگو کرتے ہوئے

$$\oint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \int_{\text{حجم}} T dh$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اس مساوات کا بائیں ہاتھ حجم کو گھیرتے بند سطح پر $\nabla \times \mathbf{A}$ کا تکمل ہے۔ مسئلہ سٹوکس کسی بھی سطح پر سطحی تکمل اور اس سطح کے سرحد پر لکیری تکمل کا تعلق بیان کرتا ہے۔ یوں مندرجہ بالا مساوات کے بائیں ہاتھ میں اگر سطح کو تھیلا سمجھا جائے تو تھیلے کا منہ سطح کی سرحد ہو گا جس پر لکیری تکمل لیا جائے گا۔ جیسے جیسے تھیلے کے منہ کو چھوٹا کیا جائے ویسے ویسے تھیلا بند سطح کی شکل اختیار کرے گا جبکہ سطح کی سرحد چھوٹی سے چھوٹی ہوتی جائے گی حتیٰ

کہ جب تھیلے کا منہ مکمل بند ہو جائے تو تھیلیا مکمل بند سطح ہو گا جبکہ اس کی سرحد صفر کے برابر ہوگی۔ صفر لمبائی کے راہ پر مکمل صفر کے برابر ہوتا ہے یعنی

$$\int_0^0 \mathbf{A} \cdot d\mathbf{L} = 0$$

یوں

$$\int_{\text{جم}} T dh = 0$$

حاصل ہوتا ہے۔ چونکہ یہ مساوات کسی بھی حجم کے لئے درست ہے لہذا یہ تفرقی حجم dh کے لئے بھی درست ہے یعنی

$$T dh = 0$$

جس سے

$$T = 0$$

یا

$$(7.66) \quad \nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = 0$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 7.66 انتہائی اہم ثبوت ہے جس کے تحت کسی بھی عمومی سمتی میدان کے گردش کا پھیلا صفر کے برابر ہوتا ہے۔ اس ثبوت کو مندرجہ ذیل مثال میں کارٹینیسی محدود استعمال کرتے ہوئے بھی حاصل کیا گیا ہے۔

مثال 7.3: کسی بھی عمومی سمتی میدان $\mathbf{A} = A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z$ کا گردش اور گردش کا پھیلا کارٹینیسی محدود میں حاصل کرتے ہوئے ثابت کریں کہ گردش کا پھیلا صفر کے برابر ہو گا۔

حل: پہلے گردش حاصل کرتے ہیں

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathbf{a}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \mathbf{a}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathbf{a}_z$$

جس کا پھیلاؤ

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = \frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z \partial y} = 0$$

کے برابر ہے جہاں $\frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial y}$ اور $-\frac{\partial^2 A_z}{\partial y \partial x}$ کی طرح بقایا اجزاء بھی آپس میں کٹ جاتے ہیں۔

ساکن مقناطیسی میدان یعنی وقت کے ساتھ تبدیل نہ ہوتے مقناطیسی میدان کے لئے ایمپیر کے دوری قانون کی نقطہ شکل

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

ہے۔ اس مساوات کے دونوں اطراف کا پھیلاؤ حاصل کرتے ہوئے

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{H} = \nabla \cdot \mathbf{J}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ مساوات 7.66 کے تحت گردش کا پھیلاؤ صفر کے برابر ہوتا ہے لہذا

$$(7.67) \quad \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

ہو گا۔ اس سے ظاہر ہے کہ ساکن مقناطیسی میدان صرف ایسی برقی رو سے حاصل ہوتا ہے جس کے لئے مساوات 7.67 درست ہو۔ یہی نتیجہ ہم پہلے بھی مساوات 7.4 میں حاصل کر چکے ہیں جہاں ہم دیکھ چکے کہ $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ سے مراد بند راہ سے کل صفریک سمتی برقی رو کا گزرنا ہے۔

7.5 مقناطیسی بہاؤ اور کثافت مقناطیسی بہاؤ

خالی خلاء میں کثافت مقناطیسی بہاؤ B کی تعریف

$$(7.68) \quad B = \mu_0 H$$

ہے جہاں B کی اکائی ویرنی مربع میٹر Wb/m^2 ہے جسے ٹسلا¹³ پکارا اور T سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ اس مساوات میں μ_0 خالی خلاء کا مقناطیسی مستقل¹⁴ ہے جسے ہینری فی میٹر $\frac{\text{H}}{\text{m}}$ میں ناپا جاتا ہے۔ خالی خلاء میں

$$(7.69) \quad \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{\text{H}}{\text{m}}$$

کے برابر ہے۔

چونکہ H کی اکائی ایمپیئر فی میٹر ہے لہذا ویر کی اکائی ہینری ضرب ایمپیئر ہے۔ ہینری کو اکائی تصور کرتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ ہینری ضرب ایمپیئر کو ویر لکھا جاتا ہے۔ وقت کے ساتھ بدلتے میدان پر غور کے دوران ہم دیکھیں گے کہ ویر سے مراد ولٹ ضرب سیکنڈ بھی لیا جاسکتا ہے۔

خالی خلاء میں کثافت برقی بہا D اور برقی میدان کی شدت E کا تعلق

$$D = \epsilon_0 E$$

ہو بہو مساوات 7.68 کی طرح ہے۔ کثافت برقی بہا کا سطحی تکمل برقی بہا ψ دیتا ہے۔

$$\psi = \int_S D \cdot dS$$

کسی بھی بند سطح سے گزرتی برقی بہا اس سطح میں گھیرے بار Q کے برابر ہوتا ہے۔

$$\psi = \oint_S D \cdot dS = Q$$

مثبت بار سے برقی بہا کا اخراج ہوتا ہے جبکہ منفی بار پر برقی بہا کا اختتام ہوتا ہے۔ یوں برقی بہا کا منبع برقی بار ہے۔ مقناطیسی قطب ہر صورت جوڑی کی شکل میں پائے جاتے ہیں۔ آج تک تنہا مقناطیسی قطب نہیں پایا گیا۔ یوں آج تک ایسی صورت دیکھنے کو نہیں ملی جہاں تنہا مقناطیسی قطب سے مقناطیسی بہا کا اخراج ہو یا مقناطیسی بہا اس پر اختتام پذیر ہو۔ مقناطیسی بہا کا منبع برقی رو ہے۔ یاد رہے کہ نا تو مقناطیسی بہا اس برقی رو سے خارج اور نا ہی اس پر اختتام پذیر ہوتی ہے بلکہ یہ بند دائرے کی شکل میں برقی رو کو گھیرتی ہے۔ کثافت مقناطیسی بہا کا سطحی تکمل مقناطیسی بہا¹⁵ Φ دیتا ہے جسے ویبر¹⁶ Wb میں ناپا جاتا ہے۔

$$(7.70) \quad \Phi = \int_S B \cdot dS \quad \text{Wb}$$

Tesla¹³

magnetic constant, permeability¹⁴

magnetic flux¹⁵

Weber¹⁶

چونکہ مقناطیسی بہاؤ بند دائرہ بناتا ہے لہذا کسی بھی بند سطح میں جتنا مقناطیسی بہاؤ داخل ہوتا ہے، اتنا ہی مقناطیسی بہاؤ اس سطح سے خارج بھی ہوتا ہے لہذا کسی بھی بند سطح پر مقناطیسی بہاؤ کا مکمل صفر کے برابر ہو گا۔

$$(7.71) \quad \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

مسئلہ پھیلاؤ کے استعمال سے مندرجہ بالا مساوات سے

$$(7.72) \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

حاصل ہوتا ہے۔

ہم نے مساوات 7.71 کو ثابت نہیں کیا بلکہ حقیقت کو سامنے رکھتے ہوئے اسے لکھا ہے۔ اس کو آگے ثابت کیا جائے گا۔ فی الحال اس کو قبول کر لیں اور یوں مساوات 7.72 کو بھی درست تصور کریں۔

ساکن مقناطیسی اور ساکن برقی میدان کے لئے مساوات 7.72 میکس ویل کی چوتھی اور آخری مساوات ہے۔ ان تمام کو یہاں دوبارہ پیش کرتے ہیں۔

$$(7.73) \quad \begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho \\ \nabla \times \mathbf{E} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \end{aligned}$$

ان کے ساتھ

$$(7.74) \quad \begin{aligned} \mathbf{D} &= \epsilon_0 \mathbf{E} \\ \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{H} \end{aligned}$$

کو بھی شامل کرتے ہیں۔ ہم برقی میدان کی شدت اور ساکن برقی دباؤ کا تعلق بھی پیش کرتے ہیں۔

$$(7.75) \quad \mathbf{E} = -\nabla V$$

مساوات 7.73 برقی اور مقناطیسی میدان کے پھیلاؤ اور گردش بیان کرتے ہیں جو ان میدان کی خاصیت کے نقطہ

اشکال ہیں۔ ان کی تکمیل اشکال مندرجہ ذیل ہیں۔

$$(7.76) \quad \begin{aligned} \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} &= Q = \int_V \rho_h dh \\ \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} &= 0 \\ \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} &= I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \\ \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} &= 0 \end{aligned}$$

ہم جلد ساکن مقناطیسی میدان کے مقناطیسی دباؤ پر بھی غور کریں گے۔ ہم نے برقی میدان پر غور کے دوران موصل اجزاء کے اثر کو بھی تقطیب \mathbf{P} کی صورت میں شامل کیا۔ ایسا کرتے ہوئے جزو برقی مستقل کا سہارا لیا گیا۔ اگلے باب میں اسی طرح دیگر اجزاء کا مقناطیسی میدان پر اثر دیکھا جائے گا۔

آئیں مقناطیسی بہاؤ اور کشافٹ مقناطیسی بہاؤ کا استعمال ہم محوری تار کے اندر بہاؤ کے مثال کی صورت میں دیکھیں۔ ایسی ہم محوری تار جسے شکل 7.7 میں دکھایا گیا ہے میں مقناطیسی شدت

$$H_\phi = \frac{I}{2\pi\rho} \quad (\rho_1 < \rho < \rho_2)$$

ہم پہلے حاصل کر چکے ہیں۔ یوں کشافٹ مقناطیسی بہاؤ

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \mathbf{a}_\phi$$

ہو گا۔ اندرونی اور بیرونی تار کے درمیان مقناطیسی بہاؤ وہی ہو گا جو ان تاروں کے درمیان رداسی سیدھی سطح سے گزرے گا۔ تار کو z محور پر تصور کرتے ہوئے $z = 0$ تا $z = d$ تک رداسی سطح سے گزرتی مقناطیسی بہاؤ

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^d \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \mathbf{a}_\phi \cdot (d\rho dz \mathbf{a}_\phi)$$

یعنی

$$(7.77) \quad \Phi = \frac{\mu_0 I d}{2\pi} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

ہو گی۔ یہ مساوات آگے جا کر ہم محوری تار کے امالہ کے حصول میں کام آئے گی۔

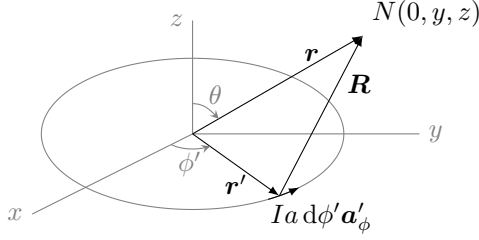
مشق 7.5: تانبے کی تار کو پانی سے ٹھنڈا کرتے ہوئے اس میں زیادہ کثافت برقی رو گزاری جاسکتی ہے۔ ایک ایسی ہم محوری تار جس کے اندرونی تار کا اندرونی رداس 25 mm جبکہ اس کا بیرونی رداس 28 mm ہے اور جس کے بیرونی تار کا اندرونی رداس 35 mm اور بیرونی رداس 37 mm ہے میں 10 000 A کا یک سمتی برقی رو تاروں میں الٹ سمت میں گزر رہی ہے۔ ٹھنڈا پانی اندرونی تار کے اندر اور تاروں کے درمیان فاصلے سے گزار کر انہیں ٹھنڈا رکھا جاتا ہے۔ دونوں تاروں کے اندر اور ان کے مابین H اور B حاصل کرنے کے بعد 1 m لمبائی کے لئے دونوں تاروں کے اندر اور ان کے مابین مقناطیسی بہاؤ حاصل کریں۔

جوابات: اندرونی تار میں $J = 20 \frac{A}{mm^2}$ اور $\Phi = 109 \mu Wb$ ہیں۔ بیرونی تار میں $J = 22.1 \frac{A}{mm^2}$ اور $\Phi = 56.6 \mu Wb$ ہیں۔ تاروں کے درمیانی فاصلے میں $\Phi = 446 \mu Wb$ ہے۔

مشق 7.6: $z = 0$ سطح پر ρ رداس کے گول بند دائرے میں I برقی رو گزر رہی ہے۔ گول دائرے کا مرکز کارٹیزیی مجدد کے $(0, 0, 0)$ پر ہے۔ اگر مثبت z جانب سے دیکھا جائے تو برقی رو گھڑی کے الٹ سمت میں گھوم رہی ہے۔ بایوٹ سیوارٹ کے قانون سے دائرے کے عین وسط میں H حاصل کریں۔

$$H = \frac{I}{2\rho} a_z \text{ جواب}$$

مندرجہ بالا مشق میں آپ نے دائرے کے مرکز پر مقناطیسی میدان حاصل کیا۔ یہی طریقہ استعمال کرتے ہوئے دائرے کے محور پر کسی بھی نقطے پر مقناطیسی میدان حاصل کیا جاسکتا ہے۔ البتہ جیسے ہی محور سے ہٹ کر مقناطیسی میدان مطلوب ہو مسئلہ خاصہ مشکل ہو جاتا ہے۔ مندرجہ ذیل مثال میں اس حقیقت کو سامنے رکھا جائے گا کہ محور سے ہٹ کر برقی رو گزارتے گول دائرے کا مقناطیسی میدان حاصل کرنا کیوں ممکن نہیں ہو گا۔ اس کے بعد اس



شکل 7.18: گول بند دائرے میں یک سمتی برقی رو کا محور سے ہٹ کر مقناطیسی میدان۔

مسئلے کا عددی حل¹⁷ حاصل کرنا دکھایا جائے گا۔ کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے کسی بھی مسئلے کا عددی حل حاصل کیا جا سکتا ہے۔

مثال 7.4: شکل 7.18 میں $x = 0$ سطح یعنی yz سطح پر نقطہ $N(0, y, z)$ پر گول بند دائرے میں یک سمتی برقی رو سے پیدا مقناطیسی میدان کی شدت حاصل کریں۔

حل: رداس a کے گول دائرے پر نقطہ $N'(a, \frac{\pi}{2}, \phi')$ پر چھوٹی سمتی لمبائی کو $a'_{\phi} = a d\phi'$ لکھا جا سکتا ہے جہاں اکائی سمتیہ a'_{ϕ} کو کارتیسی محدد میں

$$a'_{\phi} = -\sin \phi' a_x + \cos \phi' a_y$$

لکھا جا سکتا ہے۔ یوں

$$dL' = a d\phi' (-\sin \phi' a_x + \cos \phi' a_y)$$

لکھا جا سکتا ہے۔ یہ چھوٹی لمبائی خود $(a \cos \phi', a \sin \phi')$ پر پائی جاتی ہے یعنی

$$r' = a a'_{\phi} = a \cos \phi' a_x + a \sin \phi' a_y$$

کے برابر ہے۔ نقطہ N کا مقام کارتیسی محدد میں

$$r = y a_y + z a_z$$

ہے۔ یوں

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}' = -a \cos \phi' \mathbf{a}_x + (y - a \sin \phi') \mathbf{a}_y + z \mathbf{a}_z$$

لکھتے ہوئے

$$\begin{aligned} |\mathbf{R}| = R &= \sqrt{(-a \cos \phi')^2 + (y - a \sin \phi')^2 + z^2} \\ &= \sqrt{a^2 + y^2 + z^2 - 2ay \sin \phi'} \end{aligned}$$

اور

$$\mathbf{a}_R = \frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|} = \frac{-a \cos \phi' \mathbf{a}_x + (y - a \sin \phi') \mathbf{a}_y + z \mathbf{a}_z}{\sqrt{a^2 + y^2 + z^2 - 2ay \sin \phi'}}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ باؤٹ سیوارٹ قانون میں $\mathbf{a}_R = \frac{\mathbf{R}}{R}$ پر کرتے ہوئے

$$\mathbf{H} = \oint \frac{I d\mathbf{L}' \times \mathbf{R}}{4\pi R^3}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ آئیں پہلے $d\mathbf{L}' \times \mathbf{R}$ کی سادہ شکل حاصل کریں۔

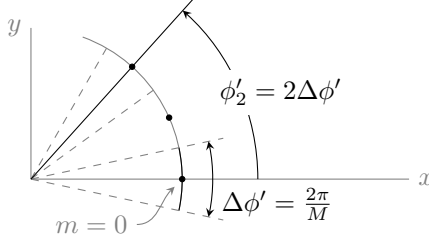
$$\begin{aligned} d\mathbf{L}' \times \mathbf{R} &= a d\phi' \left(-\sin \phi' \mathbf{a}_x + \cos \phi' \mathbf{a}_y \right) \times \left[-a \cos \phi' \mathbf{a}_x + (y - a \sin \phi') \mathbf{a}_y + z \mathbf{a}_z \right] \\ &= a d\phi' \left[z \cos \phi' \mathbf{a}_x + z \sin \phi' \mathbf{a}_y + (a - y \sin \phi') \mathbf{a}_z \right] \end{aligned}$$

یوں باؤٹ سیوارٹ کے قانون کو

$$\mathbf{H} = \frac{aI}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{z \cos \phi' \mathbf{a}_x + z \sin \phi' \mathbf{a}_y + (a - y \sin \phi') \mathbf{a}_z}{(a^2 + y^2 + z^2 - 2ay \sin \phi')^{\frac{3}{2}}} d\phi'$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اس مساوات میں H_x جزو صفر کے برابر ہے۔ یہ حقیقت سیدھی منطق سے ثابت ہوتی ہے۔ کسی بھی زاویہ ϕ' پر چھوٹی لمبائی سے پیدا میدان کو زاویہ $\pi - \phi'$ پر چھوٹی لمبائی کا میدان ختم کرتا ہے۔ یوں یہ جزو صفر کے برابر ہے۔ یہی نتیجہ تجزیاتی طور پر حاصل کرنے کی خاطر، H_x جزو میں نیا متغیر $w = a^2 + y^2 + z^2 - 2ay \sin \phi'$ پر کرتے ہوئے مکمل

$$H_x = \frac{aI}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{z \cos \phi' d\phi'}{(a^2 + y^2 + z^2 - 2ay \sin \phi')^{\frac{3}{2}}} = 0$$



شکل 7.19: مکمل کے راہ کو متعدد چھوٹے ٹکڑوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔

سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ بقایا دو اجزاء

$$(7.78) \quad H_y = \frac{aI}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{z \sin \phi' d\phi'}{(a^2 + y^2 + z^2 - 2ay \sin \phi')^{\frac{3}{2}}}$$

$$H_z = \frac{aI}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(a - y \sin \phi') d\phi'}{(a^2 + y^2 + z^2 - 2ay \sin \phi')^{\frac{3}{2}}}$$

ہیں۔ یہ دونوں بیضوی تکمل¹⁸ ہیں جنہیں الجبرائی طریقے سے حل کرنا ممکن نہیں ہے۔

بیضوی تکمل کا عددی حل¹⁹ بذریعہ کمپیوٹر حاصل کیا جاتا ہے۔ آئیں قلم و کاغذ استعمال کرتے ہوئے بیضوی تکمل کا عددی حل حاصل کریں۔

مثال 7.5: مندرجہ بالا مثال میں H_y اور H_z کے حل بیضوی تکمل کی صورت میں حاصل ہوئے۔ نقطہ $N(0, a, a)$ پر H_y کا عددی حل حاصل کریں۔

elliptic integral¹⁸
numerical solution¹⁹

حل: اس نقطے پر

$$H_y = \frac{aI}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a \sin \phi' d\phi'}{(a^2 + a^2 + a^2 - 2a^2 \sin \phi')^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{I}{4\pi a} \int_0^{2\pi} \frac{\sin \phi' d\phi'}{(3 - 2 \sin \phi')^{\frac{3}{2}}}$$

لکھا جائے گا۔ اس تکمیل کو مجموعے کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے۔ شکل 7.19 کو دیکھ کر آگے پڑھیں۔ تکمیل کے راہ کو M برابر ٹکڑوں میں تقسیم کرتے ہوئے ہر ٹکڑا پر $\Delta\phi' = \frac{2\pi}{M}$ کے برابر ہو گا۔ ان ٹکڑوں کی گنتی کا حساب ہم m سے رکھتے ہیں جہاں m کی قیمت 0 تا $(M-1)$ ہے۔ یوں پہلے ٹکڑے کو $m=0$ سے ظاہر کیا جائے گا اور اس ٹکڑے کے عین وسط میں زاویہ $\phi'_0 = 0$ ہو گا۔ شکل میں راہ کے چھوٹے ٹکڑوں کے عین وسط کو نقطوں سے ظاہر کیا گیا ہے۔ دوسرے ٹکڑے پر $m=1$ اور زاویہ $\phi'_1 = \Delta\phi' = \frac{2\pi}{M}$ ہو گا۔ جیسے شکل میں دکھایا گیا ہے، تیسرے پر $m=2$ اور زاویہ $\phi'_2 = 2\Delta\phi' = \frac{2 \times 2\pi}{M}$ ہو گا۔ یوں عمومی ٹکڑے m پر زاویہ $\phi'_m = m\Delta\phi' = \frac{2m\pi}{M}$ ہو گا۔

اگر ان چھوٹے ٹکڑوں پر تفاعل کی قیمت میں تبدیلی کو رد کرنا ممکن ہو تب ہر چھوٹے ٹکڑے پر تکمیل تقریباً

$$\Delta H_y = \frac{I}{4\pi a} \frac{\sin \phi'_m \Delta\phi'}{(3 - 2 \sin \phi'_m)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{I}{4\pi a} \frac{\sin\left(\frac{2m\pi}{M}\right) \frac{2\pi}{M}}{\left(3 - 2 \sin \frac{2m\pi}{M}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

کے برابر ہو گا۔ یوں تمام ٹکڑوں کا مجموعہ

$$H_y = \frac{I}{4\pi a} \frac{2\pi}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \frac{\sin \frac{2m\pi}{M}}{\left(3 - 2 \sin \frac{2m\pi}{M}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

ہو گا۔ جدول 7.1 میں $M=10$ کی صورت میں m کے تمام قیمتوں پر حاصل $\frac{\sin \frac{2m\pi}{M}}{\left(3 - 2 \sin \frac{2m\pi}{M}\right)^{\frac{3}{2}}}$ اجزاء دئے گئے

$\frac{\sin \frac{2m\pi}{M}}{(3 - 2 \sin \frac{2m\pi}{M})^{\frac{3}{2}}}$	m
0.00000	0
0.23852	1
0.82674	2
0.82674	3
0.23852	4
0.00000	5
-0.06889	6
-0.08763	7
-0.08763	8
-0.06889	9

جدول 7.1: دائرے پر برقی رو سے حاصل مقناطیسی میدان کی شدت بذریعہ عددی حل۔

ہیں۔ ان تمام کا مجموعہ

$$\begin{aligned}
 H_y &= \frac{I}{4\pi a} \frac{2\pi}{M} (0.00000 + 0.23852 + 0.82674 + 0.82674 + 0.23852 + 0.00000 \\
 &\quad - 0.06889 - 0.08763 - 0.08763 - 0.06889) \\
 &= \frac{I}{4\pi a} \frac{2\pi}{10} (1.8175) \\
 &= 1.1420 \left(\frac{I}{4\pi a} \right)
 \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے۔ زیادہ سے زیادہ ٹکڑے لیتے ہوئے زیادہ درست جواب حاصل ہوتا ہے۔ اگر $M = 100$ کر دیا جائے تب $H_y = \frac{1.1433I}{4\pi a}$ حاصل ہوتا ہے۔

جدول کو دیکھتے ہوئے ظاہر ہے کہ $m = 0$ اور $m = 5$ برابر حصہ ڈالتے ہیں۔ اسی طرح $m = 1$ اور $m = 4$ بھی برابر حصہ ڈالتے ہیں۔ ان حقائق کو مد نظر رکھتے ہوئے پورے جدول کو حل کرنا درکار نہیں ہے۔ درحقیقت موجودہ مثال میں جدول کے صرف پانچ یعنی آدھے خانوں کا حل درکار ہے۔ موجودہ مسئلے میں صرف دس چھوٹے ٹکڑے کرتے ہوئے تقریباً درست جواب حاصل ہوتا ہے۔ دس اور سو ٹکڑوں کے جوابات میں صرف

$$\left(\frac{1.1433 - 1.1420}{1.1433} \right) \times 100 = 0.11 \%$$

کا فرق ہے۔

7.6 غیر سمی اور سمی مقناطیسی دباو

برقی میدان کے مسائل برقی دباو کے استعمال سے نہایت آسان ہو جاتے ہیں۔ گھریلو 220 V کے برقی دباو سے آپ بخوبی واقف ہیں۔ اگرچہ برقی دباو سے ہمیں روزمرہ زندگی میں عموماً واسطہ پڑتا ہے اور یہ ہمارے لئے ایک حقیقت رکھتا ہے، مقناطیس و برقیات کے میدان میں برقی دباو کی اہمیت صرف اس وجہ سے ہے کہ اس کی مدد سے برقی مسائل باآسانی حل ہو جاتے ہیں۔ مثال کے طور پر ہم کسی بھی بار سے پہلے برقی دباو اور پھر برقی دباو سے برقی شدت حاصل کرتے ہیں۔

برقی دباو غیر سمی مقدار ہے۔ ہم جلد دیکھیں گے کہ برقی دباو کے طرز پر غیر سمی مقناطیسی دباو²⁰ بیان کیا جا سکتا ہے۔ البتہ یہ صرف کثافت برقی رو سے پاک مقامات پر قابل بیان ہوتا ہے۔ یوں اس کا استعمال ہر جگہ ممکن نہیں ہو گا۔ اس کے برعکس سمی مقناطیسی دباو²¹ بھی بیان کیا جا سکتا ہے جو انتہائی اہمیت کا حامل ہے۔ سمی مقناطیسی دباو اینٹینا²²، موج²³ اور مائیکرو ویو چولھے (خرد موج چولھے)²⁴ پر غور کرنے میں مدد دیتا ہے۔ یہ وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے میدان میں بھی قابل استعمال ہو گا اور یہ ان مقامات پر بھی قابل بیان ہو گا جہاں برقی رو پائی جائے۔ آئیں پہلے غیر سمی مقناطیس دباو دیکھیں۔

برقی دباو اور برقی میدان کی شدت کا تعلق صفحہ 150 پر مساوات 4.46 میں بیان کیا گیا ہے۔ ہم فرض کرتے ہیں بالکل اسی طرح غیر سمی مقناطیسی دباو V_m کی ڈھلوان منفی مقناطیسی شدت دیتا ہے یعنی

$$\mathbf{H} = -\nabla V_m$$

یہ نیا تفاعل مقناطیسی میدان کے دیگر تفاعل کے ساتھ ہم آہنگ ہونا چاہیے لہذا اسے ایمپیئر کے دوری قانون کے نقطہ صورت پر پورا اترنا ہو گا۔ اس طرح

$$(7.79) \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} = \nabla \times (-\nabla V_m)$$

ہو گا۔ البتہ جیسے آپ مشق 7.7 میں دیکھیں گے، کسی بھی متغیرہ کی ڈھلوان کا گردش صفر کے برابر ہوتا ہے۔ یوں مقناطیسی میدان کے شدت اور غیر سمی مقناطیسی دباو کا تعلق صرف اس صورت درست ہو سکتا ہے جب $\mathbf{J} = 0$

scalar magnetic potential²⁰

vector magnetic potential²¹

antenna²²

waveguide²³

microwave oven²⁴

ہو یعنی

$$(7.80) \quad \mathbf{H} = -\nabla V_m \quad (\mathbf{J} = 0)$$

اب آپ دیکھ سکتے ہیں کہ غیر مقناطیسی دباؤ پر لاگو شرط کہ کثافت برقی رو صفر ہونا ضروری ہے ناقابل قبول شرط ہے۔ اگرچہ کئی صورتوں میں کثافت برقی رو صفر ہوگی اور V_m کا استعمال ممکن ہوگا لیکن ہمیں ایسے مسائل بھی درپیش ہوں گے جہاں کثافت برقی رو صفر نہ ہوگی۔ ایسی صورت میں V_m ہمارے کسی کام کا نہ ہوگا۔ غیر سمی مقناطیسی دباؤ V_m کی تعریف سے ظاہر ہے کہ اسے ایمپیر میں ناپا جائے گا۔

خالی خلاء میں

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{H} = 0$$

سے

$$\mu_0 \nabla \cdot (-\nabla V_m) = 0$$

یا

$$(7.81) \quad \nabla^2 V_m = 0 \quad (\mathbf{J} = 0)$$

جو لاپلاس مساوات ہے حاصل ہوتا ہے۔ یوں غیر سمی مقناطیسی دباؤ لاپلاس مساوات پر پورا اترتا ہے۔ ہم دیکھیں گے کہ ہر طرف یکساں خاصیت کے مقناطیسی اشیاء میں بھی V_m لاپلاس مساوات پر پورا اترتا ہے۔ یاد رہے کہ V_m صرف اور صرف کثافت برقی رو سے پاک مقامات پر درست ثابت ہوتا ہے۔

اگلے باب میں V_m پر تفصیلی غور کیا جائے گا۔ یہاں یہ بتلانا ضروری ہے کہ چونکہ مقناطیسی میدان بقائی میدان نہیں ہے لہذا V_m کی قیمت اٹل نہیں ہوگی۔ آپ کو یاد ہوگا کہ برقی میدان میں کسی نقطے کو برقی زمین رکھتے ہوئے کسی دوسرے نقطے پر برقی دباؤ اٹل قیمت رکھتی ہے۔ مقناطیسی میدان میں ایسا ممکن نہیں ہے۔ ایسی ایک مثال دیکھنے کی خاطر z محور پر رکھی لا محدود لمبائی کے تار پر غور کرتے ہیں جس میں α_z جانب I برقی رو گزر رہی ہو۔ ایسی تار کے گرد جہاں $\mathbf{J} = 0$ ہے

$$\mathbf{H} = \frac{I}{2\pi\rho} \mathbf{a}_\phi$$

ہوگا اور غیر سمی مقناطیسی دباؤ حاصل کیا جاسکتا ہے۔ مساوات 7.80 اور نکلی محدود میں V_m کے ڈھلوان کا زاویائی جزو لیتے ہوئے

$$\frac{I}{2\pi\rho} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial V_m}{\partial \phi}$$

یا

$$\frac{\partial V_m}{\partial \phi} = -\frac{I}{2\pi}$$

سے

$$V_m = -\frac{I}{2\pi}\phi$$

حاصل ہوتا ہے جہاں تکمیل کے مستقل کو صفر چننا گیا ہے تاکہ $\phi = 0$ پر مقناطیسی زمین ہو۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $\phi = 0$ پر $V_m = 0$ ہے لہذا یہی مقناطیسی زمین ہے۔ اب اگر ہم تار کے گرد پورا چکر کاٹیں تو ہم اسی مقناطیسی زمین پر دوبارہ پہنچتے ہیں لیکن مندرجہ بالا مساوات کے تحت $\phi = 2\pi$ پر $V_m = -I$ کے برابر ہے تاکہ صفر۔ تار کے گرد دو چکر کے بعد اسی نقطے پر $V_m = -2I$ حاصل ہوتا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کسی بھی نقطے پر غیر سمتی مقناطیسی دباؤ کے متعدد قیمتیں ممکن ہیں۔ آپ کو یاد ہو گا کہ برقی میدان میں ایک مرتبہ برقی زمین چننے کے بعد کسی بھی ایک نقطے پر ایک ہی برقی دباؤ کی قیمت حاصل ہوتی ہے۔

آئیں غیر سمتی مقناطیسی دباؤ کے متعدد قیمتوں کا ممکن ہونا سمجھیں۔ ساکن برقی میدان میں

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = 0$$

ہوتا ہے لہذا دو نقطوں کے مابین لکیری تکمیل

$$V_{ab} = -\int_b^a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$$

کا دارومدار تکمیل کے راہ پر منحصر نہیں ہوتا۔ ساکن مقناطیسی میدان میں

$$\nabla \times \mathbf{H} = 0 \quad (\mathbf{J} = 0)$$

ہوتا ہے لیکن

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I$$

کے برابر ہوتا ہے اگرچہ تکمیل کے راہ پر $\mathbf{J} = 0$ ہے۔ یوں تکمیل لیتے ہوئے جب بھی ایک چکر پورا ہو، تکمیل کی قیمت میں I برابر اضافہ آئے گا۔ ہاں اگر تکمیل کی راہ صفر برقی رو گھیرے تب غیر سمتی مقناطیسی دباؤ بھی ایک قیمت رکھے

گا۔ ان حقائق کو مد نظر رکھتے ہوئے غیر سمتی مقناطیسی دباؤ

$$(7.82) \quad V_{ab} = - \int_b^a \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} \quad (\text{قیمت راہ پر منحصر ہے})$$

بیان کی جاتی ہے۔ ہم یہ فیصلہ کر سکتے ہیں کہ غیر سمتی مقناطیسی دباؤ حاصل کرتے وقت صرف ایک چکر کاٹا جائے گا۔ اس شرط پر چلتے ہوئے V_m ایک قیمت رکھے گا۔ یہ آپ مندرجہ بالا مثال سے دیکھ سکتے ہیں یعنی

$$(7.83) \quad V_m = -\frac{I}{2\pi} \phi \quad (-\pi < \phi \leq \pi)$$

کی صورت میں $\phi = 0$ پر $V_m = 0$ ہی حاصل ہوتا ہے۔ اس مساوات میں چکر کی وضاحت ضروری ہے۔ صفر زاویہ سے شروع ہو کر اگر زاویہ ϕ مثبت جانب بڑھایا جائے تو $\phi = \pi$ تک پہنچا جا سکتا ہے۔ اس کے برعکس اگر صفر زاویہ سے شروع ہو کر زاویہ ϕ منفی کرتے ہوئے $\phi = \pi$ تک پہنچنے کی کوشش کی جائے تو ایسا ممکن نہیں ہے۔ یوں $\phi = \pi$ پر V_m کی ایک عدد قیمت ہوگی۔

مشق 7.7: کارتیسی مجدد استعمال کرتے ہوئے مثال 7.3 کے طرز پر ثابت کریں کہ کسی بھی غیر سمتی متغیرہ کے ڈھلوان کی گردش صفر کے برابر ہوگی یعنی

$$(7.84) \quad \nabla \times (\nabla V) = 0$$

آئیں اب سمتی مقناطیسی دباؤ پر غور کرتے ہیں۔ ہم شروع

$$(7.85) \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

سے کرتے ہیں۔ سمتی مقناطیسی دباؤ کو اس مساوات کے ہم آہنگ ہونا ہوگا۔ مساوات 7.66 میں ہم دیکھ چکے ہیں کہ کسی بھی سمتی متغیرہ کے گردش کا پھیلاؤ صفر کے برابر ہوتا ہے لہذا اگر B سمتی متغیرہ A کا گردش

$$(7.86) \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

ہو تب بھی B کا پھیلاؤ

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = 0$$

ہی ہو گا۔ ہم مساوات 7.86 میں دئے A کو سمتی مقناطیسی دباؤ کی تعریف مان کر آگے بڑھتے ہیں۔ یوں سمتی مقناطیسی دباؤ خود بخود مساوات 7.85 کے ہم آہنگ ہو گا۔ یوں

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{A}$$

اور

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \nabla \times \mathbf{A}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ کسی بھی سمتی متغیرہ کے گردش کا گردش عموماً صفر کے برابر نہیں ہوتا۔ سمتی مقناطیسی دباؤ A کی اکائی ویبرنی میٹر $\frac{Wb}{m}$ ہے۔ گردش کے گردش کی قدر مختلف صورت صفحہ 301 پر مساوات 7.41 میں حاصل کی گئی ہے۔

ہم حصہ 7.7.1 میں دیکھیں گے کہ B اور A کے تعریف اور ہاؤٹ سیوارٹ کے قانون سے

$$\mathbf{A} = \oint \frac{\mu_0 I d\mathbf{L}}{4\pi R} \quad (7.87)$$

لکھا جا سکتا ہے۔ ہم نے A کی تعریف اس کے گردش کے ذریعے کی ہے۔ چونکہ ڈھلوان کا گردش صفر کے برابر ہوتا ہے لہذا ہم مندرجہ بالا مساوات کے ساتھ کسی غیر سمتی متغیرہ کا ڈھلوان بھی جمع کر سکتے ہیں۔ ایسا کرنے سے B یا H کے قیمتوں پر کوئی اثر نہ پڑتا۔ ساکن مقناطیسی میدان میں عموماً ڈھلوان جمع نہیں کیا جاتا اور اس مساوات کو یوں ہی رکھا جاتا ہے۔

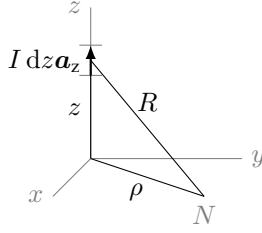
ساکن برقی دباؤ کے مساوات

$$V = \int \frac{\rho_L d\mathbf{L}}{4\pi\epsilon_0 R}$$

کے ساتھ مساوات 7.87 کا موازنہ کرنے سے یہ بات بہتر سمجھ میں آتی ہے کہ A واقع سمتی مقناطیسی دباؤ ہی ہے۔ یہ دونوں مساوات لکیری مکمل دیتے ہیں۔ ایک برقی رو اور دوسرا کشافت بار کا لکیری مکمل دیتا ہے۔ دونوں میں تفرقی فاصلے dL کا اثر R کے بالعکس متناسب ہے اور دونوں مساوات میں خالی خلاء کے خاصیت یعنی μ_0 اور ϵ_0 استعمال ہوتے ہیں۔

مساوات 7.87 کی تفرق شکل

$$d\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I d\mathbf{L}}{4\pi R} \quad (7.88)$$



شکل 7.20: تار کے چھوٹے حصے سے پیدا ہونے والی مقناطیسی دباؤ۔

بھی لکھی جاسکتی ہے جب تک dL سے حاصل dA کا کوئی مطلب نہ لیا جائے۔ یاد رہے کہ جب تک بند تکمیل پورا نہ لیا جائے، حاصل A کوئی معنی نہیں رکھتا۔

شکل 7.20 میں z محدود پر لامحدود لمبائی کے برقی رو گزارتے تار کا چھوٹا حصہ dL دکھایا گیا ہے۔ نقطہ N پر یہ

$$dA = \frac{\mu_0 I dz a_z}{4\pi \sqrt{\rho^2 + z^2}}$$

یا

$$(7.89) \quad dA_z = \frac{\mu_0 I dz}{4\pi \sqrt{\rho^2 + z^2}}, \quad dA_\rho = 0, \quad dA_\phi = 0$$

سمتی مقناطیسی دباؤ پیدا کرے گا۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ تار کے ہر چھوٹے حصے کا پیدا کردہ سمتی مقناطیسی دباؤ تار کے اسی حصے کی سمت میں ہو گا۔

مقناطیسی شدت نکلی محدود میں مندرجہ بالا مساوات کے گردش

$$\begin{aligned} dH &= \frac{1}{\mu_0} \nabla \times dA = \frac{1}{\mu_0} \left(-\frac{\partial dA_z}{\partial \rho} \right) a_\phi \\ &= \frac{I dz}{4\pi} \frac{\rho a_\phi}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

سے حاصل ہو گا۔ یہی مساوات شکل 7.20 کو دیکھتے ہوئے بائوٹ سیوارٹ کے مساوات سے لکھی جاسکتی ہے۔

سمتی مقناطیسی دباؤ A کے کلیات دیگر اشکال کے کثافت برقی رو کے لئے بھی لکھا جاسکتے ہیں۔ یوں سطحی کثافت برقی رو K کے لئے برقی رو کے چھوٹے حصے کو

$$I dL = K dS$$

اور حجمی کثافت برقی رو J کے لئے

$$I dL = J dh$$

لکھے جاسکتے ہیں۔ لکیری برقی رو کے چھوٹے حصے کو عموماً $I dL$ لکھا جاتا ہے۔ یوں برقی رو کو غیر سمتی تصور کرتے ہوئے فاصلے کو سمتی تصور کیا جاتا ہے۔ اس کے برعکس مندرجہ بالا دو مساوات میں کثافت برقی رو کو سمتی مقدار تصور کیا گیا جبکہ تفرقی سطح dS اور تفرقی حجم dh کو غیر سمتی تصور کیا گیا۔ یوں A کے دیگر کلیے

$$(7.90) \quad A = \int_S \frac{\mu_0 \mathbf{K} dS}{4\pi R}$$

اور

$$(7.91) \quad A = \int_h \frac{\mu_0 J dh}{4\pi R}$$

ہیں۔

سمتی مقناطیسی دباؤ مختلف اشکال کے برقی رو اور کثافت برقی رو سے مندرجہ بالا مساوات کی مدد سے حاصل ہوتے ہیں۔ برقی دباؤ کی طرح سمتی مقناطیسی دباؤ کا زمین بھی لامحدود فاصلے پر رکھا جاتا ہے یعنی $R \rightarrow \infty$ پر $A \rightarrow 0$ تصور کیا جاتا ہے۔ لامحدود فاصلے پر کوئی بھی برقی رو $R \rightarrow \infty$ کی بنا پر سمتی مقناطیسی دباؤ پر کوئی اثر نہیں ڈال سکتا۔

مثال 7.6: رداس a کے موصل تار میں یکساں برقی رو I گزر رہی ہے۔ تار کے اندر B حاصل کرتے ہوئے A بھی حاصل کریں۔

حل: تار کو z محدد پر پڑا تصور کرتے ہیں۔ تار کے اندر ρ رداس کا بند دائرہ $\frac{I\pi\rho^2}{\pi a^2}$ برقی رو گھیرے گی لہذا اس دائرے پر $B = \frac{\mu_0 I \rho}{2\pi a^2} \alpha_\phi$ ہو گا۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ B کا صرف زاویائی جزو پایا جاتا ہے۔ یوں A کے گردش کو مساوات 7.55 کی مدد سے لکھتے ہوئے صرف زاویائی جزو لیتے ہیں۔ اس طرح

$$B_\phi = \frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ چونکہ برقی رو α_z سمت میں ہے لہذا A کا صرف A_z جزو متوقع ہے لہذا مندرجہ بالا مساوات

$$B_\phi = -\frac{\partial A_z}{\partial \rho}$$

یعنی

$$-\frac{\partial A_z}{\partial \rho} = \frac{\mu_0 I \rho}{2\pi a^2}$$

صورت اختیار کر لے گا جس سے

$$A_z = \frac{\mu_0 I \rho^2}{4\pi a^2} + M$$

حاصل ہوتا ہے جہاں M تکمیل کا مستقل ہے۔

7.7 ساکن مقناطیسی میدان کے قوانین کا حصول

ساکن مقناطیس میدان کے تمام قوانین بايوٹ سيوارٹ کے قانون،

$$(7.92) \quad \mathbf{H} = \oint \frac{I d\mathbf{L} \times \mathbf{a}_R}{4\pi R^2}$$

سمتی مقناطیسی دباؤ کے تعریف

$$(7.93) \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

اور مقناطیسی میدان کی شدت اور کثافت مقناطیسی بہاؤ کے تعلق

$$(7.94) \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$$

سے حاصل کئے جاسکتے ہیں۔ آئیں ایسا ہی کرتے ہیں۔ امید کی جاتی ہے کہ طلبہ و طالبات مندرجہ ذیل ثبوت کو سمجھتے ہوئے پڑھیں گے۔ آپ سے گزارش کی جاتی ہے کہ انہیں یاد کرنے کی کوشش نہ کریں۔

7.7.1 سستی مقناطیسی دباؤ

سستی مقناطیسی دباؤ A کی مساوات

$$(7.95) \quad A = \int_h \frac{\mu_0 J dh}{4\pi R}$$

ثابت کرنے کی خاطر ہم اس سے باؤٹ سیوارٹ کا قانون یعنی مساوات 7.92 حاصل کرتے ہیں۔ مساوات 7.91 میں (x_2, y_2, z_2) پر سستی مقناطیسی دباؤ دی گئی ہے جبکہ (x_1, y_1, z_1) وہ مقام ہے جہاں برقی رو گزارتا تار کا چھوٹا حصہ پایا جاتا ہے۔ یوں چھوٹے حجم کو dh_1 لکھیں گے جو $dx_1 dy_1 dz_1$ کے برابر ہو گا۔ مکمل کے متغیرات x_1, y_1 اور z_1 ہیں۔ یوں

$$(7.96) \quad A_2 = \int_h \frac{\mu_0 J_1 dh_1}{4\pi R_{21}}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اب

$$H_2 = \frac{B_2}{\mu_0} = \frac{\nabla_2 \times A_2}{\mu_0}$$

کے برابر ہے جہاں ∇_2 کے زیر نوشت میں 2 لکھ کر یاد دہانی کرائی گئی ہے کہ گردش نقطہ (x_2, y_2, z_2) پر حاصل کیا جائے گا لہذا گردش کے متغیرات بھی x_2, y_2 اور z_2 ہی ہوں گے۔ آپ کو یاد ہو گا کہ صفحہ 151 پر مثال 4.4 میں ڈھلوان حاصل کرتے ہوئے بالکل اسی طرح کیا گیا تھا۔ یوں موجودہ مسئلے میں گردش حاصل کرتے وقت تمام تفرق x_2, y_2 اور z_2 کے ساتھ لئے جائیں گے۔

اس طرح مساوات 7.96 سے A_2 پر کرتے ہوئے

$$H_2 = \frac{1}{\mu_0} \nabla_2 \times \int_h \frac{\mu_0 J_1 dh_1}{4\pi R_{21}}$$

حاصل ہوتا ہے۔ گردش بنیادی طور پر تفرق کا عمل ہے۔ اس مساوات میں مکمل کا گردش حاصل کیا جا رہا ہے۔ مکمل اور تفرق جس ترتیب سے حاصل کئے جائیں، اس کا حاصل جواب پر کوئی اثر نہیں ہے لہذا ہم تفرق کے عمل کو مکمل کے اندر لے جا سکتے ہیں جبکہ $\frac{\mu_0}{4\pi}$ مستقل ہے جسے مکمل کے باہر لایا جا سکتا ہے۔ یوں

$$H_2 = \frac{1}{4\pi} \int_h \nabla_2 \times \frac{J_1 dh_1}{R_{21}}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ یہاں $dh_1 = dx_1 dy_1 dz_1$ پہلے تو مقداری ہے جس کی گردش حاصل نہیں کی جاسکتی۔ اس کے علاوہ اس کا x_2, y_2 اور z_2 کے ساتھ تفرق صفر کے برابر ہے لہذا اسے گردش کے عمل سے باہر لکھا جاسکتا ہے یعنی

$$(7.97) \quad \mathbf{H}_2 = \frac{1}{4\pi} \int_h \left(\nabla_2 \times \frac{\mathbf{J}_1}{R_{21}} \right) dh_1$$

یہاں سمتیہ \mathbf{J} ضرب مقداری $\frac{1}{R_{21}}$ کا گردش لیا جا رہا ہے۔ مثال 7.2 میں کسی بھی سمتیہ \mathbf{S} اور مقداری M کے حاصل ضرب کی گردش

$$(7.98) \quad \nabla \times (M\mathbf{S}) \equiv (\nabla M) \times \mathbf{S} + M(\nabla \times \mathbf{S})$$

حاصل کی گئی۔ اس کی مدد سے مساوات 7.97 کو کھولتے ہیں جہاں سمتیہ \mathbf{J}_1 اور مقداری $\frac{1}{R_{21}}$ ہیں۔

$$(7.99) \quad \mathbf{H}_2 = \frac{1}{4\pi} \int_h \left[\left(\nabla_2 \frac{1}{R_{21}} \right) \times \mathbf{J}_1 + \frac{1}{R_{21}} (\nabla_2 \times \mathbf{J}_1) \right] dh_1$$

اس مساوات کے دوسرے جزو میں \mathbf{J}_1 صرف x_1, y_1 اور z_1 پر منحصر ہے۔ نقطہ (x_2, y_2, z_2) کا اس پر کسی قسم کا کوئی اثر نہیں لہذا \mathbf{J}_1 کے تمام تفرق جو x_2, y_2 اور z_2 کے ساتھ لئے جائیں صفر کے برابر ہوں گے۔ یوں $\nabla_2 \times \mathbf{J}_1 = 0$ ہو گا۔

صفحہ 152 پر مساوات 4.48 کے استعمال سے مندرجہ بالا مساوات

$$\mathbf{H}_2 = -\frac{1}{4\pi} \int_h \frac{\mathbf{a}_{R21} \times \mathbf{J}_1}{R_{21}^2} dh_1$$

یا

$$\mathbf{H}_2 = \frac{1}{4\pi} \int_h \frac{\mathbf{J}_1 \times \mathbf{a}_{R21}}{R_{21}^2} dh_1$$

لکھی جاسکتی ہے۔ اس میں $\mathbf{J}_1 dh_1$ کی جگہ لکیری انداز میں $I_1 d\mathbf{L}_1$ پر کرتے ہوئے اور بند کھلم لکھ کر جانی پہچانی پایوٹ سیوارٹ مساوات

$$\mathbf{H}_2 = \oint_h \frac{I d\mathbf{L}_1 \times \mathbf{a}_{R21}}{4\pi R_{21}^2}$$

حاصل ہوتی ہے۔ یوں ثابت ہوتا ہے کہ مساوات 7.96 درست ہے اور یہ مساوات، مساوات - اور مساوات پر پورا اترتا ہے۔

7.7.2 ایمپیریکل دوری قانون

آئیں اب ایمپیریکل دوری قانون کی نقطہ شکل

$$(7.100) \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

کو بائوٹ سیوارٹ کے قانون سے حاصل کریں۔

شروع کرتے ہیں مساوات 7.93 اور مساوات 7.94 سے جن سے

$$(7.101) \quad \nabla \times \mathbf{H} = \nabla \times \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \nabla \times \mathbf{A}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ صفحہ 301 پر مساوات 7.41 استعمال کرتے ہوئے یوں

$$(7.102) \quad \nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} [\nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}]$$

لکھا جا سکتا ہے۔ مندرجہ بالا مساوات میں پھیلاؤ اور لاپلاسی کے عمل درکار ہیں۔

پھیلاؤ کو پہلے حل کرتے ہیں۔ مساوات 7.96 کی پھیلاؤ

$$(7.103) \quad \nabla_2 \cdot \mathbf{A}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_h \nabla_2 \cdot \frac{\mathbf{J}_1}{R_{21}} dh_1$$

لکھی جا سکتی ہے۔ صفحہ 167 پر مثال 4.7 میں سمتیہ \mathbf{D} اور مقداری V کے لئے

$$\nabla \cdot (\nabla D) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{D}) + \mathbf{D} \cdot (\nabla \nabla)$$

ثابت کیا گیا۔ یہاں سمتیہ \mathbf{J}_1 جبکہ مقداری $\frac{1}{R_{21}}$ ہیں لہذا اس مساوات کو یوں لکھا جا سکتا ہے

$$(7.104) \quad \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{J}_1}{R_{21}} \right) = \frac{1}{R_{21}} (\nabla \cdot \mathbf{J}_1) + \mathbf{J}_1 \cdot \left(\nabla \frac{1}{R_{21}} \right)$$

جس کی مدد سے

$$(7.105) \quad \nabla_2 \cdot \mathbf{A}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_h \left[\frac{1}{R_{21}} (\nabla_2 \cdot \mathbf{J}_1) + \mathbf{J}_1 \cdot \left(\nabla_2 \frac{1}{R_{21}} \right) \right] dh_1$$

ہو گا۔

چونکہ J_1 صرف متغیرات x_1, y_1 اور z_1 پر منحصر ہے لہذا اس کے x_2, y_2 اور z_2 کے ساتھ تفرق صفر کے برابر ہوں گے لہذا $\nabla_2 \cdot J_1 = 0$ ہو گا۔

ہم صفحہ 152 پر مساوات 4.50

$$\nabla_1 \frac{1}{R_{21}} = -\nabla_2 \frac{1}{R_{21}}$$

کو استعمال کرتے ہوئے یوں

$$(7.106) \quad \nabla_2 \cdot \mathbf{A}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_h \left[-J_1 \cdot \left(\nabla_1 \frac{1}{R_{21}} \right) \right] dh_1$$

لکھ سکتے ہیں۔ مساوات 7.104 کے دوبارہ استعمال سے

$$(7.107) \quad \nabla_2 \cdot \mathbf{A}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_h \left[\frac{1}{R_{21}} (\nabla_1 \cdot \mathbf{J}_1) - \nabla_1 \cdot \left(\frac{\mathbf{J}_1}{R_{21}} \right) \right] dh_1$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 7.67 کہتی ہے کہ ساکن مقناطیسی میدان صرف اس صورت پیدا ہو گا جب $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ ہو۔ چونکہ ہمیں ساکن مقناطیسی میدان سے ہی غرض ہے لہذا مندرجہ بالا مساوات میں سے

$$(7.108) \quad \nabla_2 \cdot \mathbf{A}_2 = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_h \nabla_1 \cdot \left(\frac{\mathbf{J}_1}{R_{21}} \right) dh_1$$

حاصل ہوتا ہے۔ صفحہ 122 پر مساوات 3.43 مسئلہ پھیلاؤ بیان کرتا ہے جس کے تحت حجمی تکمیل کو سطحی تکمیل کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔ اسے استعمال کرتے ہوئے یوں

$$(7.109) \quad \nabla_2 \cdot \mathbf{A}_2 = -\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{S_1} \frac{\mathbf{J}_1}{R_{21}} \cdot d\mathbf{S}_1$$

حاصل ہوتا ہے جہاں سطح S_1 اس تمام حجم کو گھیرتی ہے جس پر حجمی تکمیل حاصل کیا گیا تھا۔ چونکہ حجمی تکمیل اس غرض سے حاصل کیا گیا تھا کہ ساکن مقناطیسی میدان پیدا کرنے والے برقی رو کو مکمل طور پر شامل کیا جائے لہذا اس حجم کے باہر کسی قسم کا کوئی برقی رو نہیں پایا جاتا۔ اگر حجم سے باہر کوئی بھی برقی رو ہوتی تب ہمیں حجم کو بڑھا کر اس برقی رو کے اثر کو بھی شامل کرنا ہوتا۔ ہم تکمیل لیتے ہوئے حجم کو مزید بڑھا سکتے ہیں تاکہ اس کی سطح کو برقی رو نہ

چھوئے۔ ہم ایسا اس لئے کر سکتے ہیں کہ برقی رو سے خالی حجم کے شمول سے تکمیل کی قیمت تبدیل نہیں ہوتی۔ یوں ضرورت سے زیادہ حجم پر تکمیل سے مراد یہ بھی ہے کہ سطحی تکمیل ایسی سطح پر لی جائے جس پر کثافت برقی رو صفر کے برابر ہو۔ صفر کثافت برقی رو کا سطحی تکمیل صفر کے برابر ہوتا ہے لہذا مندرجہ بالا مساوات سے

$$(7.110) \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

حاصل ہوتا ہے جو کہتا ہے کہ سمتی مقناطیسی دباؤ کا پھیلاؤ صفر کے برابر ہے۔ اس مساوات میں زیر نوشت میں 2 نہیں لکھا گیا ہے جو اس نقطے کی نشاندہی کرتا ہے جہاں مقناطیسی میدان کی بات ہو رہی ہو۔ پھیلاؤ بھی اسی نقطے پر حاصل کیا جاتا ہے۔ یاد رہے کہ ہم مساوات 7.102 حل کرنے کی خاطر پھیلاؤ اور لاپلاسی حاصل کرنے نکلے تھے۔ پھیلاؤ حاصل ہو چکا ہے آئیں اب لاپلاسی حاصل کریں۔

برقی دباؤ اور سمتی مقناطیسی دباؤ کے ایک جزو

$$V = \int_h \frac{\rho dh}{4\pi\epsilon_0 R}$$

$$A_x = \int_h \frac{\mu_0 J_x dh}{4\pi R}$$

کا موازنہ کرنے سے صاف ظاہر ہے کہ ρ اور J_x کو آپس میں تبدیل کرتے ہوئے اور $\frac{1}{\epsilon_0}$ اور μ_0 کو آپس میں تبدیل کرتے ہوئے ایک مساوات سے دوسری مساوات حاصل کی جا سکتی ہے۔ اب ہم پوئسن مساوات

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

میں یہی تبدیلیاں کرتے ہوئے

$$\nabla^2 A_x = -\mu_0 J_x$$

اور

$$\nabla^2 A_y = -\mu_0 J_y$$

$$\nabla^2 A_z = -\mu_0 J_z$$

لکھ سکتے ہیں جنہیں یوں

$$(7.111) \quad \nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}$$

بھی لکھا جا سکتا ہے۔

مساوات 7.102 میں مساوات 7.110 اور مساوات 7.111 استعمال کرتے ہوئے یوں ایمپیر کے دوری قانون کی نقطہ شکل

$$(7.112) \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

حاصل ہوتی ہے۔

مثال 7.7: مندرجہ بالا حصے میں برقی دباؤ کے لاپلاسی سے سمتی مقناطیسی دباؤ کی لاپلاسی اخذ کی گئی۔ سمتی مقناطیسی دباؤ کے لاپلاسی کو ایمپیر کے دوری قانون اور \mathbf{A} کی تعریف سے حاصل کریں۔

حل: ایمپیر کے دوری قانون کی نقطہ شکل اور \mathbf{A} کی تعریف

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J} \\ \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} \end{aligned}$$

سے

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ کا استعمال کیا گیا ہے۔ صفحہ 301 پر مساوات 7.41 استعمال کرتے ہوئے

$$\nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J}$$

حاصل ہوتا ہے جسے مساوات 7.110 کی مدد سے

$$(7.113) \quad \nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

سوالات

سوال 7.1: لامحدود لمبائی کی سیدھی تار y محدود پر پڑی ہے۔ اس میں a_y جانب 5 mA برقی رو گزر رہی ہے۔ نقطہ $N(2, 5, 3)$ پر مقناطیسی میدان H اور $|H|$ حاصل کریں۔ اگر تار $x = 3$ ، $z = -1$ پر ہو تب جوابات کیا ہوں گے۔ دونوں تاروں کی موجودگی میں جوابات حاصل کریں۔

$$\text{جوابات: } H = 184a_x - 122a_z \frac{\mu\text{A}}{\text{m}} \text{ ، } |H| = 221 \frac{\mu\text{A}}{\text{m}} \text{ ، } H = 187a_x + 47a_z \frac{\mu\text{A}}{\text{m}} \text{ ، } |H| = 193 \frac{\mu\text{A}}{\text{m}}$$

$$|H| = 378 \frac{\mu\text{A}}{\text{m}} \text{ ، } H = 371a_x - 75a_z \frac{\mu\text{A}}{\text{m}}$$

سوال 7.2: مساوات 7.11 حاصل کریں۔

سوال 7.3: سطح $z = 0$ پر y محدود کے متوازی لامحدود لمبائی کے آٹھ عدد تار پڑے ہیں جن میں a_y جانب 1 A برقی رو گزر رہی ہے۔ یہ تار $y = -3.5$ ، $y = -2.5$ ، \dots ، $y = 2.5$ ، $y = 3.5$ پر پائے جاتے ہیں۔ نقطہ $(0, 0, 1)$ اور $(0, 0, 50)$ پر H حاصل کریں۔

$$\text{جوابات: } 0.421a_x \text{ ، } 0.0254a_x \text{ ؛ محدود پر پچاس گنا دور میدان صرف سترہ گنا کم ہے۔}$$

سوال 7.4: چار میٹر لمبے تار کو چکور کی شکل دی جاتی ہے جس کا رقبہ 1 m^2 ہے۔ اس چکور کو $z = 0$ سطح پر رکھا جاتا ہے۔ تار میں برقی رو 10 mA گزرنے کی صورت میں چکور کے وسط $N(0, 0, 0)$ میں مقناطیسی میدان H حاصل کریں۔ نقطہ $P(0, 0, 1)$ پر بھی میدان حاصل کریں۔

$$\text{جوابات: } 9 \frac{\text{mA}}{\text{m}} \text{ ، } 2.3 \frac{\text{mA}}{\text{m}}$$

سوال 7.5: شکل 17.8 کے لامحدود سطح سے پیدا مقناطیسی میدان باپوٹ-سیوارٹ کے قانون کی مدد سے حاصل کریں۔

سوال 7.6: ایک تار کو دائری شکل دے کر سطح $z = 0$ پر رکھا جاتا ہے۔ دائرے کا رقبہ 1 m^2 ہے۔ تار میں 10 mA گزرنے کی صورت میں دائرے کے وسط $N(0, 0, 0)$ میں مقناطیسی میدان H حاصل کریں۔ نقطہ $P(0, 0, 1)$ پر بھی میدان حاصل کریں۔

$$\text{جوابات: } 1.86 \frac{\text{mA}}{\text{m}}, 2.82 \frac{\text{mA}}{\text{m}}$$

سوال 7.7: محدود x اور y میں بڑھتے جانب 55 mA برقی رو گزر رہی ہے۔ نقطہ $N(5, 6, 4)$ پر H حاصل کریں۔

$$\text{جواب: } 854a_x - 673a_y - 57a_z \frac{\mu\text{A}}{\text{m}}$$

سوال 7.8: مساوات 7.23 حاصل کرنے کے طرز پر شکل 7.11 میں 3 تا 4 پر H_{y34} حاصل کریں۔

جواب: شرح $\frac{\partial H_y}{\partial x}$ ہے۔ یوں $-\frac{\Delta x}{2}$ تبدیلی سے $\frac{\partial H_y}{\partial x}(-\frac{\Delta x}{2})$ تبدیلی رونما ہوگی اور یوں نئی قیمت $H_{y0} - \frac{\partial H_y}{\partial x} \frac{\Delta x}{2}$ ہوگی۔

سوال 7.9: عمومی محدود میں حاصل کردہ گردش کی مساوات سے کارتیسی محدود میں گردش کی مساوات حاصل کریں۔

سوال 7.10: سطحی رو $K = \frac{8}{\rho} a_\phi \frac{\text{A}}{\text{m}}$ خطہ $\rho = 3 \text{ m}$ تا $\rho = 7 \text{ m}$ میں پائی جاتی ہے۔ سطح $\phi = 0$ سے گزرتی کل برقی رو حاصل کریں۔ نقطہ $N(0, 0, z)$ پر H حاصل کرتے ہوئے میدان کی قیمت $z = 10$ پر دریافت کریں۔

$$\text{جوابات: } I = 8 \ln \frac{7}{3} \text{ A}, H = \left[\frac{4}{\sqrt{z^2+3^2}} - \frac{4}{\sqrt{z^2+7^2}} \right] a_z, 55.4 \frac{\text{mA}}{\text{m}}$$

سوال 7.11: سطحی رو $K = 8\rho a_\phi \frac{\text{A}}{\text{m}}$ خطہ $\rho = 3 \text{ m}$ تا $\rho = 7 \text{ m}$ میں پائی جاتی ہے۔ سطح $\phi = 0$ سے گزرتی کل برقی رو حاصل کریں۔ نقطہ $N(0, 0, z)$ پر H حاصل کرتے ہوئے میدان کی قیمت $z = 10$ پر دریافت کریں۔

$$\text{جوابات: } I = 160 \text{ A}, H = 4 \left[\frac{2z^2+49}{\sqrt{(z^2+49)}} - \frac{2z^2+9}{\sqrt{z^2+9}} \right] a_z, 1.52 \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

سوال 7.12: عمومی محدود میں حاصل کردہ گردش کی مساوات سے تکلی محدود میں گردش کی مساوات حاصل کریں۔

سوال 7.13: رداس a کے دائری چادر پر یکساں سطحی کثافت بار ρ_s پائی جاتی ہے۔ چادر کے محور کو محدود کے مرکز پر رکھتے ہوئے چادر کو سطح $z = 0$ پر رکھا جاتا ہے۔ اگر چادر محور کے گرد زاویائی رفتار ω سے گھوم رہی ہو تب نقطہ $N(0, 0, z)$ پر مقناطیسی میدان H کیا ہوگا؟ میدان کی قیمت $\rho_s = 5 \frac{\mu\text{C}}{\text{m}^2}$ اور $\omega = 100\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ کی صورت میں $(0, 0, 0.1)$ پر حاصل کریں۔

جوابات: $1.42 \frac{\text{mA}}{\text{m}}$ ، $\frac{\omega\rho_s}{2} \left[\frac{2z^2+4}{\sqrt{z^2+4}} - 2z \right]$

سوال 7.14: سطح $z = 0$ پر خطہ $x = -3\text{m}$ تا $x = 3\text{m}$ پر سطحی برقی رو $K = 4a_y \frac{\text{A}}{\text{m}}$ پائی جاتی ہے۔ نقطہ $N(0, 0, 5)$ پر مقناطیسی میدان حاصل کریں۔

جواب: $0.688a_x \frac{\text{A}}{\text{m}}$

سوال 7.15: گول دائرے پر برقی رو کا دائرے کے محور سے ہٹ کر مقناطیسی میدان کی شدت حاصل کرتے ہوئے مساوات 7.78 میں دئے بیضوی تکمل حاصل کئے گئے۔ ان میں H_y کا عددی حل مثال 7.5 میں حاصل کیا گیا۔ بالکل اسی طرز پر تکمل کو دس ٹکڑوں میں کرتے ہوئے H_z کی عددی قیمت نقطہ $N(0, a, a)$ پر حاصل کریں۔

جواب: $0.96525 \left(\frac{I}{4\pi a} \right)$

سوال 7.16: سطح $x = 0$ پر سطحی برقی رو $1200a_z \frac{\text{A}}{\text{m}}$ پائی جاتی ہے۔ خطہ $0 < z < \infty$ ، $5 < y < 15$ پر برقی رو سے نقطہ $N(10, 0, 0)$ پر پیدا مقناطیسی میدان H حاصل کریں۔

جواب: $H = 45.6a_x + 49.6a_y \frac{\text{A}}{\text{m}}$

سوال 7.17: خطہ $0 < z < 5$ میں یکساں کثافت برقی رو $15a_y \frac{\text{A}}{\text{m}^2}$ پائی جاتی ہے۔ ایمپیر کے دوری قانون کی مدد سے ثابت کریں کہ $H_{z < 0} = -H_{z > 5}$ کے برابر ہے۔ نقطہ $(2, 5, 7)$ اور نقطہ $(4, 12, 2)$ پر H حاصل کریں۔

جوابات: $-7.5a_x \frac{\text{A}}{\text{m}}$ ، $37.5a_x \frac{\text{A}}{\text{m}}$

سوال 7.18: محدود کے مرکز پر رداس a کا موصل کرہ پایا جاتا ہے۔ منفی z محور پر $10a_z A$ کی برقی رو، کرہ کی سطح پر نقطہ $(0, 0, -a)$ تک پہنچتی ہے جہاں سے یہ کرہ کے سطح پر یکساں پھیل کر نقطہ $(0, 0, a)$ تک پہنچتی ہے اور اس کے بعد مثبت z محور پر بڑھتے جانب چلے جاتی ہے۔ کرہ کے اندر اور اس کے باہر مقناطیسی میدان حاصل کریں۔

$$\text{جوابات: } 0 \frac{A}{m}, \frac{10}{2\pi\rho} a_\phi \frac{A}{m}$$

سوال 7.19: منفی z محور سے برقی رو I موصل $\theta = 30^\circ$ سطح تک پہنچ کر سطح پر یکساں پھیل کر چلے جاتی ہے۔ نقطہ $(0, 0, z)$ اور نقطہ $(5, 5, 5)$ پر مقناطیسی میدان H حاصل کریں۔

$$\text{جوابات: } 0 \frac{A}{m}, \frac{I}{2\pi\sqrt{50}} \frac{A}{m}$$

سوال 7.20: تقابل $G = (5x + yz)a_x + 3xyz a_y + \frac{x^2 y}{z} a_z$ نقطہ $N(0.6, 0.4, 0.2)$ اور اس کے قریب پایا جاتا ہے۔ سطح $z = 0.2$ پر $2a$ لمبائی کے اطراف کے مربع لکیر پر $\oint G \cdot dL$ حاصل کریں جہاں مربع کا مرکز نقطہ N پر ہے۔ لکیری مکمل کو مربع کے رقبے سے تقسیم کریں اور $a \rightarrow 0$ لیتے ہوئے $\nabla \times G_z$ حاصل کریں۔

جوابات: چاروں اطراف کے لکیری مکمل $0.48a^2 + 0.288a$ ، $0.48a^2 - 0.288a$ ، $-0.4a^2 + 6.16a$ اور $-0.4a^2 - 6.16a$ ہیں۔ یوں $\nabla \times G_z = 0.04$ ہے۔

سوال 7.21: مساوات 7.34 استعمال کرتے ہوئے تقابل $G = (5x + yz)a_x + 3xyz a_y + \frac{x^2 y}{z} a_z$ کا نقطہ $N(0.6, 0.4, 0.2)$ پر $\nabla \times G$ حاصل کریں۔ سوال 7.20 میں حاصل کئے گئے $\nabla \times G_z$ کے ساتھ موازنہ کریں۔

$$\text{جواب: } 1.08a_x - 2a_y + 0.04a_z$$

سوال 7.22: ہم محوری تار میں $E = 3000\rho^{1.3} \cos(\omega t - 0.3z)a_\rho \frac{V}{m}$ پایا جاتا ہے۔ تار میں $\nabla \times E$ حاصل کریں۔

$$\text{جواب: } 900\rho^{1.3} \sin(\omega t - 0.3z)a_\phi$$

سوال 7.23: میدان $V = 5(x^2 + y^2)$ اور $V = 10x^3 + y^2 + xz^4$ کے لئے $\nabla^2 V$ اور $\nabla \times E$ حاصل کریں۔

جوابت: 20 ، 0 ، $60x + 2 + 12xz^2$ ، 0

سوال 7.24: میدان $H = x^2y^2z\mathbf{a}_x - xy^2z^2\mathbf{a}_z$ دیا گیا ہے۔ مسئلہ سٹوکس کے دونوں اطراف باری باری استعمال کرتے ہوئے، سطح $y = 1$ میں خطہ $1 < x < 2$ ، $1 < z < 3$ سے \mathbf{a}_y جانب گزرتی برقی رو حاصل کریں۔

جواب: 13.3 A

سوال 7.25: میدان $H = \frac{2xy}{z^2}\mathbf{a}_x - \frac{y^2}{z^2}\mathbf{a}_y + x^2y^2\mathbf{a}_z$ دیا گیا ہے۔ سطح $x = 0.5$ میں خطہ $2 < z < 3$ ، $1 < y < 2$ سے \mathbf{a}_x جانب گزرتی برقی رو درکار ہے۔ الف) برقی رو کو بذریعہ سطحی کھلم حاصل کریں۔ ب) برقی رو کو بذریعہ کھلم حاصل کریں

جواب: 0.426 A

سوال 7.26: کروی محدود میں میدان $H = \frac{50r}{\sin\theta}\mathbf{a}_\phi$ دیا گیا ہے۔ مسئلہ سٹوکس کے دونوں اطراف باری باری استعمال کرتے ہوئے کروی خطہ $r = 0.2$ ، $0 < \phi < 2\pi$ ، $0 < \theta < 60^\circ$ سے گزرتی برقی رو حاصل کریں۔

جواب: 5.44 A

سوال 7.27: میدان $H = \frac{4r^2}{\sin\theta}\mathbf{a}_\theta + 50r \sin\theta\mathbf{a}_\phi$ دیا گیا ہے۔ سطح $\theta = 45^\circ$ میں خطہ $0 < \phi < 2\pi$ ، $0 < r < 3$ سے \mathbf{a}_θ جانب گزرتی برقی رو حاصل کریں۔

جواب: -1414 A

سوال 7.28: پاکستان میں کل زمینی مقناطیسی میدان $45 \mu\text{T}$ تا $50 \mu\text{T}$ پایا جاتا ہے جس کا افقی جزو اوسطاً $30 \mu\text{T}$ کے لگ بھگ ہے۔ ایک تار جس میں 1 A کی برقی رو گزر رہی ہو، کتنے فاصلے پر زمینی میدان کے افقی جزو برابر مقناطیسی میدان پیدا کرے گی۔

جواب: 4.2 cm

سوال 7.29: بیس سنٹی میٹر لمبائی اور پانچ سنٹی میٹر رداس کا پیچدار لچھا جس میں برقی رو گزر رہی ہو میں مقناطیسی میدان $H = 200a_z \frac{A}{m}$ پایا جاتا ہے۔ نقطہ $N_1(0.02, 0^\circ, 0.02)$ اور $N_2(0.04, 50^\circ, 0.06)$ کے درمیان غیر سمتی مقناطیسی دباؤ V_{m21} حاصل کریں۔ سمتی مقناطیسی دباؤ $\nabla \times B = A$ سے حاصل کرتے ہوئے $\rho = 0$ پر $A = 0$ لیتے ہوئے انہیں دو نقطوں کے مابین A_{21} حاصل کریں۔ یہ مساوات استعمال کرتے وقت A کا درست جزو اپنے علم سے چنیں۔

جوابات: $-8 A$ ، $2.5a_\phi \frac{\mu Wb}{m}$

سوال 7.30: ٹکلی کثافت برقی رو $50a_z \frac{A}{m}$ رداس $\rho = 2 m$ پر پائی جاتی ہے جبکہ رداس $\rho = 4 m$ پر $25a_z \frac{A}{m}$ اور رداس $\rho = 5 m$ پر $-40a_z \frac{A}{m}$ پائے جاتے ہیں۔ زاویہ $\phi = 0$ پر $V_m = 0$ لیتے اور $\phi = 180^\circ$ کو رکاٹ تصور کرتے ہوئے نقطہ $N_1(3.5, 60^\circ, 0)$ پر غیر سمتی مقناطیسی دباؤ V_m حاصل کریں۔

جوابات: $-66.6 A$

سوال 7.31: سطح $z = 0$ پر تار $x = 4$ میں $0.2 A$ کی برقی رو a_y جانب پائی جاتی ہے جبکہ تار $x = -4$ میں $0.2 A$ برقی رو $-a_y$ جانب پائی جاتی ہے۔ محدود کے مرکز پر $V_m = 0$ لیتے ہوئے z محدود پر غیر سمتی مقناطیسی دباؤ V_m حاصل کریں۔

جواب: $-\frac{0.2}{\pi} \tan^{-1} \frac{z}{4} A$

باب 8

مقناطیسی قوتیں، مقناطیسی مادے اور امالہ

برقی بار کے گرد برقی میدان پایا جاتا ہے جس میں موجود ساکن یا حرکت کرتے بار پر قوت دفع یا قوت کشش پایا جاتا ہے۔ مقناطیسی میدان برقی رو یعنی حرکت کرتے بار سے پیدا ہوتا ہے اور اس میدان میں حرکت کرتے بار پر قوت پائی جاتی ہے۔ مقناطیسی میدان ساکن بار پر قوت پیدا نہیں کرتا۔

اس باب میں برقی رو گزارتی تار پر قوت اور مردوڑ کا جائزہ لیا جائے گا۔ اس کے بعد مقناطیسی اشیاء اور آخر میں امالہ¹ پر غور کیا جائے گا۔

8.1 متحرک بار پر قوت

تجربے سے ثابت ہوتا ہے کہ برقی میدان میں بار بردار ذرے پر

$$(8.1) \quad F = QE$$

قوت اثر انداز ہوتی ہے۔ مثبت بار کی صورت میں یہ قوت برقی میدان کے شدت E کی سمت میں ہوتی ہے۔ قوت کی قیمت بار Q اور برقی میدان کی شدت E کے حاصل ضرب کے برابر ہوتی ہے۔ بار ساکن ہو یا حرکت کر رہا ہو، اس پر قوت کی مقدار اسی مساوات سے حاصل ہوتی ہے۔

¹ inductance

اسی طرح تجربے سے ثابت ہوتا ہے کہ مقناطیسی میدان میں ساکن بار بردار ذرے پر مقناطیسی میدان کوئی قوت پیدا نہیں کرتا البتہ متحرک بار بردار ذرے پر مقناطیسی میدان

$$(8.2) \quad F = Qv \times B$$

قوت پیدا کرتا ہے۔ یہ قوت بار کے براہ راست متناسب ہوتی ہے۔ اسی طرح قوت بار کے رفتار v ، کثافت مقناطیسی میدان B اور ان دو کے مابین زاویے کے سائن کے بھی براہ راست متناسب ہوتی ہے۔ قوت کی سمت v اور B دونوں کے عمودی یعنی $v \times B$ سمت میں ہوتی ہے۔

مقناطیسی قوت رفتار کے عمودی ہے لہذا یہ رفتار کے قیمت پر اثر انداز نہیں ہوتا البتہ یہ اس کی سمت پر ضرور اثر ڈالتا ہے۔ اس طرح مقناطیسی قوت بار بردار ذرے کے متحرک توانائی میں تبدیلی لانے سے قاصر ہے۔ اس کے برعکس برقی قوت جسے مساوات 8.1 بیان کرتا ہے بار بردار ذرے کی رفتار میں تبدیلی پیدا کرتے ہوئے حرکی توانائی میں تبدیلی پیدا کرتا ہے۔ دونوں میدانوں میں یہ بنیادی فرق ہے کہ برقی میدان تبادلہ توانائی میں کردار ادا کرتا ہے جبکہ مقناطیسی میدان تبادلہ توانائی میں کردار ادا نہیں کرتا۔

دونوں میدانوں کے بیک وقت موجودگی میں بار بردار ذرے پر کل قوت

$$(8.3) \quad F = Q(E + v \times B)$$

دونوں میدانوں سے علیحدہ علیحدہ پیدا قوتوں کے مجموعے کے برابر ہے۔ مساوات 8.3 لورنٹز مساوات قوت³² کہلاتی ہے۔ برقی اور مقناطیسی میدانوں میں بار بردار ذرے، مثلاً الیکٹران، کے راہ اسی مساوات کو حل کرتے ہوئے حاصل کئے جاتے ہیں۔

مشق 8.1: ایک عدد نقطہ بار جس کی قیمت $-3C$ اور رفتار $v = 2a_x - 3a_y + a_z$ ہو پر مندرجہ ذیل میدانوں میں قوت کی حتمی قیمت حاصل کریں۔ (الف) $E = 3a_x - 2a_y - 5a_z$ ، (ب) $B = -2a_x - 3a_y + 6a_z$ ، (پ) دونوں میدانوں کے بیک وقت موجودگی میں۔

جوابات: 78.7 N ، 71.3 N ، 18.49 N

² یہ مساوات ہینڈرک لورنٹز کے نام ہے۔
³ Lorentz force equation

8.2 تفرقی بار پر قوت

مقناطیسی میدان میں متحرک تفرقی بار dQ پر تفرقی قوت dF عمل کرے گی۔

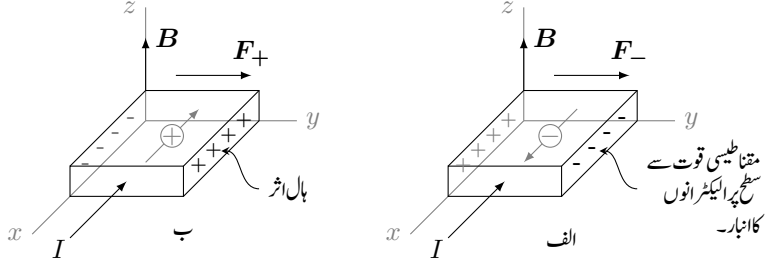
$$(8.4) \quad dF = dQv \times B$$

آپ جانتے ہیں کہ منفی بار کی باریک ترین مقدار الیکٹران کا بار ہے۔ مثبت بار کی باریک ترین قیمت بھی اتنی ہی لیکن مثبت قطب کی ہے۔ منفی بار کو مثال بناتے ہوئے، یوں مندرجہ بالا مساوات میں تفرقی بار سے مراد کم از کم اتنا بار ہے جس میں الیکٹرانوں کی تعداد اتنی ہو کہ کسی ایک الیکٹران کے بار کا اثر قابل نظر انداز ہو۔ اسی طرح اس تفرقی بار کا حجم اگرچہ چھوٹا ہے لیکن اس حجم کی جسامت الیکٹرانوں کے مابین اوسط فاصلے سے بہت زیادہ ہے۔ مساوات 8.4 تفرقی بار پر کل قوت دیتا ہے۔ یہاں یہ سمجھ لینا ضروری ہے کہ یہ قوت کسی ایک الیکٹران پر اثر انداز نہیں ہوتا بلکہ یہ تمام الیکٹرانوں پر علیحدہ علیحدہ قوتوں کا مجموعہ ہے۔

موصل تار میں برقی رو، الیکٹران کے حرکت کی بدولت ہے۔ برقی رو گزارتے تار کو مقناطیسی میدان میں رکھنے سے تار میں ہر الیکٹران پر مقناطیسی قوت کا اثر پایا جائے گا۔ اگرچہ کسی ایک الیکٹران پر انتہائی کم قیمت کا قوت پایا جاتا ہے لیکن موصل تار میں الیکٹرانوں کی تعداد انتہائی زیادہ ہوتی ہے۔ یوں انتہائی زیادہ تعداد میں انتہائی کم قوتوں کا مجموعہ معقول قیمت کی قوت پیدا کرتا ہے۔ انہیں دیکھتے ہیں کہ یہ مجموعی قوت تار تک کس طرح منتقل ہوتی ہے۔

موصل میں مثبت ایٹم یا آئن ساکن ہوتے ہیں جبکہ الیکٹران آزادی سے حرکت کر سکتے ہیں۔ مقناطیسی میدان میں برقی رو گزارتے موصل تار میں حرکت پذیر منفی الیکٹران پر مقناطیسی قوت عمل کرتی ہے جس سے مثبت آئن اور منفی الیکٹران کے مابین فاصلوں میں تبدیلی رونما ہوتی ہے۔ اب مثبت اور منفی بار کے مابین کولمب قوتیں ایسی تبدیلی کو روکتے ہیں لہذا حرکت پذیر الیکٹران پر مقناطیسی قوت یوں ساکن آئن تک پہنچ پاتی ہیں جو بطور تار پر مقناطیسی قوت کی صورت میں رونما ہوتی ہے۔

مثبت آئن اور منفی الیکٹران کے مابین کولمب قوتیں انتہائی طاقتور ہوتی ہیں لہذا مقناطیسی میدان سے پیدا فاصلوں میں تبدیلی قابل ناپ نہیں ہوتی۔ مثبت اور منفی باروں کے مابین فاصلے کی بنا پر انہیں دو چادر برق گیر تصور کیا جا سکتا ہے۔ ہم جانتے ہیں کہ ایسے برق گیر کے چادروں کے مابین برقی دباؤ پایا جاتا ہے۔ یوں الیکٹران کے حرکت اور مقناطیسی



شکل 8.1: ہال اثر سے متحرک بار کا قطب دریافت کیا جاسکتا ہے۔

میدان دونوں کی سمتوں کے عمودی دو الٹ اطراف کے مابین تار پر معمولی برقی دباؤ پایا جاتا ہے جسے ہال اثر⁴ کے نام⁵ سے جانا جاتا ہے۔

ہال اثر کو شکل 8.1 کی مدد سے باآسانی سمجھا جاسکتا ہے۔ شکل-الف میں موصل یا n قسم کے نیم موصل برقی رو گزارتا تار دکھایا گیا ہے۔ تار میں برقی رو I کی سمت $-a_x$ ہے لہذا تار میں آزاد منفی بار اس کے الٹ یعنی a_x سمت میں حرکت کر رہے ہیں۔ تار میں آزاد الیکٹرانوں کو ہلکی سیاتہی میں تیر کے نشان پر دائرے میں بند - علامت سے ظاہر کیا گیا ہے جہاں تیر اس کے حرکت کی سمت ظاہر کرتا ہے۔ یہ تار a_z سمت کے مقناطیسی میدان میں پڑی ہے۔ تار میں آزاد بار منفی قطب کے ہیں لہذا ان پر مساوات 8.2 کے تحت a_y سمت میں قوت F_- عمل کرے گا۔ قوت کی علامت پر زیر نوشت میں منفی کی علامت یہ ظاہر کرتی ہے کہ یہ قوت متحرک منفی بار پر اثر انداز ہوتا ہے۔ یوں تار کے دائیں طرف پر منفی الیکٹرانوں کا انبار جمع ہوتا ہے جبکہ تار کے بائیں طرف پر الیکٹران کی تعداد کم ہو جاتی ہے جس سے اس جانب ساکن مثبت آئن بے پودہ⁶ ہو جاتے ہیں۔ شکل 8.1-الف میں تار کے دائیں طرف - اور بائیں طرف + کے علامات انہیں کو ظاہر کرتے ہیں۔ آپ جانتے ہیں کہ مثبت اور منفی بار کے مابین برقی میدان کی شدت E اور یوں برقی دباؤ پایا جاتا ہے لہذا تار کے دائیں اور بائیں اطراف کے مابین ہال برقی دباؤ⁷ پایا جائے گا۔ تار کا بائیں طرف ہال برقی دباؤ کا مثبت سرا ہو گا۔

آہیں ایسی صورت دیکھیں جہاں متحرک مثبت بار کی بدولت برقی رو پائی جائے۔ شکل 8.1-ب میں بقایا صورت حال بالکل شکل-الف کی طرح ہے البتہ یہاں تار p قسم کے نیم موصل کا بنا ہوا ہے جس میں برقی رو مثبت آزاد خول⁸ کے حرکت سے پیدا ہوتی ہے۔ یوں اگر برقی رو $-a_x$ سمت میں ہو تب آزاد خول بھی اسی سمت میں حرکت کریں

⁴Hall effect

⁵ایڈون حال نے اس اثر کو 1879 میں دریافت کیا۔

⁶uncovered

⁷Hall voltage

⁸free holes

گے۔ جیسے شکل میں دکھایا گیا ہے یہاں بھی مقناطیسی قوت آزاد بار کو دائیں جانب دھکیل رہے ہیں۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اس مرتبہ ہال برقی دباؤ کا مثبت سراتار کا دائیں طرف پایا جاتا ہے جو شکل-الف کے عین الٹ ہے۔ اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے یہ معلوم کیا جا سکتا ہے کہ آیا نیم موصل n یا p قسم کا ہے۔

ہال اثر استعمال کرتے ہوئے مختلف پیمائشی آلات بنائے جاتے ہیں مثلاً ایک سمٹی رو پیماء، مقناطیسی بہاؤ پیماء⁹ وغیرہ۔

سمٹی رفتار v سے حرکت کرتا ہوا صحیحی کثافت بار ρ_h کثافت برقی رو J

$$(8.5) \quad J = \rho_h v$$

کو جنم دیتا ہے۔ اس مساوات کو صفحہ 178 پر حاصل کیا گیا۔ چھوٹے حجم dh میں تھوڑے سے بار کو

$$(8.6) \quad dQ = \rho_h dh$$

لکھا جا سکتا ہے لہذا مساوات 8.4 کو

$$dF = \rho_h dhv \times B$$

یا

$$(8.7) \quad dF = J \times B dh$$

لکھا جا سکتا ہے۔ ہم مساوات 7.6 میں دیکھ چکے ہیں کہ $J dh$ کو برقی رو گزارتے تار کا تفرقی حصہ تصور کیا جا سکتا ہے جسے

$$J dh = K dS = I dL$$

بھی لکھا جا سکتا ہے۔ اس طرح مساوات 8.7 کو

$$(8.8) \quad dF = K \times B dS$$

یا

$$(8.9) \quad dF = I dL \times B$$

بھی لکھا جا سکتا ہے۔

مساوات 8.7، مساوات 8.8 اور مساوات 8.9 کے تکمیل سے انہیں یوں

$$(8.10) \quad \mathbf{F} = \int_h \mathbf{J} \times \mathbf{B} dh$$

$$(8.11) \quad \mathbf{F} = \int_S \mathbf{K} \times \mathbf{B} dS$$

$$(8.12) \quad \mathbf{F} = \oint I d\mathbf{L} \times \mathbf{B}$$

لکھا جاسکتا ہے۔

مساوات 8.12 میں اگر سیدھی تار لی جائے جس کی لمبائی L ہو تو تکمیل سے

$$(8.13) \quad \mathbf{F} = I\mathbf{L} \times \mathbf{B}$$

حاصل ہوتا ہے جس میں قوت کی قیمت

$$(8.14) \quad F = ILB \sin \alpha$$

ہے جہاں تار اور مقناطیسی میدان کے درمیان زاویہ α ہے۔ مساوات 8.13 اور مساوات 8.14 پورے دور کے کچھ حصے پر قوت دیتے ہیں۔ دور کے بقایا حصوں پر بھی اسی طرح قوت حاصل کئے جاسکتے ہیں۔

مثال 8.1: محدود لمبائی کی تار میں 1.5 A کی برقی رو \mathbf{a}_z جانب گزر رہی ہے۔ اس کے قریب نقطہ $N_1(3, 2, 5)$ تا $N_2(4, 6, 1)$ کے درمیان سیدھی موصل تار میں 2.3 A کی برقی رو N_1 سے N_2 کی جانب گزر رہی ہے۔ اس تار پر مقناطیسی قوت حاصل کریں۔

حل: پہلی تار مقناطیسی میدان

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \frac{1.5\mu_0}{2\pi\rho} \mathbf{a}_\phi \\ &= \frac{1.5\mu_0}{2\pi\sqrt{x^2+y^2}} \left(-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \mathbf{a}_x + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \mathbf{a}_y \right) \\ &= \frac{1.5\mu_0}{2\pi(x^2+y^2)} (-y\mathbf{a}_x + x\mathbf{a}_y) \end{aligned}$$

پیدا کرتا ہے جو دوسری تار کے چھوٹے حصے $dL = dx\mathbf{a}_x + dy\mathbf{a}_y + dz\mathbf{a}_z$ پر قوت

$$(8.15) \quad dF = 2.3 dL \times B$$

پیدا کرے گی۔ تار کی مساوات $L = x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y + z\mathbf{a}_z$ میں x ، y اور z متغیرات کو ایک ہی متغیر t کی صورت میں یوں لکھا جاسکتا ہے۔

$$x = 3 + (4 - 3)t = 3 + t$$

$$y = 2 + (6 - 2)t = 2 + 4t$$

$$z = 5 + (1 - 5)t = 5 - 4t$$

جہاں $t = 0$ پر کرنے سے ابتدائی نقطہ $N_1(3, 2, 5)$ اور $t = 1$ پر کرنے سے اختتامی نقطہ $N_2(4, 6, 1)$ حاصل ہوتا ہے۔ یوں

$$L = (3 + t)\mathbf{a}_x + (2 + 4t)\mathbf{a}_y + (5 - 4t)\mathbf{a}_z$$

لکھ کر $dL = dt\mathbf{a}_x + 4 dt\mathbf{a}_y - 4 dt\mathbf{a}_z$ لکھا جاسکتا ہے۔ اس طرح پوری تار پر قوت مساوات 8.15 کے تکمیل سے یوں

$$\begin{aligned} F &= \int_0^1 2.3(\mathbf{a}_x + 4\mathbf{a}_y - 4\mathbf{a}_z) dt \times \frac{1.5\mu_0}{2\pi[(3+t)^2 + (2+4t)^2]} [-(2+4t)\mathbf{a}_x + (3+t)\mathbf{a}_y] \\ &= \int_0^1 \frac{3.45\mu_0}{2\pi(17t^2 + 22t + 13)} [4(t+3)\mathbf{a}_x + 8(2t+1)\mathbf{a}_y + (17t+11)\mathbf{a}_z] dt \end{aligned}$$

لکھی جاسکتی ہے جس سے

$$F = 369\mathbf{a}_x + 386\mathbf{a}_y + 478\mathbf{a}_z \text{ nN}$$

حاصل ہوتا ہے۔

8.3 برقی رو گزارتے تفرقی تاروں کے مابین قوت

شکل میں نقطہ N_1 پر تار کا ایک چھوٹا ٹکڑا dL_1 دکھایا گیا ہے جس میں I_1 برقی رو گزر رہی ہے جبکہ نقطہ N_2 پر تار کا دوسرا چھوٹا ٹکڑا dL_2 دکھایا گیا ہے جس میں I_2 برقی رو گزر رہی ہے۔ نقطہ N_2 پر تار کے پہلے ٹکڑے سے پیدا مقناطیسی میدان مساوات 7.2 دیتا ہے۔

$$dH_2 = \frac{I_1 dL_1 \times a_{R21}}{4\pi R_{21}^2}$$

مساوات 8.9 مقناطیسی میدان H_2 میں تار کے تفرقی حصے پر تفرقی قوت دیتا ہے۔ تفرقی مقناطیسی میدان dH_2 سے dL_2 پر پیدا قوت درکار ہے۔ اس قوت کو تفرقی قوت کا تفرقی حصہ $d(dF_2)$ لکھتے ہوئے مساوات 8.9 کو

$$d(dF_2) = I_2 dL_2 \times dB_2$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں $dB_2 = \mu_0 dH_2$ کے برابر ہے۔ مندرجہ بالا دو مساوات سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$(8.16) \quad d(dF_2) = \mu_0 \frac{I_1 I_2}{4\pi R_{21}^2} dL_2 \times (dL_1 \times a_{R21})$$

یاد رہے کہ کسی بھی نقطے پر برقی رو سے پیدا مقناطیسی میدان حاصل کرتے وقت ضروری ہے کہ پورے تار پر مکمل حاصل کیا جائے۔ مندرجہ بالا مساوات میں نقطہ N_2 پر مکمل مکمل لیتے ہوئے میدان H_2 استعمال نہیں کیا گیا بلکہ تفرقی میدان dH_2 استعمال کیا گیا ہے۔ یوں اگر اس مساوات سے قوتیں حاصل کی جائیں تو یہ درست نہیں ہوں گی۔ یہ دیکھنے کے لئے تصور کریں کہ نقطہ $(1, 2, 3)$ پر $I_1 dL_1 = 2a_y A m$ جبکہ نقطہ $(-1, 3, 2)$ پر $I_2 dL_2 = 4a_z A m$ پایا جاتا ہے۔ دوسرے نقطے پر قوت حاصل کرتے ہیں۔ یہاں $R_{21} = -2a_x + a_y - a_z$ لہذا دوسرے تار پر قوت

$$d(dF_2) = \frac{4\pi 10^{-7}}{4\pi (2^2 + 1^2 + 1^2)^{\frac{3}{2}}} (-4a_z) \times \left[(2a_y) \times (-2a_x + a_y + 2a_z) \right]$$

$$= -108.86 a_y nN$$

ہو گا۔ اب بالکل اسی طرح حل کرتے ہوئے پہلے نقطے پر

$$d(dF_1) = \frac{4\pi 10^{-7}}{4\pi (2^2 + 1^2 + 1^2)^{\frac{3}{2}}} (2a_y) \times \left[(-4a_z) \times (2a_x - a_y - 2a_z) \right]$$

$$= 54.4 a_z nN$$

قوت حاصل ہوتی ہے جہاں $R_{12} = -R_{21}$ استعمال کیا گیا۔ آپ کو یاد ہو گا کہ چھوٹے سے چھوٹے مقدار کے دو باروں کے مابین ہر صورت قیمت میں برابر اور سمت میں الٹ قوتیں پائی جاتی ہیں۔ مقناطیسی میدان میں ایسا نہیں ہے اور برقی رو گزارتے دو چھوٹے حصوں پر نا تو قوت کی قیمتیں برابر ہیں اور نا ہی ان کی سمتوں کا آپس میں کوئی تعلق

ہے۔ یہاں یہ سمجھ لینا ضروری ہے کہ مقناطیسی میدان میں مکمل بند دور حل کرتے ہوئے ہی صحیح جوابات حاصل ہوتے ہیں لہذا ایسا ہی کرتے ہیں۔

مساوات 8.16 کا دو درجی مکمل لیتے ہوئے

$$(8.17) \quad \begin{aligned} F_2 &= \mu_0 \frac{I_1 I_2}{4\pi} \oint \left[dL_2 \times \oint \frac{dL_1 \times a_{R21}}{R_{21}^2} \right] \\ &= \mu_0 \frac{I_1 I_2}{4\pi} \oint \left[\oint \frac{a_{R21} \times dL_1}{R_{21}^2} \right] \times dL_2 \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے۔

مندرجہ بالا مساوات میں اندرونی مکمل نقطہ N_2 پر مقناطیسی میدان حاصل کرنے کے لئے درکار ہے جبکہ بیرونی مکمل اسی نقطے پر تار پر کل قوت حاصل کرنے کے لئے درکار ہے۔

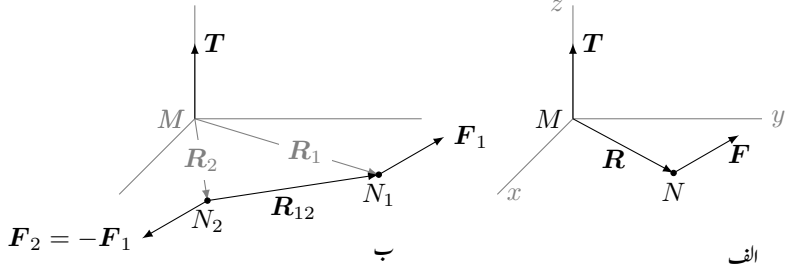
8.4 قوت اور مروڑ

مساوات 8.12 مقناطیسی میدان میں برقی رو گزارتے تار پر قوت دیتا ہے جسے یکساں میدان میں B کو مکمل کے باہر لے جاتے ہوئے

$$F = -B \times \oint dL$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اب کوئی بھی برقی دور مکمل بند دائرہ بنانا ہے۔ کسی بھی شکل کے بند دائرے کا لکیری مکمل $\oint dL = 0$ ہوتا ہے لہذا یکساں میدان میں برقی دور کے پورے تار پر کل صفر قوت پایا جائے گا۔ البتہ اگر میدان یکساں نہ ہو تب ضروری نہیں کہ پورے دور پر قوت صفر ہو۔

مساوات 8.10 اور مساوات 8.11 کے برقی رو کو بھی متعدد متوازی جڑے باریک تار نما ٹکڑوں میں تقسیم کیا جاسکتا ہے۔ ایسے ہر باریک تار پر بھی یکساں میدان میں صفر قوت ہو گا لہذا ان اشکال کے برقی رو کے ادوار پر بھی کل صفر قوت ہی پایا جائے گا۔



شکل 8.2: قوت کا معیار اثر۔

یکساں میدان میں پورے دور پر صفر قوت پایا جاتا ہے البتہ دور پر مروڑ¹⁰ یعنی قوت کا معیار اثر¹¹ عموماً صفر نہیں ہوتا۔ قوت کا معیار اثر حاصل کرنے کی خاطر قوت اور مروڑ کے محور یعنی چول¹² کا جاننا ضروری ہے۔ شکل 8.2-الف میں نقطہ N پر قوت F عمل کر رہا ہے۔ ہم نقطہ M کو محور چنتے ہیں۔ نقطہ M سے N تک سمتی فاصلہ R قوت کا بازو¹³ کہلاتا ہے۔ قوت کا معیار اثر T

$$(8.18) \quad T = R \times F$$

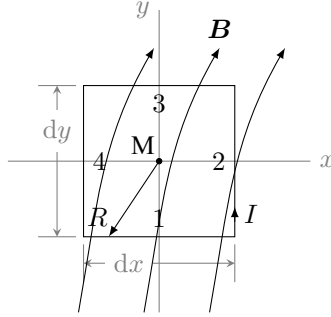
کے برابر ہے۔ مروڑ کی قیمت، قوت کے بازو کی لمبائی ضرب قوت کی قیمت ضرب ان دو کے مابین زاویے کے سائن کے برابر ہے جبکہ اس کی سمت دونوں کے عمودی ہے جسے صلیبی ضرب سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔

شکل 8.2-ب میں پختہ شکل کے جسم پر دو مختلف نقطوں پر برابر مگر الٹ سمت کے قوت لاگو کئے گئے ہیں۔ چونکہ اس جسم پر کل قوت صفر کے برابر ہے لہذا یہ کسی بھی سمت میں سیدھی حرکت نہیں کرے گی۔ محور M پر ان قوتوں کے مروڑ کا مجموعہ

$$\begin{aligned} T &= R_1 \times F_1 + R_2 \times F_2 \\ &= (R_1 - R_2) \times F_1 \\ &= R_{12} \times F_1 \end{aligned}$$

ہو گا جہاں دوسرے قدم پر $F_2 = -F_1$ پر کیا گیا ہے۔ اس مساوات میں قوتوں کے محور کا R_{12} پر کوئی اثر نہیں ہے لہذا کل قوت صفر ہونے کی صورت میں مروڑ کی قیمت محور پر منحصر نہیں ہے۔ اسی عمل کو زیادہ قوتوں پر بھی لاگو کیا جاسکتا ہے۔

torque¹⁰
moment of force¹¹
pivot¹²
moment arm¹³



شکل 8.3: مقناطیسی میدان میں برقی رو گزارتے تفرقی بند دائرے پر مروڑ۔

چونکہ مروڑ کی قیمت محور پر منحصر نہیں ہے لہذا ہم محور اس مقام پر چن سکتے ہیں جس پر مروڑ کا حصول زیادہ آسان ہو۔ ہم سطحی قوتوں کی صورت میں ایسا محور عموماً قوتوں کے ہم سطحی، جسم کے دھرے پر پایا جاتا ہے۔

آئیں شکل 8.3 میں دئے برقی رو گزارتے تار پر غیر یکساں مقناطیسی میدان $B = B_x a_x + B_y a_y + B_z a_z$ میں مروڑ حاصل کریں۔ تصور کریں کہ تار چول M پر صرف گھوم سکتا ہے۔ اس تار کے اطراف dx اور dy ہیں جبکہ اس میں برقی رو I کی سمت تیر کے نشان سے ظاہر کی گئی ہے۔ اس چھوٹے رقبے کے وسط M پر مقناطیسی میدان

$$(8.19) \quad B_0 = B_{x0} a_x + B_{y0} a_y + B_{z0} a_z$$

کے برابر ہے۔ یوں وسط سے $-\frac{dy}{2}$ جانب نقطہ 1 پر مقناطیسی میدان ٹیلر تسلسل سے

$$B_1 = B_0 - \frac{\partial B}{\partial y} \frac{dy}{2} + \dots$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں تمام تفرقی نقطہ M پر حاصل کئے جاتے ہیں۔ صرف ایک درجی تفرق رکھتے ہوئے یوں

$$B_1 = \left(B_{x0} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) a_x + \left(B_{y0} - \frac{\partial B_y}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) a_y + \left(B_{z0} - \frac{\partial B_z}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) a_z$$

حاصل ہوتا ہے۔ یوں راہ کے اس طرف کی تفرقی لہائی پر تفرقی قوت

$$dF_1 = I dx a_x \times B_1$$

یا

$$\begin{aligned} d\mathbf{F}_1 &= I dx \mathbf{a}_x \times \left[\left(B_{x0} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) \mathbf{a}_x + \left(B_{y0} - \frac{\partial B_y}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) \mathbf{a}_y \right. \\ &\quad \left. + \left(B_{z0} - \frac{\partial B_z}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) \mathbf{a}_z \right] \\ &= I dx \left[\left(B_{y0} - \frac{\partial B_y}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) \mathbf{a}_z - \left(B_{z0} - \frac{\partial B_z}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) \mathbf{a}_y \right] \end{aligned}$$

ہوگی۔ اس قوت کا بازو مرکز سے اس طرف کے درمیانے نقطے تک ہو گا یعنی $\mathbf{R}_1 = -\frac{dy}{2} \mathbf{a}_y$ لہذا اس قوت کا معیار اثر

$$\begin{aligned} d\mathbf{T}_1 &= \mathbf{R}_1 \times d\mathbf{F}_1 \\ &= -\frac{dy}{2} \mathbf{a}_y \times I dx \left[\left(B_{y0} - \frac{\partial B_y}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) \mathbf{a}_z - \left(B_{z0} - \frac{\partial B_z}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) \mathbf{a}_y \right] \\ &= -\frac{I}{2} \left(B_{y0} - \frac{\partial B_y}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dx dy \mathbf{a}_x \end{aligned}$$

ہوگا۔

اسی طرح وسط سے $\frac{dy}{2}$ + جانب نقطہ 3 پر مقناطیسی میدان مگنٹارن تسلسل سے

$$B_3 = B_0 + \frac{\partial B}{\partial y} \frac{dy}{2} + \dots$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں تمام تفرق نقطہ M پر حاصل کئے جاتے ہیں۔ صرف ایک درجی تفرق رکھتے ہوئے یوں

$$\mathbf{B}_3 = \left(B_{x0} + \frac{\partial B_x}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) \mathbf{a}_x + \left(B_{y0} + \frac{\partial B_y}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) \mathbf{a}_y + \left(B_{z0} + \frac{\partial B_z}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) \mathbf{a}_z$$

حاصل ہوتا ہے۔ یوں راہ کے اس طرف کی تفرقی لمبائی پر تفرقی قوت

$$d\mathbf{F}_3 = -I dx \mathbf{a}_x \times \mathbf{B}_3$$

یا

$$\begin{aligned} d\mathbf{F}_3 &= -I dx \mathbf{a}_x \times \left[\left(B_{x0} + \frac{\partial B_x}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) \mathbf{a}_x + \left(B_{y0} + \frac{\partial B_y}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) \mathbf{a}_y \right. \\ &\quad \left. + \left(B_{z0} + \frac{\partial B_z}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) \mathbf{a}_z \right] \\ &= I dx \left[- \left(B_{y0} + \frac{\partial B_y}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) \mathbf{a}_z + \left(B_{z0} + \frac{\partial B_z}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) \mathbf{a}_y \right] \end{aligned}$$

ہوگی۔ اس قوت کا بازو مرکز سے اس طرف کے درمیان تک یعنی $R_3 = \frac{dy}{2} \mathbf{a}_y$ ہے لہذا اس قوت کا معیار اثر

$$\begin{aligned} d\mathbf{T}_3 &= \mathbf{R}_3 \times d\mathbf{F}_3 \\ &= \frac{dy}{2} \mathbf{a}_y \times I dx \left[- \left(B_{y0} + \frac{\partial B_y}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) \mathbf{a}_z + \left(B_{z0} + \frac{\partial B_z}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) \mathbf{a}_y \right] \\ &= -\frac{I}{2} \left(B_{y0} + \frac{\partial B_y}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dx dy \mathbf{a}_x \end{aligned}$$

ہوگا۔

ان دو قوتوں کے معیار اثر کا مجموعہ

$$d\mathbf{T}_1 + d\mathbf{T}_3 = -IB_{y0} dx dy \mathbf{a}_x$$

کے برابر ہے۔ بالکل اسی طرح تیسرے اور چھوٹے اطراف کے قوتوں کے معیار اثر کا مجموعہ

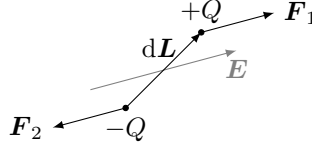
$$d\mathbf{T}_2 + d\mathbf{T}_4 = IB_{x0} dx dy \mathbf{a}_y$$

حاصل ہوتا ہے۔ یوں تمام اطراف کے قوتوں کے معیار اثر کا مجموعہ

$$d\mathbf{T} = I dx dy (B_{x0} \mathbf{a}_y - B_{y0} \mathbf{a}_x)$$

حاصل ہوتا ہے۔ قوسین میں بند حصے کو صلیبی ضرب کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔ یوں

$$d\mathbf{T} = I dx dy (\mathbf{a}_z \times \mathbf{B}_0)$$



شکل 8.4: برقی جفت قطب پر برقی میدان میں مروڑ۔

یا

$$(8.20) \quad dT = I dS \times B$$

حاصل ہوتا ہے جہاں بند راہ سمتی رقبے dS کو گھیرتی ہے۔ مندرجہ بالا مساوات میں کثافت مقناطیسی بہاؤ B لکھتے ہوئے زیر نوشت نہیں لکھا گیا۔

بند دائرے میں برقی رو ضرب چھوٹے سمتی رقبے کا حاصل ضرب تفرقی مقناطیسی جفت قطب کے معیار اثر¹⁴ dm کی تعریف ہے جس کی اکائی $A m^2$ ہے۔ یوں

$$(8.21) \quad dm = I dS$$

اور

$$(8.22) \quad dT = dm \times B$$

لکھے جاسکتے ہیں۔

مساوات 8.20، مساوات 8.21 اور مساوات 8.22 عمومی مساوات ہیں جن میں چھوٹا رقبہ dS مربع کے علاوہ کسی بھی شکل کا ہو سکتا ہے اور اس کی سمت کچھ بھی ہو سکتی ہے۔

غیر یکساں مقناطیسی میدان کی صورت میں تار پر کل قوت صفر نہیں ہوگی۔

شکل 8.4 میں برقی میدان میں برقی جفت قطب دکھایا گیا ہے۔ مثبت بار پر قوت $F_1 = QE$ اور منفی بار پر قوت $F_2 = -QE$ ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اس جفت قطب پر تفرقی مروڑ

$$\begin{aligned} dT &= dL \times QE \\ &= dp \times E \end{aligned}$$

¹⁴differential magnetic dipole moment

کے برابر ہے جہاں $dp = Q dL$ برقی جفت قطب ہے۔ مروڑ کی سمت صفحہ کے اندر جانب کو ہے۔ آپ نے دیکھا کہ مقناطیسی اور برقی جفت قطب پر مروڑ کے مساوات یکساں ہیں۔ بالکل مقناطیسی جفت قطب کی طرح یہاں بھی مروڑ کا تخمینہ لگاتے وقت جفت قطب کے احاطے میں میدان E کے تبدیلی کو نظر انداز کیا جاسکتا ہے۔

مثال 8.2: شکل 8.3 میں چھوٹے رقبے کو اتنا چھوٹا تصور کریں کہ اس پر مقناطیسی میدان یکساں تصور کرنا ممکن ہو۔ ایسی صورت میں تفرقی مروڑ حاصل کریں۔

حل: یکساں میدان کی صورت میں

$$\begin{aligned} d\mathbf{F}_1 &= I dx \mathbf{a}_x \times (B_{x0} \mathbf{a}_x + B_{y0} \mathbf{a}_y + B_{z0} \mathbf{a}_z) \\ &= I dx (B_{y0} \mathbf{a}_z - B_{z0} \mathbf{a}_y) \end{aligned}$$

اور

$$\begin{aligned} dT_1 &= -\frac{dy}{2} \mathbf{a}_y \times I dx (B_{y0} \mathbf{a}_z - B_{z0} \mathbf{a}_y) \\ &= -\frac{I}{2} dx dy B_{y0} \mathbf{a}_x \end{aligned}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ اسی طرح

$$\begin{aligned} d\mathbf{F}_3 &= -I dx \mathbf{a}_x \times (B_{x0} \mathbf{a}_x + B_{y0} \mathbf{a}_y + B_{z0} \mathbf{a}_z) \\ &= I dx (-B_{y0} \mathbf{a}_z + B_{z0} \mathbf{a}_y) \end{aligned}$$

اور

$$\begin{aligned} dT_3 &= \frac{dy}{2} \mathbf{a}_y \times I dx (-B_{y0} \mathbf{a}_z + B_{z0} \mathbf{a}_y) \\ &= -\frac{I}{2} dx dy B_{y0} \mathbf{a}_x \end{aligned}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ یوں

$$dT_1 + dT_3 = -I dx dy B_{y0} \mathbf{a}_x$$



شکل 8.5: مروڑدوں مقناطیسی میدان کو متوازی بنانے کی کوشش کرتا ہے۔

حاصل ہوتے ہیں۔ اسی طرح

$$dT_2 + dT_4 = I dx dy B_{x0} a_y$$

حاصل ہوتا ہے۔ ان نتائج سے کل مروڑ

$$dT = I dx dy (B_{x0} a_y - B_{y0} a_x)$$

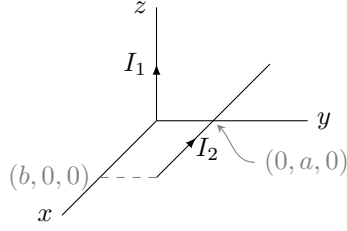
ہی حاصل ہوتا ہے۔

مندرجہ بالا مثال سے ثابت ہوتا ہے کہ غیر یکساں مقناطیسی میدان کی صورت میں مروڑ حاصل کرتے وقت چھوٹے رقبے پر میدان کی تبدیلی کو نظر انداز کیا جاسکتا ہے۔ اس مثال سے یہ بھی ظاہر ہے کہ یکساں مقناطیسی میدان میں تار پر کل قوت صفر کے برابر ہوتی ہے۔ اگر مقناطیسی میدان حقیقت میں یکساں ہی ہو تب کسی بھی بڑے رقبے پر بھی مروڑ بالکل اسی مساوات

$$(8.23) \quad T = IS \times B = m \times B \quad \text{یکساں مقناطیسی میدان}$$

سے حاصل ہو گا البتہ غیر یکساں میدان کی صورت میں مروڑ کی تعریف استعمال کرتے ہوئے ہی صحیح جواب حاصل ہو گا۔ سوال 8.9 میں آپ سے غیر یکساں میدان میں مروڑ حاصل کرنے کو کہا گیا ہے جبکہ سوال 8.10 میں مندرجہ بالا مساوات استعمال کرنے کو کہا گیا ہے۔

غور کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ برقی رو گزارتے بند دائرے پر مروڑ اس سمت میں دائرے کو گھمانے کی کوشش کرتا ہے جس میں دائرے سے پیدا مقناطیسی میدان اور بیرونی لاگو مقناطیسی میدان کی سمتیں ایک ہی ہوں۔ اس حقیقت کو شکل 8.5 کی مدد سے یاد رکھا جاسکتا ہے جہاں برقی رو گزارتے تار کی جگہ چھوٹا مقناطیس بیرونی میدان میں دکھایا گیا ہے۔ چھوٹا مقناطیس اس سمت میں گھومتا ہے جہاں دونوں میدان متوازی ہوں۔



شکل 8.6: چھوٹی تار پر مروڑ کا حصول۔

مثال 8.3: محدود z پر لامحدود لمبائی کے تار میں I_1 برقی رو a_z سمت میں گزر رہی ہے۔ اس کے قریب سطح $z = 0$ پر تار $y = a$ ، $-b < x < b$ میں $-a_x$ سمت میں I_2 برقی رو گزر رہی ہے۔ نقطہ $(0, a, 0)$ پر محور تصور کرتے ہوئے لمبی تار کے میدان میں چھوٹی تار پر مروڑ حاصل کریں۔ صورت حال شکل 8.6 میں دکھائی گئی ہے۔

حل: محدود z پر برقی رو میدان

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi\rho} \mathbf{a}_\phi$$

پیدا کرتی ہے جسے کارٹیسسی نظام میں

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi(x^2 + y^2)} (-y\mathbf{a}_x + x\mathbf{a}_y)$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس میدان کی قیمت اور سمت غیر یکساں ہیں۔ کارٹیسسی میدان میں انتہائی چھوٹی لمبائی کو

$$d\mathbf{L} = dx\mathbf{a}_x + dy\mathbf{a}_y + dz\mathbf{a}_z$$

لکھا جاتا ہے۔ چھوٹی تار پر $dy = 0$ اور $dz = 0$ ہیں لہذا $d\mathbf{L} = dx\mathbf{a}_x$ لکھتے¹⁵ ہوئے تار کے انتہائی

¹⁵ طلباء یہاں عموماً غلطی کرتے ہوئے $d\mathbf{L} = -dx\mathbf{a}_x$ لکھتے ہیں۔ یاد رہے کہ عمل میں ابتدائی اور انتہائی نقطے دراصل سمت تعین کرتے ہیں۔

چھوٹے حصے پر قوت

$$\begin{aligned} d\mathbf{F} &= I d\mathbf{L} \times \mathbf{B} \\ &= I_2 dx \mathbf{a}_x \times \frac{\mu_0 I_1}{2\pi(x^2 + y^2)} (-y \mathbf{a}_x + x \mathbf{a}_y) \\ &= \frac{I_1 I_2 \mu_0 x dx \mathbf{a}_z}{2\pi(x^2 + y^2)} \end{aligned}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ نقطہ $(0, a, 0)$ کو محور تصور کرتے ہوئے $\mathbf{R} = x \mathbf{a}_x$ لکھا جائے گا۔ یوں تار کی انتہائی چھوٹے حصے پر مروڑ

$$\begin{aligned} d\mathbf{T} &= \mathbf{R} \times d\mathbf{F} \\ &= x \mathbf{a}_x \times \frac{I_1 I_2 \mu_0 x dx \mathbf{a}_z}{2\pi(x^2 + y^2)} \\ &= -\frac{I_1 I_2 \mu_0 x^2 \mathbf{a}_y}{2\pi(x^2 + y^2)} dx \end{aligned}$$

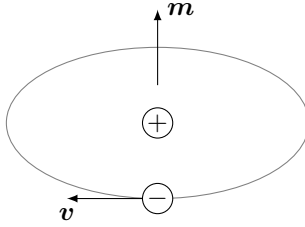
ہو گا۔ یوں پورے تار پر کل مروڑ

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \int_b^{-b} -\frac{I_1 I_2 \mu_0 x^2 \mathbf{a}_y}{2\pi(x^2 + y^2)} dx \\ &= \frac{I_1 I_2 \mu_0}{\pi} \left(b - a \tan^{-1} \frac{b}{a} \right) \mathbf{a}_y \quad \text{Nm} \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں $y = a$ پر کیا گیا ہے۔

8.5 فولادی مقناطیسی اشیاء اور مقناطیسی خطے

شکل 8.7 میں ایٹمی مرکز کے گرد مدار میں گھومتا الیکٹران دکھایا گیا ہے۔ حرکت کرتا بار برقی رو پیدا کرتا ہے۔ ایسی برقی رو جو مقید الیکٹران کی بنا ہو مقید برقی رو I_m^{16} کہلائی جاتی ہے۔ اس الیکٹران کو بند گول دائرے پر مقید برقی رو



شکل 8.7: مدار میں گھومتے الیکٹران کے مقناطیسی جفت قطب کے معیار اثر کو بیرونی میدان کے متوازی دکھایا گیا ہے۔

تصور کیا جا سکتا ہے جو مقناطیسی جفت قطب m کو جنم دیتی ہے۔ الیکٹران منفی ہونے کی وجہ سے مقید برقی رو v کے الٹ سمت میں ہوگی۔ ایٹمی مسائل صرف کوانٹم میکانیات¹⁷ سے ہی سمجھے جا سکتے ہیں۔ یہاں صرف اتنا بتانا ضروری ہے کہ لوہا، نکل¹⁸ اور کوبالٹ¹⁹ ایسے عناصر ہیں جن کا m قدر زیادہ قیمت رکھتا ہے۔ یہ اشیاء فولادی مقناطیسی اشیاء²⁰ کہلاتے ہیں۔ ہم انہیں اشیاء پر غور کرتے ہیں۔

فولادی مقناطیسی اشیاء میں ایٹموں کے باہمی قوتوں کی وجہ سے قریبی جفت قطب ایک ہی سمت میں رخ کر لیتے ہیں۔ ایسے ہم صف²¹ خطوں میں متعدد ایٹم شامل ہوتے ہیں۔ ان خطوں کو مقناطیسی خطے²² کہتے ہیں۔ مقناطیسی خطے مختلف شکل کے ہو سکتے ہیں اور ان کی جسامت ایک مائیکرو میٹر تا کئی سنٹی میٹر ممکن ہے۔ کسی بھی قدرتی مقناطیسی شے میں انفرادی مقناطیسی خطے کے مقناطیسی جفت قطب کا معیار اثر انتہائی بڑی مقدار کا ہوتا ہے البتہ مختلف مقناطیسی خطوں کے جفت قطب کے رخ مختلف سمتوں میں ہوتے ہیں۔ اسی وجہ سے پورا حجم از خود کوئی مقناطیسی معیار اثر نہیں رکھتا۔ ہاں بیرونی مقناطیسی میدان B_0 لاگو کرنے سے وہ مقناطیسی خطے جو B_0 کے ہی سمت میں رخ کئے ہوں گا حجم بڑھ جاتا ہے جبکہ بقایا مقناطیسی خطوں کا حجم کم ہو جاتا ہے۔ یوں اندرونی مقناطیسی میدان بیرونی میدان سے کئی گنا بڑھ جاتا ہے۔ بیرونی میدان ہٹا دینے سے تمام مقناطیسی خطے اپنی پرانی صورت اختیار نہیں کر پاتے۔ یوں تمام مقناطیسی خطوں کا مجموعی بقایا مقناطیسی معیار اثر رہ جاتا ہے۔ یہ حقیقت کہ مقناطیسی اشیاء کے خصوصیات گزشتہ حالات پر منحصر ہے، مقناطیسی چال²³ کہلاتا ہے۔

quantum mechanics¹⁷

nickel¹⁸

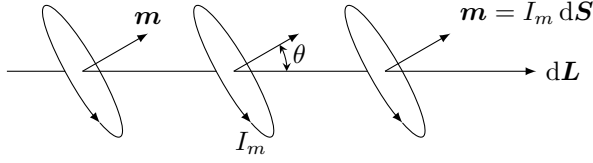
cobalt¹⁹

ferromagnetic²⁰

aligned²¹

magnetic domain²²

hysteresis²³



شکل 8.8: بیرونی مقناطیسی میدان جفت قطب کو صف بستہ کئے ہوئے ہے جس سے بند راہ سے گھیرے گئے سطح میں مقید برقی رو سے اضافہ پایا جاتا ہے۔

8.6 مقناطیسیت اور مقناطیسی مستقل

تصور کریں کہ کسی مادے کے اکائی حجم میں n مقناطیسی جفت قطب پائے جاتے ہوں۔ اس مادے کے Δh حجم میں $n\Delta h$ جفت قطب ہوں گے جن کا اجتماعی مقناطیسی معیار اثر ان کا سمتی مجموعہ

$$m_{\Sigma} = \sum_{i=1}^{n\Delta h} m_i \quad (8.24)$$

ہو گا۔ انفرادی m مختلف قیمت اور سمت کے ہو سکتے ہیں۔ اجتماعی مقناطیسی معیار اثرنی اکائی حجم

$$M = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta h} \sum_{i=1}^{n\Delta h} m_i \quad (8.25)$$

کو مقناطیسیت²⁴ پکارا اور M سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ مقناطیسیت کی اکائی بالکل H کے اکائی کی طرح ایمپیئر فی میٹر $\frac{A}{m}$ ہے۔ مندرجہ بالا مساوات کا صفحہ 199 پر دئے مساوات 5.25 کے ساتھ موازنہ کریں جو تقطیب کی تعریف بیان کرتی ہے۔ مندرجہ ذیل پڑھتے ہوئے بھی تقطیب پر تبصرے کو ساتھ ساتھ دیکھتے رہیں۔

شکل 8.8 میں بند راہ کا کچھ حصہ dL دکھایا گیا ہے جس پر مقناطیسی جفت قطب دکھائے گئے ہیں۔ چھوٹے رقبے dS کے گرد گھومتی مقید برقی رو I_m مقناطیسی معیار اثر $m = I_m dS$ کو جنم دیتی ہے۔ بیرونی مقناطیسی میدان لاگو کرنے سے جفت قطب ہم صف ہو کر dL کے ساتھ θ کا زاویہ بناتے ہیں۔ یوں چھوٹے حجم $dS \cos \theta dL$ یعنی $dS \cdot dL$ میں جفت قطب کی کل تعداد $n dS \cdot dL$ ہو گی۔ آئیں دیکھتے ہیں کہ بند راہ سے گھیری سطح سے گزرتی برقی رو میں بیرونی میدان لاگو کرنے سے کیا تبدیلی رونما ہوتی ہے۔ اگر بند راہ پر a_L جانب چلا جائے تو گھیری گئی سطح بائیں ہاتھ کو ہے۔ بیرونی میدان کے غیر موجودگی میں تمام جفت قطب بلا ترتیب پائے جاتے۔ بیرونی میدان B

magnetization²⁴

لاگو کرنے کی صورت میں تمام کے تمام $n \, dS \cdot dL$ جفت قطب ہم صف ہو جاتے ہیں جس کی وجہ سے گھیرے سطح سے کل مقید گزرتی برقی رو بڑھ جاتی ہے۔ ہر انفرادی جفت قطب گھیری گئی سطح سے گزرتی برقی رو میں I_m کا اضافہ کرتا ہے لہذا تمام ہم صف جفت قطب مل کر

$$(8.26) \quad dI_m = n I_m \, dS \cdot dL = M \cdot dL$$

اضافہ پیدا کرتے ہیں۔ پورے بند راہ کے گرد چلتے ہوئے یوں کل اضافہ

$$(8.27) \quad I_m = \oint M \cdot dL$$

ہو گا۔

مندرجہ بالا مساوات ایمپیئر کے دوری قانون کی مساوات کے ساتھ قریبی مشابہت رکھتا ہے۔ یوں B اور H کے تعلق پر نظر ثانی کرتے ہوئے یوں بیان کیا جا سکتا ہے کہ یہ خالی خلاء کے علاوہ دیگر اشیاء میں بھی کارآمد ہو۔ ہمارا موجودہ تبصرہ بیرونی میدان B میں جفت قطب پر قوت اور مردڑ پر رہا ہے۔ آئیں B کو ہی بنیادی متغیرہ تصور کرتے ہوئے H کی بہتر تعریف حاصل کریں۔ ایسا کرنے کی خاطر ایمپیئر کے دوری قانون کو آزاد برقی رو I اور مقید برقی رو I_m کے مجموعے کی صورت

$$(8.28) \quad \oint \frac{B}{\mu_0} \cdot dL = I_{\text{کل}}$$

میں لکھتے ہیں جہاں

$$(8.29) \quad I_{\text{کل}} = I + I_m$$

کے برابر ہے۔ مندرجہ بالا تین مساوات سے

$$(8.30) \quad I = I_{\text{کل}} - I_m = \oint \left(\frac{B}{\mu_0} - M \right) \cdot dL$$

حاصل ہوتا ہے۔ قوسین میں بند حصے کو H کی بہتر تعریف لیتے ہیں یعنی

$$(8.31) \quad H = \frac{B}{\mu_0} - M$$

جسے یوں

$$(8.32) \quad B = \mu_0 (H + M)$$

بھی لکھا جا سکتا ہے۔ چونکہ خالی خلاء میں M صفر کے برابر ہوتا ہے لہذا مندرجہ بالا مساوات سے خالی خلاء میں $B = \mu_0 H$ ہی حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 8.30 میں H کی نئی تعریف پر کرنے سے ایمپیر کے دوری قانون کو آزاد برقی رو کی صورت

$$(8.33) \quad I = \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}$$

میں بیان کیا جا سکتا ہے۔

مختلف اقسام کے برقی رو کے لئے

$$I_m = \oint_S \mathbf{J}_m \cdot d\mathbf{S}$$

$$I_{\text{کل}} = \oint_S \mathbf{J}_{\text{کل}} \cdot d\mathbf{S}$$

$$I = \oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

لکھے جا سکتے ہیں جن سے بذریعہ مسئلہ سٹوکس مساوات 8.27، مساوات 8.33 اور مساوات 8.28 کے گردش

$$\nabla \times \mathbf{M} = \mathbf{J}_m$$

$$\nabla \times \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} = \mathbf{J}_{\text{کل}}$$

$$(8.34) \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

لکھے جا سکتے ہیں۔ ہمیں یہاں سے آگے مساوات 8.33 اور مساوات 8.34 سے غرض رہے گا۔ یہ دونوں مساوات آزاد برقی رو کے تعلق پیش کرتے ہیں۔

مساوات 8.32 کثافت مقناطیسی بہاؤ B ، مقناطیسی میدان کی شدت H اور مقناطیسیت M کے تعلق کو بیان کرتی ہے۔ خطی²⁵ اور غیر سمی خاصیت²⁶ کے اشیاء میں مقناطیسیت اور میدان کے شدت کا خطی تعلق

$$(8.35) \quad \mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$$

پایا جاتا ہے جہاں χ_m کو مقناطیسی اثر پذیری²⁷ کہا جاتا ہے۔ یوں

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \mu_0 (\mathbf{H} + \chi_m \mathbf{H}) \\ &= \mu_0 (1 + \chi_m) \mathbf{H} \end{aligned}$$

linear²⁵
isotropic²⁶
magnetic susceptibility²⁷

لکھا جا سکتا ہے۔ تو سین میں بند حصے کو جزوی مقناطیسی مستقل²⁸ پکارا اور μ_R سے ظاہر کیا جاتا ہے یعنی

$$(8.36) \quad \mu_R = 1 + \chi_m$$

یوں

$$B = \mu_0 \mu_R H$$

یا

$$(8.37) \quad B = \mu H$$

حاصل ہوتا ہے جہاں μ

$$(8.38) \quad \mu = \mu_0 \mu_R$$

مقناطیسی مستقل²⁹ پکارا جاتا ہے۔ جزوی مقناطیسی مستقل μ_R کے استعمال سے ہائیٹ سیوارٹ کا قانون اور ایمپیئر کے دوری قانون کو خالی خلاء کے علاوہ ان تمام اشیاء میں بھی استعمال کیا جا سکتا ہے جو خطی اور غیر سمی خاصیت رکھتے ہوں۔ ایسے اشیاء مساوات 8.35 پر پورا اترتے ہیں۔

فولادی مقناطیسی اشیاء کے μ_R کی قیمت 10 تا 100 000 پائی جاتی ہے۔

سمتی خاصیت³⁰ کے اشیاء میں H کا ہر کارتیسی جزو B کے ہر کارتیسی جزو پر اثر انداز ہوتا ہے لہذا ان کا تعلق تناوی شکل

$$(8.39) \quad \begin{aligned} B_x &= \mu_{xx}H_x + \mu_{xy}H_y + \mu_{xz}H_z \\ B_y &= \mu_{yx}H_x + \mu_{yy}H_y + \mu_{yz}H_z \\ B_z &= \mu_{zx}H_x + \mu_{zy}H_y + \mu_{zz}H_z \end{aligned}$$

میں لکھا جا سکتا ہے۔ یہ مساوات صفحہ 204 پر دئے مساوات 5.40 کی طرح ہے۔ یوں سمی خاصیت کے اشیاء میں $B = \mu H$ کے تعلق میں μ تناوی مستقل ہے۔ مساوات $B = \mu_0(H + M)$ اب بھی درست ہے اگرچہ B ، H اور M عموماً غیر متوازی ہوں گے۔

مقناطیسی اثر پذیری کی بات کرتے ہوئے خطی تعلق تصور کیا گیا ہے۔ حقیقت میں ایسا خطی تعلق صرف غیر مقناطیسی اشیاء میں ہی پایا جاتا ہے۔

²⁸relative magnetic constant, relative permeability
²⁹magnetic constant, permeability
³⁰anisotropic

8.7 مقناطیسی سرحدی شرائط

ہم موصل اور ذو برق کے سرحدی شرائط دیکھ چکے ہیں۔ انہیں دیکھتے ہوئے آگے پڑھیں۔ بالکل انہیں کی طرح شکل 8.9 کی مدد سے مقناطیسی سرحدی شرائط حاصل کرتے ہیں جہاں دو مقناطیسی اشیاء کا سرحد دکھایا گیا ہے جن کے مقناطیسی مستقل μ_1 اور μ_2 ہیں۔ سرحد پر چھوٹے ٹکڑے کی لمبائی کم سے کم کرتے ہوئے گاوس کے قانون

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

کے اطلاق سے

$$B_{n1}\Delta S - B_{n2}\Delta S = 0$$

یعنی

$$(8.40) \quad B_{n2} = B_{n1}$$

یا

$$(8.41) \quad H_{n2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} H_{n1}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ یوں عمودی B سرحد پر بلا جوڑ ہے جبکہ عمودی H سرحد پر $\frac{\mu_1}{\mu_2}$ کی شرح سے جوڑ دار ہے۔ مندرجہ بالا دو مساوات کو یوں

$$(8.42) \quad \mathbf{a}_N \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0$$

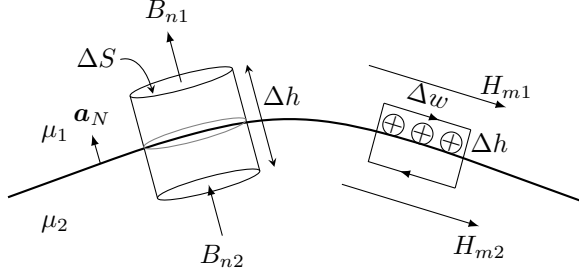
$$(8.43) \quad \mathbf{a}_N \cdot \left(\mathbf{H}_2 - \frac{\mu_1}{\mu_2} \mathbf{H}_1 \right) = 0$$

بھی لکھا جا سکتا ہے۔

سرحد پر عمودی M کا تعلق سرحد پر عمودی H کے تعلق سے حاصل ہوتا ہے۔ خطی خاصیت کے مقناطیسی اشیاء کے لئے یوں

$$(8.44) \quad M_{n2} = \frac{\chi_{m2} \mu_1}{\chi_{m1} \mu_2} M_{n1}$$

لکھا جا سکتا ہے۔



شکل 8.9: مقناطیسی سرحدی شرائط۔

سرحد پر انتہائی کم موٹائی کے نخلے میں کثافت برقی رو K تصور کرتے ہوئے کثافت کے عمودی ΔL چوڑائی پر برقی رو $I_{\Delta L} = K\Delta L$ لکھی جاسکتی ہے۔ یوں سرحد پر متوازی اجزاء کا شرط شکل میں مستطیل راہ پر ایمپیسر کے دوری قانون

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I$$

کے اطلاق سے

$$H_{m1}\Delta w - H_{m2}\Delta w = K_{\perp}\Delta w$$

یعنی

$$(8.45) \quad H_{m1} - H_{m2} = K_{\perp}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں K_{\perp} سے مراد K کا وہ حصہ ہے جو H_{m1} اور H_{m2} کے عمودی ہے۔ سمتی ضرب کے استعمال سے مندرجہ بالا مساوات کو

$$(8.46) \quad \mathbf{a}_N \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{K}_{\perp}$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں \mathbf{a}_N سرحد پر عمودی اکائی سمتیہ ہے۔ سرحد کے متوازی \mathbf{B} کے لئے یوں

$$(8.47) \quad \frac{B_{m1}}{\mu_1} - \frac{B_{m2}}{\mu_2} = K_{\perp}$$

یا

$$(8.48) \quad \mathbf{a}_N \times \left(\frac{B_{m1}}{\mu_1} - \frac{B_{m2}}{\mu_2} \right) = \mathbf{K}_{\perp}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اسی طرح خطی خاصیت کے اشیاء کے لئے سرحد کے متوازی M کے لئے

$$(8.49) \quad M_{m2} = \frac{\chi_{m2}}{\chi_{m1}} M_{m1} - \chi_{m2} K_{\perp}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ سرحد پر صفر کثافت برقی رو کی صورت میں مندرجہ بالا تین مساوات سادہ صورت اختیار کر لیتے ہیں۔ دونوں اشیاء غیر موصل ہونے کی صورت میں سرحد پر کثافت برقی رو صفر ہی ہوتی ہے۔

مثال 8.4: مساوات $3x - 2y + 5z < 1$ خطہ-1 جبکہ مساوات $3x - 2y + 5z > 1$ خطہ-2 کو ظاہر کرتی ہے۔ ان خطوں کے جزوی مقناطیسی مستقل $\mu_{R1} = 2.5$ اور $\mu_{R2} = 5$ ہیں۔ خطہ-1 میں $\mathbf{H}_1 = 30\mathbf{a}_x + 20\mathbf{a}_y - 40\mathbf{a}_z$ ہے۔ سرحد کے عمودی، خطہ-1 سے خطہ-2 کی جانب اکائی سمتیہ \mathbf{a}_N حاصل کریں۔ پہلے خطے میں سرحد کے عمودی اور متوازی میدان کے اجزاء حاصل کریں۔ اسی طرح دوسرے خطے میں سرحد کے عمودی اور متوازی میدان حاصل کریں۔ سرحد کے عمود کے ساتھ دونوں خطوں میں میدان کیا زاویہ بناتا ہے۔

حل: سرحدی مساوات کی ڈھلوان سے اکائی سمتیہ حاصل ہوگی۔ چونکہ ڈھلوان کی سمت بڑھتے جانب ہوتی ہے لہذا اس کی سمت خطہ-1 سے خطہ-2 کی جانب ہوگی۔

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_N &= \frac{\nabla(3x - 2y + 5z)}{|\nabla(3x - 2y + 5z)|} \\ &= \frac{3\mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_y + 5\mathbf{a}_z}{\sqrt{38}} \\ &= 0.487\mathbf{a}_x - 0.324\mathbf{a}_y + 0.811\mathbf{a}_z \end{aligned}$$

میدان کا عمودی جزو

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{n1} &= (\mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{a}_N)\mathbf{a}_N \\ &= -24.33(0.487\mathbf{a}_x - 0.324\mathbf{a}_y + 0.811\mathbf{a}_z) \\ &= -11.84\mathbf{a}_x + 7.89\mathbf{a}_y - 19.74\mathbf{a}_z \end{aligned}$$

ہے جسے میدان سے منفی کرنے سے متوازی جزو حاصل ہوگا۔

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{m1} &= \mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_{n1} \\ &= (30\mathbf{a}_x + 20\mathbf{a}_y - 40\mathbf{a}_z) - (-11.84\mathbf{a}_x + 7.89\mathbf{a}_y - 19.74\mathbf{a}_z) \\ &= 41.84\mathbf{a}_x + 12.11\mathbf{a}_y - 20.26\mathbf{a}_z \end{aligned}$$

چونکہ سرحد پر مقناطیسی میدان بے جوڑ ہوتا ہے لہذا سرحد کے دونوں اطراف پر متوازی میدان برابر ہوں گے۔

$$\mathbf{H}_{m2} = \mathbf{H}_{m1} = 41.84\mathbf{a}_x + 12.11\mathbf{a}_y - 20.26\mathbf{a}_z$$

سرحدی شرائط سے

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_{n2} &= \frac{\mu_{R1}}{\mu_{R2}} \mathbf{H}_{n1} = \frac{2}{5} (-11.84\mathbf{a}_x + 7.89\mathbf{a}_y - 19.74\mathbf{a}_z) \\ &= -5.92\mathbf{a}_x + 3.95\mathbf{a}_y - 9.87\mathbf{a}_z\end{aligned}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ یوں دوسرے خطے میں میدان

$$\mathbf{H}_2 = \mathbf{H}_{m2} + \mathbf{H}_{n2} = 35.92\mathbf{a}_x + 16.05\mathbf{a}_y - 30.13\mathbf{a}_z$$

ہے۔ پہلے خطے میں

$$\cos \theta_1 = \frac{|\mathbf{H}_{n1}|}{|\mathbf{H}_1|} = 0.452$$

سے

$$\theta_1 = 63.1^\circ$$

حاصل ہوتا ہے جبکہ دوسرے خطے میں اسی طرح

$$\theta_2 = \cos^{-1} \frac{|\mathbf{H}_{n2}|}{|\mathbf{H}_2|} = 75.8^\circ$$

حاصل ہوتا ہے۔

8.8 مقناطیسی دور

یک سمتی برقی ادوار حل کرنے سے آپ بخوبی آگاہ ہوں گے۔ کئی مقناطیسی مسائل بالکل انہیں کی طرح حل ہوتے ہیں۔ برقی مشین مثلاً موٹر اور ٹرانسفارمر کے کارکردگی پر غور کرتے وقت انہیں مقناطیسی ادوار سمجھا جاتا ہے۔ میری

کتاب "برقی آلات" میں اس ترکیب پر پورا باب ہے اور پوری کتاب میں اسی ترکیب کو استعمال کرتے ہوئے مختلف برقی مشین پر غور کیا گیا ہے۔ آئیں اس ترکیب کو دیکھیں۔

سب سے پہلے ان برقی اور مقناطیسی مساوات کو پاس پاس لکھتے ہیں جن کی مدد سے مقناطیسی ادوار کا تصور پیدا ہوتا ہے۔ برقی دباؤ اور برقی میدان کی شدت کا تعلق

$$(8.50) \quad \mathbf{E} = -\nabla V$$

ہے۔ غیر سمتی مقناطیسی دباؤ اور مقناطیسی میدان کی شدت کے تعلق

$$(8.51) \quad \mathbf{H} = -\nabla V_m$$

سے بھی آپ بخوبی واقف ہیں۔ منبع برقی دباؤ کو محرک برقی دباؤ پکارا جاتا ہے۔ اسی مشابہت کی بنا پر غیر مقناطیسی دباؤ کو محرک مقناطیسی دباؤ پکارا جائے گا۔ متحرک مقناطیسی دباؤ کی اکائی ایمپیر۔ چکر میں عموماً متعدد چکر کے لچھے کو بطور متحرک مقناطیسی دباؤ استعمال کیا جاتا ہے اور یوں اس کی اکائی ایمپیر۔ چکر³¹ لی جاتی ہے۔ یاد رہے کہ غیر سمتی مقناطیسی دباؤ صرف اس نخطے میں معنی رکھتا ہے جہاں برقی رو موجود نہ ہو۔

دو نقطوں کے درمیان برقی دباؤ کے فرق کو

$$(8.52) \quad V_{AB} = - \int_B^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$$

لکھا جاتا ہے۔ بالکل اسی طرح دو نقطوں کے درمیان مقناطیسی دباؤ کے فرق کو

$$(8.53) \quad V_{mAB} = - \int_B^A \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}$$

لکھا جاتا ہے۔ صفحہ 333 پر مساوات 7.83 میں بتلایا گیا کہ غیر سمتی مقناطیسی دباؤ کے حصول کے دوران مندرجہ بالا مکمل میں $\phi = \pi$ پر سے نہیں گزرا جائے گا۔ اس حقیقت کا خیال رکھنا ضروری ہے۔

برقی ادوار میں اوہم کے قانون کی نقطہ شکل

$$(8.54) \quad \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

سے کون خبردار نہیں ہے۔ یہ مساوات کثافت برقی رو اور برقی میدان کے شدت کا تعلق بیان کرتی ہے۔ مقناطیسی ادوار میں اس کا مقابل

$$(8.55) \quad B = \mu H$$

ہے جو کثافت مقناطیسی بہاؤ اور مقناطیسی میدان کے شدت کا تعلق پیش کرتی ہے۔

کل برقی رو بذریعہ سطحی تکمیل

$$(8.56) \quad I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

حاصل ہوتی ہے۔ کل مقناطیسی بہاؤ بھی ایسے ہی تکمیل سے حاصل ہو گا لہذا

$$(8.57) \quad \Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

لکھا جائے گا۔ یوں برقی ادوار میں I اور مقناطیسی ادوار میں Φ اہمیت کے حامل ہیں۔

برقی ادوار میں برقی دباؤ اور برقی رو کی شرح کو برقی مزاحمت پکارا اور R سے ظاہر کیا جاتا ہے یعنی

$$(8.58) \quad V = IR$$

ہم بالکل اسی طرح متحرک مقناطیسی دباؤ اور مقناطیسی بہاؤ کی شرح کو ہچکچاہٹ کا نام دیتے ہیں جسے \mathfrak{R} سے ظاہر کیا جائے گا لہذا مقناطیس ادوار کے لئے

$$(8.59) \quad V_m = \Phi \mathfrak{R}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ ہچکچاہٹ کی اکائی ایمپیر۔ چکر فی ویبر ($A \cdot t / Wb$) ہے۔

خطی اور غیر سمی خاصیت کے یکساں مادہ جس کی موصلیت σ ہو سے بنایا گیا برقی مزاحمت

$$(8.60) \quad R = \frac{d}{\sigma S}$$

کے برابر ہے جہاں مزاحمت کی لمبائی d اور اس کا رقبہ عمودی تراش پورے لمبائی پر یکساں S کے برابر ہے۔ اگر خطی اور غیر سمی خاصیت کے یکساں مادہ سے ہچکچاہٹ بنایا جائے تو اس کی قیمت

$$(8.61) \quad \mathfrak{R} = \frac{d}{\mu S}$$

ہو گی جہاں ہچکچاہٹ کی لمبائی d اور اس کا رقبہ عمودی تراش پورے لمبائی پر یکساں S کے برابر ہے۔ حقیقت میں ہوا کے علاوہ ایسا کوئی مادہ نہیں پایا جاتا جس سے اٹل قیمت کی ہچکچاہٹ بنائی جاسکے۔

مثال 8.5: ایک سلاخ جس کی لمبائی 15 cm اور رداس 1 mm ہے کی موصلیت $\frac{S}{m}$ 1200 ہے پر 220 V برقی دباؤ لاگو کی جاتی ہے۔ سلاخ کی مزاحمت اور اس میں برقی رو حاصل کریں۔ سلاخ میں کشافت برقی رو بھی حاصل کریں۔

حل: مزاحمت

$$R = \frac{d}{\sigma A} = \frac{0.15}{7 \times 10^4 \times \pi \times 0.001^2} = 39.8 \Omega$$

اور برقی رو

$$I = \frac{V}{R} = \frac{220}{39.8} = 5.5 \text{ A}$$

اور یوں کشافت برقی رو ہو گا

$$J = \frac{I}{A} = \frac{5.5}{\pi \times 0.001^2} = 1.75 \frac{\text{MA}}{\text{m}^2}$$

مثال 8.6: ایک سلاخ جس کی لمبائی 15 cm اور رداس 2 cm ہے کا جزو مقناطیسی مستقل 1000 ہے۔ اس پر 100 چکر کا لچھا جس میں 0.5 A برقی رو ہو مقناطیسی دباؤ لاگو کرتا ہے۔ سلاخ کی ہچکچاہٹ اور اس میں مقناطیسی بہاؤ حاصل کریں۔ سلاخ میں کشافت مقناطیسی بہاؤ بھی حاصل کریں۔

حل: ہچکچاہٹ

$$\mathfrak{R} = \frac{d}{\mu_R \mu_0 A} = \frac{0.15}{1000 \times 4 \times \pi \times 10^{-7} \times \pi \times 0.02^2} = 94988 \text{ A} \cdot \text{t/Wb}$$

اور مقناطیسی بہاؤ

$$\Phi = \frac{V_m}{\mathfrak{R}} = \frac{100 \times 0.5}{94988} = 0.53 \text{ mWb}$$

اور یوں کشاف مقناطیسی بہاؤ ہوگی

$$B = \frac{\Phi}{A} = \frac{0.00053}{\pi \times 0.02^2} = 0.42 \text{ T}$$

8.9 مقناطیسی مخفی توانائی

ساکن برقی میدان پر غور کے دوران ہم نے نقطہ بار پر قوت کے تجرباتی نتائج سے کولمب کا قانون اخذ کیا۔ اس قانون کو استعمال کرتے ہوئے مختلف نقطہ بار کو لامحدود فاصلے سے مختلف اختتامی مقامات پر رکھنے کی خاطر کل درکار توانائی حاصل کی گئی۔ یہی ساکن برقی میدان کی مخفی توانائی تھی۔ اس مخفی توانائی کی عمومی مساوات

$$(8.62) \quad W_{\text{برقی}} = \frac{1}{2} \int_h D \cdot E \, dh$$

ہے جہاں D اور E کا تعلق راست تناسب تصور کیا گیا ہے۔

یہاں خیال آتا ہے کہ مقناطیسی میدان کی مخفی توانائی بھی اسی طرز پر حاصل کی جاسکتی ہے جیسے برقی میدان کی مخفی توانائی حاصل کی گئی تھی، یعنی، ایک برقی رو گزارتے تار کے قریب دوسرے برقی رو گزارتے تار کو قریب لاتے ہوئے درکار توانائی معلوم کر کے۔ حقیقت میں معاملہ اتنا سادہ نہیں ہے۔ جیسے کہ اگلے باب میں بتلایا جائے گا، مقناطیسی میدان میں حرکت کرتے حصے میں برقی دباؤ پیدا ہوتا ہے جس میں معاملہ خاصہ تبدیل ہو جاتا ہے۔

مقناطیسی میدان کی مخفی توانائی اگلے باب میں پوئنٹنگ سمیتھ³² سے حاصل کی جائے گی۔ یہاں مقناطیسی مخفی توانائی کی مساوات صرف پیش کرتے ہیں

$$(8.63) \quad W_{\text{مقناطیسی}} = \frac{1}{2} \int_h B \cdot H \, dh$$

جو شکل سے برقی مخفی توانائی کے مساوات کے قریبی مشابہت رکھتا ہے۔ اس میں $B = \mu H$ پر کرنے سے

$$(8.64) \quad W_{\text{مقناطیسی}} = \frac{1}{2} \int_h \mu H^2 dh$$

اور

$$(8.65) \quad W_{\text{مقناطیسی}} = \frac{1}{2} \int_h \frac{B^2}{\mu} dh$$

بھی حاصل ہوتے ہیں۔

برقی مخفی توانائی کی طرح یہاں بھی یہ بتلانا کہ مخفی توانائی درحقیقت کہاں پر ہے نا ممکن ثابت ہوتا ہے البتہ حساب و کتاب آسان بنانے کی خاطر ہم فرض کر سکتے ہیں کہ یہ توانائی پورے حجم میں بطور کشافت توانائی $\frac{1}{2} B \cdot H$ پائی جاتی ہے جسے جاول فی مربع میٹر J/m^3 میں ناپا جائے گا۔

8.10 خود امالہ اور مشترکہ امالہ

برقی ادوار میں مزاحمت، برقی گیر³³ (کپیسٹر) اور امالہ گیر³⁴ کردار ادا کرتے ہیں۔ مزاحمت اور برقی گیر (کپیسٹر) پر ہم بات کر چکے ہیں۔ برقی دباؤ اور برقی رو کی شرح کو مزاحمت کہا گیا۔ ہم نے دیکھا کہ مزاحمت کے قیمت کا دار و مدار مزاحمت کے لمبائی، رقبہ عمودی تراش اور موصلیت پر ہے۔ اسی طرح دو چادروں میں سے کسی ایک پر بار کی حتمی قیمت اور ان چادروں کے درمیان برقی دباؤ کی شرح کو برقی گنجائش (کپیسٹنس) کہا گیا۔ ہم نے دیکھا کہ برقی گنجائش کے قیمت کا دار و مدار برقی گیر (کپیسٹر) کے چادروں کے رقبے، ان چادروں کے درمیان فاصلے اور چادروں کے درمیان مادے کی برقی مستقل پر ہے۔ یوں مزاحمت اور برقی گیر (کپیسٹر) کے قیمت ان کے شکل، جسامت اور مادے کے مستقل پر ہے۔ اس حصے میں ہم امالہ گیر کی امالیت L پر غور کریں گے جس کی اکائی ہینری³⁵ H ہے۔ امالہ گیر³⁶ اور اس کی امالیت³⁷ دونوں کے لئے ہم امالہ کا لفظ استعمال کریں گے۔ نیچے کئی مساوات میں امالہ اور فاصلہ دونوں کے لئے ایک ہی علامت یعنی L استعمال کیا گیا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ متن سے ان کا فرق کرنا ممکن ہو گا۔ ہم دیکھیں گے کہ اس کے قیمت کا دار و مدار امالہ گیر کی شکل، جسامت اور مقناطیسی مستقل پر ہے۔

امالہ سمجھنے کی خاطر ارتباط بہاؤ³⁸ کا ذکر ضروری ہے۔ تصور کریں کہ N چکر لالچھا جس میں I برقی رو گزر رہا ہے

capacitor³³
inductor³⁴
Henry³⁵
inductor³⁶
inductance³⁷
flux linkage³⁸

کل Φ مقناطیسی بہاؤ پیدا کرتا ہے۔ تصور کریں کہ Φ ان تمام N چکر سے گزرتی ہے۔ یوں تمام کا تمام مقناطیسی بہاؤ ہر چکر سے گزرتی ہے۔ یوں پہلے چکر سے Φ بہاؤ گزرتی ہے، دوسرے چکر سے بھی Φ بہاؤ گزرتی ہے اور اسی طرح بقایا ہر چکر سے بھی اتنی ہی بہاؤ گزرتی ہے۔ ارتباط بہاؤ سے مراد $N\Phi$ ہے یعنی تمام چکر سے گزرتی بہاؤ کا مجموعہ۔

ارتباط بہاؤ اور برقی رو کی شرح کو امالہ کہا جاتا ہے۔ اگر ارتباط بہاؤ اسی برقی رو سے پیدا ہو تب ان کی شرح کو خود امالہ³⁹ کہتے ہیں جسے عموماً چھوٹا کر کے صرف امالہ پکارا جاتا ہے۔ اس کے برعکس اگر برقی رو ایک تار میں ہو اور ارتباط بہاؤ دوسری تار کی ہو تب ان کی شرح کو مشترکہ امالہ⁴⁰ کہتے ہیں۔ اس حصے میں خود امالہ پر ہی غور کیا جائے گا۔ اگلے حصے میں مشترکہ امالہ پر غور کیا جائے گا۔

$$(8.66) \quad L = \frac{N\Phi}{I}$$

اس مساوات میں تصور کیا گیا ہے کہ پورا مقناطیسی بہاؤ تمام چکر سے گزرتی ہے۔ امالہ کی یہ تعریف صفر خطی مقناطیسی اشیاء کے لئے معنی رکھتی ہے۔ خطی مقناطیسی اشیاء سے مراد ایسے مقناطیسی اشیاء ہیں جن میں مقناطیسی بہاؤ اور برقی رو راست تناسب کا تعلق رکھتے ہیں۔ فولادی مقناطیسی اشیاء میں مقناطیسی چال کی بنا پر امالہ کی کوئی ایک تعریف تمام موقعوں کے لئے کارآمد ثابت نہیں ہوتا۔ ہم خطی مقناطیسی اشیاء تک ہی بحث کو محدود رکھیں گے۔

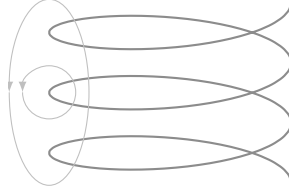
آئیں ہم محوری تار کے اکائی لمبائی کی امالہ حاصل کریں۔ صفحہ 287 پر مساوات 7.13

$$H_{\phi} = \frac{I}{2\pi\rho} \quad (\rho_1 < \rho < \rho_2)$$

ہم محوری تار میں تاروں کے درمیانی خطے میں مقناطیسی شدت دیتا ہے جسے استعمال کرتے ہوئے اس خطے میں z_0 لمبائی پر کل مقناطیسی بہاؤ

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_S B_{\phi} dS \\ &= \int_0^{z_0} \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{\mu I d\rho dz}{2\pi\rho} \\ &= \frac{\mu I z_0}{2\pi} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1} \end{aligned}$$

self inductance³⁹
mutual inductance⁴⁰



شکل 8.10: متعدد چکر کے لچھے میں ہر چکر سے گزرتی مقناطیسی بہاؤ مختلف ہو سکتی ہے۔

حاصل کیا جا سکتا ہے۔ یہ مقناطیسی بہاؤ دونوں تاروں کے درمیان خطے میں اندرونی تار کے گرد گھومتی ہے لہذا مکمل میں کسی بھی زاویہ پر z_0 لمبی ρ_1 تا ρ_2 رداسی سطح لی جا سکتی ہے۔ یوں اکائی لمبائی پر ہم محوری تار کی امالہ

$$(8.67) \quad L = \frac{\mu I}{2\pi} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

ہو گی۔ یہاں $N = 1$ یعنی ایک ہی چکر ہے اور تمام کا تمام مقناطیسی بہاؤ پورے برقی رو کے گرد چکر کاٹتی ہے۔

اب تصور کریں کہ پیچدار لچھے کی امالہ درکار ہو جسے شکل 8.10 میں دکھایا گیا ہے۔ ایسے لچھے کے پہلے چکر کا پورا بہاؤ پہلے چکر سے گزرتی ہے البتہ اس کا کچھ ہی حصہ دوسرے یا تیسرے چکر سے گزرتی ہے۔ یہی کچھ بقایا چکر کے بارے میں بھی کہا جا سکتا ہے۔ ایسی صورت میں لچھے کی ارتباط بہاؤ حاصل کرنے کی خاطر ہر چکر سے گزرتی انفرادی بہاؤ لیتے ہوئے تمام کا مجموعہ حاصل کیا جائے گا یعنی

$$\text{ارتباط بہاؤ} = \Phi_1 + \Phi_2 + \dots + \Phi_N = \sum_{i=1}^N \Phi_i$$

آئیں اب امالہ کی عمومی مساوات حاصل کریں۔

کسی بھی بند راہ پر یک سمتی برقی رو I گزرنے سے کثافت مقناطیسی بہاؤ B

$$B = \nabla \times A$$

پیدا ہوتی ہے جہاں A سمتی مقناطیسی دباؤ ہے جسے

$$A = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{dL}{R}$$

سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ ایسی بند راہ S کو گھیرتی ہے جس میں سے گزرتی کل مقناطیسی بہاؤ Φ کو مکمل

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ اس مکمل میں B پر کرنے سے

$$\Phi = \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S}$$

حاصل ہوتا ہے۔ مسئلہ بايوٹ سیوارٹ کی مدد سے اسے

$$\Phi = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{L}$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں بند مکمل سطح کے سرحد یعنی برقی رو گزارتے بند راہ پر حاصل کیا جائے گا۔ اس مساوات میں A پر کرنے سے

$$\Phi = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \left(\oint \frac{d\mathbf{L}}{R} \right) \cdot d\mathbf{L}$$

حاصل ہوتا ہے۔ یوں امالہ کی عمومی مساوات

$$(8.68) \quad L = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \left(\oint \frac{d\mathbf{L}}{R} \right) \cdot d\mathbf{L}$$

حاصل ہوتی ہے۔ یہاں مکمل کے اندر L فاصلے کو ظاہر کرتی ہے جبکہ مساوات کے بائیں ہاتھ یہی علامت امالہ کو ظاہر کرتی ہے۔

امالہ کی مساوات سے ظاہر ہے کہ امالہ کی قیمت کا دار و مدار صرف اور صرف تار یا لچھے کی شکل و جسامت اور مقناطیسی مستقل پر منحصر ہے۔

امالہ کی مساوات حاصل کرنے کی خاطر سطحی مکمل لیا گیا۔ ایک چکر کے بند راہ جس سطح کو گھیرتی ہے، اس کی شکل ذہن میں آسانی سے بن جاتی ہے البتہ پیچدار لچھا جس سطح کو گھیرتا ہے اس کی شکل ذہن میں ذرا مشکل⁴¹ سے بنتی ہے۔ سطحی مکمل لیتے وقت ایسی تمام ممکنہ سطح استعمال کی جاسکتی ہیں جن کا سرحد پیچدار لچھے کی تار ہو۔

⁴¹ آپ لچھے کے محور پر سلاخ تصور کرتے ہوئے اس کے گرد گول گھومتی اور اوپر جاتی سطح تصور کر سکتے ہیں۔

برقی رو گزارتے تار کی رداس صفر کرنے سے بايوٹ سيوارٹ کے قانون کے تحت لامحدود کثافت مقناطیسی بہاو حاصل ہو گی جس سے لامحدود توانائی اور لامحدود امالہ حاصل ہوتا ہے۔ حقیقت میں قابل استعمال جوابات حاصل کرنے کی خاطر تار کے رداس چھوٹا ضرور لیکن صفر کبھی تصور نہیں کیا جاتا۔

کسی بھی برقی رو گزارتے تار کے اندر بھی زاویائی مقناطیسی بہاو پایا جاتا ہے۔ تار کے محور کے قریب گھومتی اندرونی بہاو کم برقی رو کو گھیرتی ہے جبکہ محور سے دور زاویائی اندرونی بہاو زیادہ برقی رو گھیرتی ہے۔ جیسا آپ اگلے بابوں میں پڑھیں گے، زیادہ تعدد پر تار کے بیرونی سطح کے قریب زیادہ برقی رو گزرتی ہے لہذا زیادہ تعدد پر تار کی اندرونی امالہ کا کردار قابل نظر انداز ہوتا ہے البتہ کم تعدد پر اس کا حساب رکھنا ضروری ہوتا ہے۔

مثال 8.7: محوری تار میں اندرونی تار کا رداس ρ_1 جبکہ بیرونی تار کا رداس ρ_2 ہے۔ ان تاروں کے درمیان خطہ $0 < \phi < 90^\circ$ میں $\mu_R = 2$ مقناطیسی مستقل کا ذو برق بھرا گیا ہے جبکہ بقایا خطہ خالی خلاء پر مشتمل ہے۔ تاروں کے درمیان خطے میں مقناطیسی بہاو حاصل کرتے ہوئے فی میٹر تار کی امالہ حاصل کریں۔

حل: ایمپیرس کا قانون استعمال کرتے ہوئے تاروں کے درمیان میدان حاصل کرتے ہیں۔ اندرونی تار میں برقی رو I تصور کرتے ہوئے تاروں کے درمیان میدان a_ϕ سمت میں پیدا ہو گا۔ ذو برق اور خالی خلاء کے سطح پر میدان عمودی ہے۔ مساوات 8.40

$$B_{n1} = B_{n2}$$

کے تحت دو ذو برق کے ملاپ پر مقناطیسی میدان کا عمودی جزو بے جوڑ ہوتا ہے۔ یوں ہم محوری تار میں ذو برق کی سرحد پر B_ϕ بے جوڑ ہو گا۔ یوں رداس ρ پر خالی خلاء اور ذو برق میں یکساں B_ϕ پایا جائے گا۔ اس طرح خالی خلاء میں $H_\phi = \frac{B_\phi}{\mu_0}$ ہو گا جبکہ ذو برق میں $H_\phi = \frac{B_\phi}{\mu_R \mu_0}$ ہو گا۔ اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے ایمپیرس کے قانون کو یوں لکھا جا سکتا ہے

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = \frac{B_\phi}{\mu_R \mu_0} \frac{\pi}{2} \rho + \frac{B_\phi}{\mu_0} \frac{3\pi}{2} \rho = I$$

جس سے

$$\mathbf{B} = \frac{2\mu_0 I}{\pi \rho \left(\frac{1}{\mu_R} + 3 \right)} \mathbf{a}_\phi$$

حاصل ہوتا ہے۔ یوں فی میٹر لمبائی لیتے ہوئے دونوں تاروں کے درمیان مقناطیسی بہاؤ

$$\begin{aligned}\Phi &= \int_0^1 \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{2\mu_0 I}{\pi \rho \left(\frac{1}{\mu_R} + 3\right)} d\rho dz \\ &= \frac{2\mu_0 I}{\pi \left(\frac{1}{\mu_R} + 3\right)} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}\end{aligned}$$

ہو گا جس سے امالہ

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{2\mu_0}{\pi \left(\frac{1}{\mu_R} + 3\right)} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

حاصل ہوتی ہے۔

مثال 8.8: لا محدود لمبائی کے تار کی اندرونی امالہ حاصل کریں۔

حل: رداس ρ_1 کے تار کو z محدود پر تصور کرتے ہیں۔ تار میں کثافت برقی رو یکساں تصور کرتے ہوئے $J = \frac{I}{\pi \rho_1^2}$ حاصل ہوتا ہے۔ رداس ρ پر گول دائرہ $\frac{I\rho^2}{\rho_1^2}$ برقی رو گھیرتا ہے لہذا امپیر کے دوری قانون کے تحت اس دائرے پر زاویائی شدت $H_\phi = \frac{I\rho}{2\pi\rho_1^2}$ ہوگی۔ رداس ρ پر $d\rho$ چوڑائی اور z_0 لمبائی کی مستطیل سطح سے

$$d\Phi = B_\phi z_0 d\rho = \mu H_\phi z_0 d\rho$$

بہاؤ گزرے گی۔ اگر تار کو متعدد باریک متوازی تاروں کا مجموعہ تصور کیا جائے تو مندرجہ بالا تفرقی بہاؤ صفر ρ کے اندر تاروں کو گھیرتی ہے جو ایک چکر کا صرف $\frac{\rho^2}{\rho_1^2}$ حصہ ہیں لہذا یہ تفرقی بہاؤ صرف

$$\text{تفرقی بہاؤ} = \frac{\rho^2}{\rho_1^2} d\Phi = \frac{\rho^2}{\rho_1^2} \mu H_\phi z_0 d\rho = \frac{\mu I z_0}{2\pi \rho_1^4} \rho^3 d\rho$$

دیتی ہے۔ اگر تفرقی بہاؤ تمام فرضی باریک تاروں کو گھیرتی تب یہ ایک چکر شمار ہوتا۔ یوں مکمل سے اندرونی ارتباط بہاؤ

$$\text{ارتباط بہاؤ} = \int_0^{\rho_1} \frac{\mu I z_0}{2\pi \rho^4} \rho^3 d\rho = \frac{\mu I z_0}{8\pi}$$

حاصل ہوتی ہے جس سے اندرونی امالہ

$$L_{\text{اندرونی}} = \frac{\mu z_0}{8\pi}$$

یانی میٹر امالہ

$$(8.69) \quad L_{\text{اندرونی فی میٹر}} = \frac{\mu}{8\pi}$$

حاصل ہوتی ہے۔

مشق 8.2: صفحہ 286 میں ہم محوری تار دکھائی گئی ہے۔ بیرونی تار کی اندرونی امالہ حاصل کریں۔

جوابات: تار کی لمبائی z_0 لیتے ہوئے

$$I_{\text{گہر}} = \left(\frac{\rho_3^2 - \rho^2}{\rho_3^2 - \rho_2^2} \right) I$$

$$H_\phi = \frac{I}{2\pi\rho} \left(\frac{\rho_3^2 - \rho^2}{\rho_3^2 - \rho_2^2} \right)$$

$$d\Phi = \mu H_\phi z_0 d\rho$$

حاصل ہوتا ہے۔ یہ تفرقی بہاؤ ایک چکر کے $\frac{\rho_3^2 - \rho^2}{\rho_3^2 - \rho_2^2}$ حصے کے گرد گھومتی ہے لہذا تفرقی ارتباط بہاؤ

$$\text{تفرقی ارتباط بہاؤ} = \frac{\mu I z_0}{2\pi\rho} \left(\frac{\rho_3^2 - \rho^2}{\rho_3^2 - \rho_2^2} \right)^2 d\rho$$

اور یوں $z_0 = 1$ پر کرتے ہوئے فی میٹر امالہ

$$(8.70) \quad L_{\text{فی مٹر}} = \frac{\mu}{2\pi (\rho_3^2 - \rho_2^2)^2} \left(\rho_3^4 \ln \frac{\rho_3}{\rho_2} - \frac{\rho_2^4}{4} - \frac{3\rho_3^4}{4} + \rho_2^2 \rho_3^2 \right)$$

حاصل ہوتی ہے۔

مساوات 8.69 ہی ہم محوری تار کے اندرونی تار کی امالہ دیتا ہے۔ یوں کم تعدد پر مساوات 8.67، مساوات 8.69 اور مساوات 8.70 کا مجموعہ

$$(8.71) \quad L = \frac{\mu I}{2\pi} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1} + \frac{\mu}{8\pi} + \frac{\mu}{2\pi (\rho_3^2 - \rho_2^2)^2} \left(\rho_3^4 \ln \frac{\rho_3}{\rho_2} - \frac{\rho_2^4}{4} - \frac{3\rho_3^4}{4} + \rho_2^2 \rho_3^2 \right)$$

فی میٹر ہم محوری تار کا کل امالہ ہو گا۔ جیسے اگلے بابوں میں بتلایا جائے گا، بلند تعدد پر تار میں کثافت برقی رویاں نہیں رہتی جس کی وجہ سے تار کی اندرونی امالہ قابل نظر انداز ہو جاتی ہے۔ یوں بلند تعدد پر مساوات 8.67 ہی فی میٹر تار کی امالہ دے گا۔

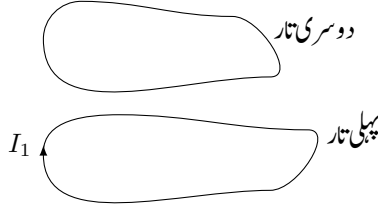
آپ امالہ کے مخفی توانائی

$$(8.72) \quad W = \frac{LI^2}{2}$$

سے بخوبی واقف ہیں جہاں مخفی توانائی مساوات 8.63، مساوات 8.64 یا مساوات 8.65 سے حاصل کی جاسکتی ہے۔ انہیں استعمال کرتے ہوئے امالہ یوں بھی حاصل کی جاسکتی ہے۔

$$(8.73) \quad \begin{aligned} L &= \frac{2W}{I^2} = \frac{1}{I^2} \int_h \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \, dh \\ &= \frac{1}{I^2} \int_h \mu H^2 \, dh \\ &= \frac{1}{I^2} \int_h \frac{B^2}{\mu} \, dh \end{aligned}$$

آپ سے مندرجہ بالا مساوات استعمال کرتے ہوئے، سوال 8.26 میں لامحدود لمبائی کے سیدھی تار کی امالہ اور سوال 8.27 میں ہم محوری تار کے بیرونی تار کی اندرونی امالہ حاصل کرنے کو کہا گیا ہے۔



شکل 8.11: مشترکہ امالہ۔

8.11 مشترکہ امالہ

شکل 8.11 میں دو تار دکھائے گئے ہیں۔ انہیں پہلی تار میں برقی رو I سے پیدا مقناطیسی بہاؤ کا وہ حصہ حاصل کریں جو دوسرے تار سے گزرتا ہے۔ ان معلومات سے دونوں تاروں کے مابین مشترکہ امالہ⁴² حاصل کیا جائے گا۔ خود امالہ حاصل کرنے کے طرز پر دوسرے تار سے گزرتی بہاؤ کو

$$\Phi_2 = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint \left(\oint \frac{d\mathbf{L}_1}{R} \right) \cdot d\mathbf{L}_2$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں اندرونی تکمیل پہلی تار پر ہے اور یہ کسی بھی نقطے پر مقناطیسی میدان دیتا ہے جبکہ دوسری تکمیل دوسرے تار پر ہے جس میں سے گزرتی بہاؤ کا حصول درکار ہے۔ مشترکہ امالہ M_{21} کی تعریف

$$(8.74) \quad M_{21} = \frac{\Phi_2}{I_1}$$

ہے جس سے

$$(8.75) \quad M_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \left(\oint \frac{d\mathbf{L}_1}{R} \right) \cdot d\mathbf{L}_2$$

حاصل ہوتا ہے۔

اگر دوسری تار میں برقی رولی جاتی اور پہلی سے گزرتی بہاؤ حاصل کی جاتی تب

$$(8.76) \quad M_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \left(\oint \frac{d\mathbf{L}_2}{R} \right) \cdot d\mathbf{L}_1$$

⁴²mutual inductance

حاصل ہوتا۔ مندرجہ بالا دو درجی تکمیل میں اندرونی تکمیل دوسری راہ پر ہے جبکہ بیرونی تکمیل پہلی راہ پر ہے۔ تکمیل لینے کی ترتیب بدلتے ہوئے اگر پہلا تکمیل پہلی راہ پر لیا جائے اور بعد میں دوسری راہ پر تکمیل لیا جائے تو تکمیل کی قیمت میں کوئی تبدیلی رونما نہیں ہوگی لیکن ایسا کرنے سے ہمیں ہو بہو مساوات 8.75 ملتا ہے لہذا

$$(8.77) \quad M_{21} = M_{12}$$

حاصل ہوتا ہے۔ یہ انتہائی اہم نتیجہ ہے جس کے تحت کسی بھی دو لچھوں کے درمیان مشترکہ امالہ دونوں جانب سے برابر حاصل ہوتی ہے۔

سوالات

سوال 8.1: میدان $E = 1.5a_z \frac{V}{m}$ میں الیکٹران حرکت کرتا ہے۔ لمحہ $t = 0$ پر الیکٹران نقطہ $(0, 0, 0)$ پر پایا جاتا ہے جبکہ اس کی سمتی رفتار $v = 3 \times 10^5 a_x \frac{m}{s}$ ہے۔ الیکٹران کا بار $-1.6 \times 10^{-19} C$ اور اس کی کمیت $3.1 \times 10^{-31} kg$ ہے۔ نیوٹن کے قوانین حرکت سے تفرقی مساوات لکھ کر اسے حل کرتے ہوئے لمحہ $t = 150 ns$ پر الیکٹران کی سمتی رفتار، مقام اور حرکی توانائی دریافت کریں۔

جوابات: $v = 300000a_x - 116129a_z \frac{m}{s}$ ، $(0.045, 0, -3.48)$ ، $1.63 \times 10^{-20} J$

سوال 8.2: مقناطیسی میدان $B = 0.3a_x - 0.2a_y - 0.4a_z T$ میں لمحہ $t = 0$ پر الیکٹران کی سمتی رفتار $v = 10^6 a_z \frac{m}{s}$ ہے۔ الیکٹران پر قوت دریافت کریں۔ ایسا برقی میدان حاصل کریں جس کی موجودگی میں مقناطیسی اور برقی میدان مل کر اس الیکٹران پر صفر قوت پیدا کرتے ہیں۔

جواب: $E = -200a_x - 300a_y \frac{V}{m}$ ، $F = -32a_x - 48a_y fN$

سوال 8.3: میدان $B = 2a_x - 1a_y + 3a_z T$ اور $E = 3a_x + 2a_y - 1a_z \frac{V}{m}$ میں بار $1.2 \mu C$ حرکت کر رہا ہے۔ لمحہ $t = 0$ پر اس کی رفتار $v = 10a_x - 30a_y + 20a_z \frac{km}{s}$ ہے۔ یہ بار $5 \mu g$ کے کمیت پر پایا جاتا ہے۔ لمحہ $t = 0$ پر بار کی اسراع حاصل کریں۔

جواب: $a = -16.8a_x + 2.4a_y + 12a_z \frac{Mm}{s^2}$

سوال 8.4: محدود z پر پڑی لامحدود لمبائی کے تار میں $5a_z A$ برقی رو گزر رہی ہے۔ اس کے قریب سطح $x = 0$ پر موصل تار $N_1(0, 1, 0)$ ، $N_2(0, 4, 0)$ ، $N_3(0, 4, 2)$ اور $N_4(0, 1, 2)$ نقطوں کو جوڑ کر مستطیل بناتی ہے جس میں N_1 سے N_2 جانب $2 A$ برقی رو چکر لگا رہی ہے۔ چکور کے چاروں اطراف پر قوت دریافت کرتے ہوئے پورے چکور پر قوت حاصل کریں۔

جوابات: تار $N_1(0, 1, 0)$ تا $N_2(0, 4, 0)$ پر قوت $2.77a_z \mu N$ ہے۔ یہاں سے گھڑی کے الٹ سمت چلتے ہوئے بقایا قوت $-1a_y \mu N$ ، $-2.77a_z \mu N$ اور $4a_y \mu N$ ہیں۔ یوں مستطیل پر کل قوت $3a_y \mu N$ ہے۔

سوال 8.5: محدود z پر پڑی لامحدود لمبائی کے تار میں $10a_z A$ برقی رو گزر رہی ہے۔ اس کے قریب نقطہ $N_1(2, 1, 3)$ سے $N_2(5, 4, 7)$ تک سیدھی موصل تار میں N_1 سے N_2 جانب $4 A$ برقی رو گزر رہی ہے۔ چھوٹی تار پر قوت حاصل کریں۔

جواب: $F = -6.74a_x - 4.49a_y + 8.42a_z \mu\text{N}$

سوال 8.6: سطح $x = 0$ پر مقناطیسی میدان کا جزو $B_z = \frac{200}{z^2+1} \mu\text{T}$ پایا جاتا ہے۔ اس مقناطیسی جزو سے خطہ $1 < y < 3$ ، $-\infty < z < \infty$ میں کثافت $K = 0.2a_y \frac{\text{A}}{\text{m}}$ پر قوت حاصل کریں۔

جواب: $251a_x \mu\text{N}$

سوال 8.7: z محدد پر پڑی لامحدود لمبائی کے تار میں 2.2 A برقی رو پائی جاتی ہے۔ سطح $y = 0$ پر خطہ $1 \text{ mm} < x < 5 \text{ mm}$ پر a_z سمت میں کل 8 A برقی رو گزر رہی ہے۔ اس خطے کی فی میٹر لمبائی پر مقناطیسی قوت حاصل کریں۔ محدد z پر پڑی تار پر بھی فی میٹر قوت حاصل کریں۔

جواب: $1.4a_x \text{ mN}$ ، $-1.4a_x \text{ mN}$

سوال 8.8: محدد z پر پڑی لامحدود لمبائی کی تار میں I_1 برقی رو a_z جانب گزر رہی ہے۔ اس کے قریب سطح $z = 0$ پر تار $y = a$ ، $-b < x < b$ میں I_2 برقی رو a_x سمت میں گزر رہی ہے۔ نقطہ $(0, 0, 0)$ کو محور لیتے ہوئے چھوٹی تار پر مروڑ حاصل کریں۔ صفحہ 367 پر شکل 8.6 میں صورت حال دکھایا گیا ہے۔

جواب: $-\frac{I_1 I_2 \mu_0}{\pi} \left(b - a \tan^{-1} \frac{b}{a} \right) a_y \text{ N m}$

سوال 8.9: موصل تار نقطہ $N_1(2, 0, 0)$ ، $N_2(5, 0, 0)$ ، $N_3(5, 0, 4)$ اور $N_4(2, 0, 4)$ کو جوڑ کر مستطیل بناتی ہے۔ مثبت y محدد کی جانب سے دیکھتے ہوئے، اس مستطیل میں 6 A برقی رو سمت گھڑی گردش کر رہی ہے۔ الف) یکساں میدان $B = 5a_x \text{ T}$ کی صورت میں z محدد کو محور لیتے ہوئے مستطیل کے چاروں اطراف پر علیحدہ علیحدہ مروڑ حاصل کرتے ہوئے کل مروڑ حاصل کریں۔ ب) سطح $y = 0$ پر لکیر $x = 3$ کو محور لیتے ہوئے اسی یکساں میدان میں دوبارہ مروڑ حاصل کریں۔

جوابات: الف) اور ب): مستطیل کے چار حصوں پر مروڑ 0 ، $600a_z \text{ N m}$ ، 0 اور $-240a_z \text{ N m}$ ہے۔ یوں کل مروڑ $360a_z \text{ N m}$ حاصل ہوتا ہے۔

سوال 8.10: سوال 8.9 میں میدان یکساں ہے لہذا اس میں محور کا مروڑ پر کوئی اثر نہیں ہوتا۔ ایسی صورت میں مروڑ صفحہ 366 پر دئے مساوات 8.23 کی مدد سے حاصل کی جاسکتی ہے۔ ایسا ہی کریں۔

جواب: $360a_z \text{ N m}$

سوال 8.11: سوال 8.9 میں یکساں میدان کی جگہ اگر z محور پر لامحدود لمبائی کے تار میں a_z جانب 25 A برقی رو میدان پیدا کرے تب محدود کے مرکز $(0, 0, 0)$ کو محور لیتے ہوئے مروڑ حاصل کریں۔ یاد رہے کہ یہ میدان غیر یکساں ہے لہذا مساوات 8.23 قابل استعمال نہیں ہے۔

جواب: مستطیل کے چار حصوں پر مروڑ $-90a_y \mu\text{N m}$ ، $-48a_y \mu\text{N m}$ ، $90a_y \mu\text{N m}$ اور $120a_y \mu\text{N m}$ ہے جس سے کل مروڑ $72a_y \mu\text{N m}$ حاصل ہوتا ہے۔

سوال 8.12: دو سنٹی میٹر رداس اور پانچ سو پیکر کے بیچ دار لچھے میں 3 A کی برقی رو گزر رہی ہے۔ یہ لچھا 1.5 T کے میدان میں پایا جاتا ہے۔ میدان اور لچھے کے محور آپس میں عمودی ہیں۔ لچھے پر مروڑ حاصل کریں۔

جواب: 2.83 N m

سوال 8.13: ایک مادہ میدان $B = 0.15za_y \text{ T}$ میں پایا جاتا ہے۔ اس مادے کی $\chi = 2.5$ ہے۔ آپ سے گزارش ہے کہ μ_R ، H ، M ، J ، J_m اور J_T حاصل کریں۔

جوابات: $\mu_R = 3.5$ ، $H = 34.1za_y \frac{\text{kA}}{\text{m}}$ ، $M = 85.3za_y \frac{\text{kA}}{\text{m}}$ ، $J = -34.1a_x \frac{\text{kA}}{\text{m}^2}$ ، $J_m = -85.3a_x \frac{\text{kA}}{\text{m}^2}$ اور $J_T = -119a_x \frac{\text{kA}}{\text{m}^2}$

سوال 8.14: مندرجہ ذیل مادوں میں H حاصل کریں۔ الف) جزوی مقناطیسی مستقل $\mu_R = 2.2$ ، ایٹم کی تعدادی کثافت 1.5×10^{29} ایٹم فی مکعب میٹر جبکہ ہر ایٹم کا مقناطیسی جفت قطب $1.9 \times 10^{-30} a_x \frac{\text{A}}{\text{m}^2}$ ہے۔ ب) مادہ میں $M = 160a_z \frac{\text{A}}{\text{m}}$ اور اس کا مقناطیسی مستقل $\mu = 2.25 \frac{\mu\text{H}}{\text{m}}$ ہے۔ پ) مادے کا $\chi_m = 0.65$ ہے جبکہ $B = 1.7a_y \text{ T}$ ہے۔ ت) مساوات $\oint M \cdot dL = I_m$ کا استعمال کرتے ہوئے ایسے خطے میں M حاصل کریں جس میں نکلے سطح $\rho = 0.5 \text{ m}$ پر $5a_z \frac{\text{A}}{\text{m}}$ اور نکلے سطح $\rho = 2.5 \text{ m}$ پر $-1a_z \frac{\text{A}}{\text{m}}$ کثافت برقی رو پائی جاتی ہو۔

جوابات: $0.24a_x \frac{\text{A}}{\text{m}}$ ، $202a_z \frac{\text{A}}{\text{m}}$ ، $820a_y \frac{\text{kA}}{\text{m}}$ ، $\rho < 0.5 \text{ m}$ اور $\rho > 1 \text{ m}$ خطوں میں $M = 0$ ہے جبکہ $0.5 < \rho < 2.5$ میں $M = \frac{2.5}{\rho} a_\phi \frac{\text{A}}{\text{m}}$ ہوگا۔

سوال 8.15: مندرجہ ذیل صورتوں میں مقناطیسیہ M کی قیمت حاصل کریں۔ الف) میدان $B = 0.015 \text{ T}$ اور $\chi_m = 0.002$ ہیں۔ ب) مقناطیسی شدت $H = 1600 \frac{\text{A}}{\text{m}}$ جبکہ مقناطیسی جزوی مستقل $\mu_R = 1.004$ ہے۔ پ) ایٹم کی تعدادی کثافت 6.5×10^{28} ایٹم فی مکعب میٹر ہے جبکہ ایک ایٹم کی مقناطیسی جفت قطب 3×10^{-30} ہے۔ تمام جفت قطب ایک ہی سمت میں ہیں۔

جوابات: $M = 23.8 \frac{\text{A}}{\text{m}}$ ، $6.4 \frac{\text{A}}{\text{m}}$ ، $0.195 \frac{\text{A}}{\text{m}}$

سوال 8.16: خطہ-1 کو مساوات $2x^2 + 3y - 4xz < 3$ ظاہر کرتی ہے جبکہ اس کی دوسری جانب خطہ-2 پایا جاتا ہے۔ ان کے جزوی مقناطیسی مستقل $\mu_{R1} = 1$ اور $\mu_{R2} = 2.2$ ہیں۔ نقطہ $N(2, 1, 1)$ پر پہلے خطے سے دوسرے خطے کی جانب اکائی سمتیہ حاصل کریں۔ اس نقطے پر پہلے خطے میں میدان $H = 15a_x - 5a_y - 10a_z$ ہے۔ دونوں خطوں میں اس نقطے پر میدان کے عمودی اور متوازی اجزاء حاصل کریں۔ سرحد کے عمود کے ساتھ دونوں خطوں میں میدان کا زاویہ حاصل کریں۔

جوابات: $a_N = 0.42a_x + 0.32a_y - 0.85a_z$ ، $H_{n1} = 5.6a_x + 4.2a_y - 11.2a_z$ ،
 $H_{m1} = 9.4a_x - 9.2a_y + 1.2a_z$ ، $H_{m2} = 9.4a_x - 9.2a_y + 1.2a_z$ ،
 $H_{n2} = 2.6a_x + 1.9a_y - 5.1a_z$ ، $H_2 = 11.9a_x - 7.3a_y - 3.9a_z$ ،
 $\theta_2 = 65.5^\circ$ ، $\theta_1 = 44.9^\circ$

سوال 8.17: $z < 0$ کو خطہ-الف، $0 < z < 2$ کو خطہ-ب، $2 < z < 3$ کو خطہ-پ جبکہ $z < 3$ کو خطہ-ت تصور کریں۔ خطہ-الف اور خطہ-ت خالی خلاء ہیں۔ خطہ-ب کا $\mu_R = 2.5$ جبکہ خطہ-پ کا $\mu_R = 1.5$ ہے۔ خطہ-الف میں میدان $H_1 = 3a_x - 2a_y + 5a_z$ پایا جاتا ہے۔ خطہ-الف، ب، پ اور ت میں میدان اور z محدد کے مابین زاویے حاصل کریں۔

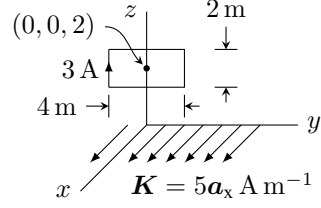
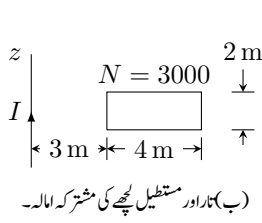
جوابات: 35.8° ، 61° ، 47.2° ، 35.8°

سوال 8.18: ایک لمبے بیچ دار لچھے کا رداس 5 cm اور فی میٹر پیکر 4000 ہیں۔ لچھے میں 100 mA برقی رو گزر رہی ہے۔ خطہ $\rho < a$ کا $\mu_R = 2.5$ ہے جبکہ بقایا خطے کا $\mu_R = 4.5$ ہے۔ الف) لچھے میں کل مقناطیسی بہاؤ $10 \mu\text{Wb}$ ہونے کی صورت میں a کی قیمت حاصل کریں۔ ب) دونوں خطوں میں برابر مقناطیسی بہاؤ کی صورت میں a کی قیمت اور کل بہاؤ حاصل کریں۔

جوابات: 4.96 cm ، 4 cm ، $12.7 \mu\text{Wb}$

سوال 8.19: شکل 8.12-الف میں $z = 0$ سطح پر سطحی کثافت برقی رو $5a_y \frac{\text{A}}{\text{m}}$ پائی جاتی ہے۔ سطح $x = 0$ پر مستطیل دائرے میں 3 A کی برقی رو گزر رہی ہے۔ محور کو $(0, 0, 2)$ اور $(0, 0, 0)$ لیتے ہوئے تار پر مروڑ حاصل کریں۔

جوابات: $T = 75.4a_z \mu\text{N m}$ ، $T = 75.4a_z \mu\text{N m}$



(ا) سطحی کشافت برقی رو کے میدان میں بند دائرے پر مردہ۔

شکل 8.12: سوال 8.19 اور سوال 8.23 کے اشکال۔

سوال 8.20: رداس 5 cm کے لمبے پتھر لچھے میں فی میٹر 8000 چکر پائے جاتے ہیں۔ لچھے میں 1.2 mA برقی رو گزر رہی ہے۔ فی میٹر لچھے میں توانائی W حاصل کریں۔ مساوات $W = \frac{LI^2}{2}$ استعمال کرتے ہوئے فی میٹر لچھے کی امالہ حاصل کریں۔

جوابات: $0.631 \frac{H}{m}$ ، $0.45 \frac{mJ}{m}$

سوال 8.21: دو لامحدود لمبائی کے چادر متوازی پڑے ہیں۔ ان چادروں پر کشافت برقی رو $150a_y \frac{A}{m}$ اور $-150a_y \frac{A}{m}$ ہے۔ چادروں کے درمیان لمبا پتھر لچھا پایا جاتا ہے۔ اس لچھے پر 5000 چکر فی میٹر پائے جاتے ہیں جبکہ اس میں 6 mA برقی رو گزر رہی ہے۔ لچھے کا رداس 8 cm ہے اور اس کا محور a_y سمت میں ہے۔ مندرجہ ذیل صورتوں میں لچھے کے فی میٹر لمبائی میں کل توانائی حاصل کریں۔ (الف) صرف چادروں میں کشافت برقی رو پائی جاتی ہے۔ (ب) صرف لچھے میں برقی رو پائی جاتی ہے۔ (پ) چادروں میں کشافت برقی رو اور لچھے میں برقی رو پائی جاتی ہے۔

جوابات: $296 \mu J$ ، $11.4 \mu J$ ، $284 \mu J$

سوال 8.22: سطح $x = 0$ اور $x = d$ پر بالترتیب $Kaz \frac{A}{m}$ اور $-Kaz \frac{A}{m}$ کشافت برقی رو پائی جاتی ہے۔ سطحوں کے درمیان مقناطیسی میدان H حاصل کریں۔ چادروں کے درمیان خط $0 < y < w$ ، $0 < z < z_0$ میں توانائی W حاصل کریں۔ مساوات $W = \frac{LI^2}{2}$ استعمال کرتے ہوئے $0 < y < w$ چوڑائی کی فی میٹر امالہ حاصل کریں جہاں I کسی ایک چادر کے $0 < y < w$ چوڑائی میں کل برقی رو ہے۔ سطح $y = 0$ پر چادروں کے درمیان خط $0 < z < z_0$ سے گزرتی کل مقناطیسی بہا ϕ حاصل کریں۔ مساوات $\phi = LI$ استعمال کرتے ہوئے فی میٹر امالہ حاصل کریں۔

$$L = \frac{\mu_0 d}{w} \frac{H}{m} \text{ ، } \phi = \mu_0 K d z_0 \text{ ، } L = \frac{\mu_0 d}{w} \frac{H}{m} \text{ ، } W = \frac{\mu_0}{2} d K^2 w z_0 J \text{ ، } K a y \frac{A}{m} \text{ : جوابات}$$

سوال 8.23: شکل 8.12-ب میں z محدود پر پڑی لامحدود لمبائی کے تار میں برقی رو I گزر رہی ہے۔ تار کے میدان میں 3000 چکر کا مستطیل لچھا پایا جاتا ہے۔ ان کا مشترکہ امالہ حاصل کریں۔ اگر مستطیل کو تین میٹر کے بجائے 3 mm فاصلے پر رکھا جائے تب مشترکہ امالہ کیا حاصل ہو گا۔

$$\text{جواب: } 1.02 \text{ mH} \text{ ، } 8.6 \text{ mH}$$

سوال 8.24: محدود لمبائی کا تار پایا جاتا ہے۔ سطح $x = 0$ پر ایک چکر کا مربع لچھا پایا جاتا ہے جس کا ایک طرف z محدود کے متوازی اور اس سے 1 m فاصلے پر ہے۔ مربع کے اطراف 2 m لمبے ہیں۔ تار اور لچھے کے مابین مشترکہ امالہ M حاصل کریں۔ اگر لچھے کو $x = 0$ سطح میں رکھتے ہوئے، 45° گھمایا جائے تب مشترکہ امالہ کیا ہو گا۔

$$\text{جوابات: } 0.439 \mu\text{H} \text{ ، } 0.443 \mu\text{H}$$

سوال 8.25: صفحہ 286 میں ہم محوری تار دکھائی گئی ہے۔ تصور کریں کہ اس ہم محوری تار کے اندرونی تار میں برقی رو صفر کے برابر ہے جبکہ بیرونی تار میں برقی رو I کے برابر ہے۔ بیرونی تار کی فی میٹر اندرونی امالہ مثال 8.2 کی طرز پر حاصل کریں۔

$$\text{جواب: } \left[\rho_2^4 \ln \frac{\rho_3}{\rho_2} + \frac{\rho_3^4 - \rho_2^4}{4} - \rho_2^2 (\rho_3^2 - \rho_2^2) \right] \frac{\mu}{2\pi(\rho_3^2 - \rho_2^2)^2}$$

سوال 8.26: لامحدود لمبائی کے سیدھی تار کی امالہ مساوات 8.73 کی مدد سے حاصل کریں۔

سوال 8.27: صفحہ 388 پر مثال 8.2 میں ہم محوری تار کے بیرونی تار کی اندرونی امالہ حاصل کی گئی۔ اسی کو دوبارہ مساوات 8.73 کی مدد سے حاصل کریں۔

$$\text{جواب: بیرونی تار میں } H = \frac{I}{2\pi\rho} \left(\frac{\rho_3^2 - \rho^2}{\rho_3^2 - \rho_2^2} \right) \text{ استعمال کرتے ہوئے آگے بڑھیں۔}$$

باب 9

وقت کے ساتھ بدلتے میدان اور میکس ویل کے مساوات

گزشتہ بابوں میں وقت کے ساتھ تبدیلی نہ ہونے والے میدانوں پر غور کیا گیا۔ بقایا کتاب میں وقت کے ساتھ تبدیلی ہوتے میدانوں پر غور کیا جائے گا۔

اس باب میں دو نئے اصولوں پر غور کیا جائے گا۔ پہلا اصول مانگل فیراڈے نے تجرباتی طور پر ثابت کیا جس کے تحت وقت کے ساتھ بدلتا مقناطیسی میدان، برقی میدان کو جنم دیتا ہے۔ دوسرا قانون جیمس کلارک میکس ویل کے کاوشوں سے حاصل ہوا جس کے تحت وقت کے ساتھ بدلتا برقی میدان، مقناطیسی میدان کو جنم دیتا ہے۔ اس باب میں برقی و مقناطیسیات کے چار ایسے مساوات پیش کئے جائیں گے جو میکس ویل مساوات کہلاتے ہیں۔

9.1 فیراڈے کا قانون

جناب مانگل فیراڈے نے تجرباتی طور پر ثابت کیا کہ وقت کے ساتھ بدلتا مقناطیسی میدان، برقی میدان پیدا کرتا ہے۔ قانون فیراڈے¹ کو مندرجہ ذیل مساوات پیش کرتی ہے۔

$$(9.1) \quad \text{محکم برقی دباؤ} = - \frac{d\Phi}{dt}$$

Faraday's law¹

اس قانون کے تحت کسی بھی سطح سے گزرتی مقناطیسی بہاو کی قیمت میں تبدیلی، اس سطح کے محیط پر برقی دباؤ پیدا کرتی ہے۔ ایسی برقی دباؤ روایتی طور پر محرک برقی دباؤ² کہلاتی ہے۔ کسی بھی سطح کے محیط پر محرک برقی دباؤ³ کی قیمت، اس سطح سے گزرتی مقناطیسی بہاو کے قیمت میں تبدیلی کی شرح کے برابر ہوتی ہے۔ محرک برقی دباؤ کی اکائی وولٹ V ہے۔ سطح کے محیط کو بند دائرہ تصور کرتے ہوئے ہم یوں بھی کہہ سکتے ہیں کہ کسی بھی بند دائرے پر محرک برقی دباؤ کی قیمت اس دائرے کے اندر سے گزرتی مقناطیسی بہاو کے قیمت میں تبدیلی کی شرح کے برابر ہوگی۔ یہاں یہ سمجھ لینا ضروری ہے کہ بند دائرہ فرضی لکیر بھی ہو سکتا ہے۔

ابتدائی مقناطیسی بہاو میں تبدیلی، محرک برقی دباؤ پیدا کرتی ہے۔ محرک برقی دباؤ مکمل برقی دور میں برقی رو پیدا کرنے کی صلاحیت رکھتا ہے۔ محرک برقی دباؤ سے پیدا برقی رو، بند دائرے میں ثانوی مقناطیسی بہاو پیدا کرے گی۔ ثانوی مقناطیسی بہاو، ابتدائی مقناطیسی بہاو میں تبدیلی کو روکنے کی کوشش کرتی ہے۔ مساوات 9.1 میں منفی کی علامت اسی اصول کو بیان کرتی ہے، یعنی کہ، بند دائرے میں محرک برقی دباؤ سے پیدا برقی رو، پہلے سے موجود مقناطیسی بہاو میں تبدیلی کو روکنے کی کوشش کرتی ہے۔ یہ اصول لیٹز⁵⁴ کا اصول پکارا جاتا ہے۔

کسی بھی بند دائرے سے گزرتی مقناطیسی بہاو میں تبدیلی مندرجہ ذیل وجوہات کی بنا ممکن ہے۔

• مقناطیسی بہاو کے کثافت میں تبدیلی،

• ساکن مقناطیسی میدان اور بند دائرے کا آپس میں اضافی حرکت، یا

• مندرجہ بالا دونوں وجوہات۔

اگر بند دائرہ N چکر کے لچھے پر مشتمل ہو جہاں ہر چکر میں سے Φ مقناطیسی بہاو گزرتی ہو تب فیڑے کے قانون کو

$$(9.2) \quad \text{محرک برقی دباؤ} = -N \frac{d\Phi}{dt}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

electromotive force, emf²
³محرک برقی دباؤ کی اصطلاح روایتی طور پر ہر قسم کے منبع برقی دباؤ کے لئے استعمال کی جاتی ہے۔
⁴یہ قانون 1834 میں جناب لیٹز نے پیش کیا۔
⁵Lenz's law

برقی دباؤ کے طرز پر محرک برقی دباؤ کی تعریف

$$(9.3) \quad \text{محرک برقی دباؤ} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$$

لکھی جاتی ہے جہاں مکمل پورے بند دائرے پر لینا لازم ہے۔ برقی دباؤ کے تعریف کے ساتھ موازنہ کرتے ہوئے ایسا معلوم ہوتا ہے جیسے ہم مندرجہ بالا مساوات میں منفی کی علامت (-) لگانا بھول گئے ہیں۔ ایسا بالکل نہیں ہے اور اس کی وضاحت جلد شکل 9.2 کی مدد سے کر دی جائے گی۔ محرک برقی دباؤ بند دائرے پر بیان کی جاتی ہے۔ صفحہ 147 پر مساوات 4.28 کے تحت کسی بھی بند دائرے پر ساکن برقی میدان E کا لکیری مکمل صفر کے برابر ہوتا ہے۔ مساوات 9.3 کہتا ہے کہ غیر ساکن مقناطیسی میدان میں ایسا نہیں ہوتا اور کسی بھی بند دائرے پر E کا لکیری مکمل اس دائرے پر پیدا محرک برقی دباؤ دیتا ہے۔

مساوات 9.1 اور مساوات 9.3 سے

$$(9.4) \quad \text{محرک برقی دباؤ} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں Φ کی جگہ کثافت مقناطیسی بہاؤ B کا سطحی مکمل استعمال کیا گیا۔

مندرجہ بالا مساوات میں ایک جانب سطح S کے محیط پر لکیری مکمل اور دوسری جانب اسی سطح پر سطحی مکمل لیا گیا ہے۔ کسی بھی سطح کے دو اطراف ہوتے ہیں جیسے کتاب کے اس صفحے کی بالائی سطح اور اس کی چھٹی سطح۔ یوں ہر سطحی مکمل کے دو ممکنہ جواب ہیں۔ اسی طرح کسی بھی سطح کے محیط پر لکیری مکمل یا تو سطح کر گرد گھڑی کی سمت میں اور یا اس کے الٹ گھوم کر لی جاسکتی ہے۔ یہاں ذرا رک کر، کسی بھی سطح پر سطحی مکمل اور اس کے محیط پر لکیری مکمل کی درست سمت کا تعین دائیں ہاتھ کے قانون⁶ سے کرتے ہیں۔

کرہ کی مانند مکمل بند سطح⁷ کی بیرونی سطح کو مثبت سطح تصور کیا جاتا ہے۔ مکمل بند سطح کا کوئی محیط نہیں ہوتا۔ اس کے برعکس کھلی سطح⁸ پر مکمل لیتے ہوئے مسئلے کے مطابقت سے مثبت سطح چنی جاتی ہے۔ ایسی سطح کو دائیں ہاتھ میں یوں پکڑیں کہ ہاتھ کی انگلیاں محیط کے گرد لپٹی ہوں اور انگوٹھا سطح کی مثبت سمت میں ہو۔ انگلیوں کے لپٹنے کی سمت ہی سطح کے گرد مثبت سمت ہے۔ یوں محیط پر لکیری مکمل، محیط کے گرد انگلیوں کے لپٹنے کی سمت میں حاصل کی جائے گی۔

right hand rule⁶
closed surface⁷
open surface⁸

مندرجہ بالا مساوات کہتی ہے کہ کسی بھی سمتی سطح سے گزرتی مقناطیسی بہاؤ اگر بڑھ رہی ہو تب محرک برقی دباؤ سطح کے محیط پر منفی جانب برقی رو پیدا کرے گا۔ مساوات 9.4 استعمال کرتے ہوئے دائیں ہاتھ کا قانون یاد رکھیں جو آپ کو محرک دباؤ کی صحیح سمت دے گا۔

آئیں وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے مقناطیسی میدان کی وجہ سے پیدا ساکن بند دائرے میں محرک برقی دباؤ پر پہلے غور کریں اور بعد میں ساکن مقناطیسی میدان میں حرکت کرتے دائرے کی وجہ سے پیدا محرک برقی دباؤ پر غور کریں۔

ساکن دائرے کی صورت میں مساوات 9.4 میں دائیں ہاتھ S ساکن ہے جبکہ B وقت کے ساتھ تبدیل ہو رہی ہے یوں اس مساوات میں تفرق کے عمل کو مکمل کے اندر لے جایا جاسکتا ہے یعنی

$$(9.5) \quad \text{محرک برقی دباؤ} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

آگے بڑھنے سے پہلے اس مساوات کی نقطہ شکل حاصل کرتے ہیں۔ مساوات کے بائیں ہاتھ پر مسئلہ سٹوکس کے اطلاق سے

$$(9.6) \quad \int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

حاصل ہوتا ہے۔

مساوات 9.5 میں بائیں جانب محیط پر لکیری تکمیل لی گئی ہے جبکہ دائیں جانب سطحی تکمیل لی گئی ہے۔ فرض کریں کہ کسی سطح کا محیط مستطیل شکل کو ہو۔ اس مستطیل پر ربڑ کی جھلی چسپاں کرتے ہیں۔ یہ جھلی ایک ممکنہ سطح ہے جس پر سطحی تکمیل لی جاسکتی ہے۔ اب جھلی کو کسی درمیانے نقطے سے اگر کھینچا جائے تو سطح کی صورت تبدیل ہو جائے گی جبکہ اس کا محیط تبدیل نہیں ہو گا۔ آپ مختلف نقطوں سے جھلی کو کھینچ کر یاد باکر مختلف سطحیں پیدا کر سکتے ہیں۔ ایسی تمام سطحوں کا محیط وہی مستطیل ہو گا۔ مساوات 9.5 میں دائیں جانب ایسی تمام سطحوں پر سطحی تکمیل، بائیں جانب محیط پر لکیری تکمیل کے برابر ہو گا۔ اب چونکہ محیط تبدیل نہیں ہوا لہذا ایسی تمام سطحوں پر سطحی تکمیل برابر ہوں گے۔

مساوات 9.5 سے مساوات 9.6 حاصل کرتے ہوئے یاد رہے کہ ان مساوات میں سطح کی محیط تبدیل نہیں کی جا رہی۔ یوں مساوات 9.6 میں دونوں جانب کے سطحوں کا محیط ایک ہونا چاہیے جبکہ سطحیں از خود مختلف ہو سکتی ہیں۔ چونکہ یہ مساوات کسی بھی سطح کے لئے درست ہے لہذا یہ تفرقی سطح dS کے لئے بھی درست ہے۔ تفرقی سطح کے لئے اسے یوں

$$(\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

یعنی

$$(9.7) \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

مساوات 9.7 میکس ویل کے چار مساواتوں میں سے پہلی مساوات ہے۔ یہ میکس ویل کے پہلی مساوات کی نقطہ شکل ہے۔ اس مساوات کی نقطہ شکل ہی عموماً استعمال ہوتی ہے۔ میکس ویل کے پہلی مساوات کی مکمل شکل مساوات 9.5 بیان کرتی ہے۔ وقت کے ساتھ نہ تبدیل ہوتے مقناطیسی میدان کی صورت میں مساوات 9.7 اور مساوات 9.5 ساکن میدان کے مساوات کی صورت اختیار کرتے ہیں یعنی

$$(9.8) \quad \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = 0 \quad (\text{برقی سکون})$$

اور

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (\text{برقی سکون})$$

آئیں مساوات 9.5 اور مساوات 9.7 کو استعمال کر کے دیکھیں۔ تصور کریں کہ $\rho < \rho_2$ نکلی خٹے میں وقت کے ساتھ مسلسل بڑھتی

$$(9.9) \quad \mathbf{B} = B_0 e^{kt} \mathbf{a}_z \quad (\rho < \rho_2)$$

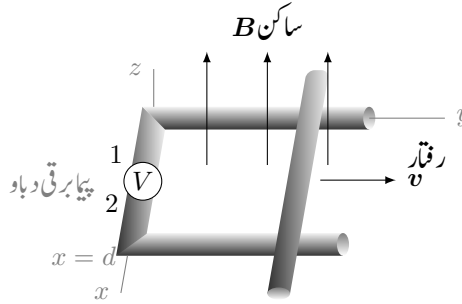
کشافت مقناطیسی بہاؤ پائی جاتی ہے جہاں B_0 ایک مستقل ہے۔ ہم $z = 0$ سطح پر ρ_1 رداس کا گول دائرہ لیتے ہیں۔ مشابہت سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ اس پورے دائرے پر E_ϕ کی قیمت تبدیل نہیں ہو سکتی لہذا مساوات 9.5 سے

$$\text{محرک برقی دباؤ} = 2\pi\rho_1 E_\phi = -kB_0 e^{kt} \pi\rho_1^2$$

لکھا جا سکتا ہے۔ یوں کسی بھی رداس پر برقی میدان کی شدت

$$(9.10) \quad \mathbf{E} = -\frac{1}{2}kB_0 e^{kt} \rho \mathbf{a}_\phi$$

لکھی جا سکتی ہے۔



شکل 9.1: وقت کے ساتھ نہ تبدیل ہوتے یکساں مقناطیسی میدان میں حرکت کرتے موصل سلاخ پر محرک برقی دباؤ پیدا ہوتی ہے۔

آئیں اب یہی جواب مساوات 9.7 سے حاصل کریں۔ چونکہ اس مساوات کے دائیں جانب صرف a_z جزو پایا جاتا ہے لہذا بائیں ہاتھ بھی صرف یہی جزو ہو گا لہذا اس مساوات سے

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho E_\phi)}{\partial \rho} = -kB_0 e^{kt}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ دونوں اطراف کو ρ سے ضرب دیتے ہوئے 0 تا ρ تکمیل لے کر

$$\rho E_\phi = -kB_0 e^{kt} \frac{\rho^2}{2}$$

یعنی

$$(9.11) \quad \mathbf{E} = -\frac{1}{2} kB_0 e^{kt} \rho \mathbf{a}_\phi$$

یہ دوبارہ حاصل ہوتا ہے جہاں رداسی تکمیل میں t مستقل کا کردار ادا کرتا ہے۔

مثبت B_0 کی صورت میں اس دائرے پر \mathbf{a}_ϕ کی الٹ سمت میں برقی رو گزرے گی جو \mathbf{a}_z کی الٹ سمت میں کثافت مقناطیسی بہاؤ پیدا کرتے ہوئے پہلے سے موجود مقناطیسی میدان میں تبدیلی کو روکنے کی کوشش کرتی ہے۔

اس مثال کے آخر میں یہ بتلانا ضروری ہے کہ مساوات 9.9 میں دیا گیا میدان غیر حقیقی ہے چونکہ یہ میکس ویل کے دیگر مساوات پر پورا نہیں اترتا۔ آپ سے سوال 9.18 میں گزارش کی گئی ہے کہ اس حقیقت کو ثابت کریں۔

آئیں اب ایسی مثال دیکھیں جس میں وقت کے ساتھ تبدیل نہ ہونے والے مقناطیسی میدان میں بند دائرہ حرکت کر رہا ہو۔ شکل 9.1 میں ایسی صورت حال دکھائی گئی ہے۔ اس شکل میں v سمتی رفتار کو ظاہر کرتی ہے جبکہ پیما

برقی دباؤ⁹ کو V سے ظاہر کیا گیا ہے۔ اس شکل میں دو افقی اور دو متوازی موصل سلاخ بند دائرہ یا بند دور بناتے ہیں۔ متوازی افقی سلاخوں کو بائیں طرف عمودی سلاخ سے جوڑا گیا ہے جس میں قابل نظر انداز جسامت اور لامحدود مزاحمت والا پیا برقی دباؤ نسب ہے، جبکہ دائیں جانب انہیں v سمتی رفتار سے حرکت کرتے عمودی سلاخ سے جوڑا گیا ہے۔ وقت کے ساتھ نہ تبدیل ہوتا اور ہر جگہ یکساں کثافت مقناطیسی بہاؤ B بند دائرے کی گھیرے سطح کے عمودی ہے۔

مثبت B کی صورت میں B کی سمت ہی بند دائرے سے گھیری گئی سطح کی سمت ہوگی اور بند دائرے کی سمت گھڑی کے الٹ ہوگی۔ یوں دائرے کے مثبت سمت میں دائیں ہاتھ کی انگلیاں رکھتے ہوئے گھیری سطح کی سمت انگوٹھے سے حاصل کی جاتی ہے۔

کسی بھی لمحہ t پر حرکت کرتے سلاخ کے مقام کو y سے ظاہر کرتے ہوئے ہم $y = vt$ لکھ سکتے ہیں جہاں v سلاخ کے رفتار کی قیمت ہے۔ یوں لمحہ t پر بند دور کا ارتباط بہاؤ

$$\Phi = Bdy = Bdv$$

ہو گا جو مساوات 9.1 کے تحت بند دور میں

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -Bdv$$

محرک برقی دباؤ e پیدا کرے گا۔

اب محرک برقی دباؤ $\oint E \cdot dL$ کو کہتے ہیں لہذا مندرجہ بالا جواب دائرے پر گھڑی کے الٹ سمت میں اس بند لکیری تکمیل سے بھی حاصل ہونا چاہیے۔ ہم دیکھ چکے ہیں کہ برقی سکون کی صورت میں موصل کی سطح پر سطح کے متوازی E صفر رہتی ہے۔ ہم آگے دیکھیں گے کہ وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے برقی میدان میں بھی موصل کی سطح پر متوازی E صفر ہی رہتی ہے۔ یوں شکل 9.1 پر گھڑی کے الٹ چلتے ہوئے تمام سلاخوں پر تکمیل کی قیمت صفر کے برابر ہوگی۔ پیا برقی دباؤ کی مزاحمت صفر نہیں ہے لہذا تکمیل کی قیمت پیا برقی دباؤ پر مندرجہ بالا قیمت کے برابر ہونا ہو گا۔ گھڑی کی الٹ سمت چلتے ہوئے پیا برقی دباؤ کی لمبائی کو dL لکھتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ $E \cdot dL = -Bdv$ کے برابر ہے لہذا E کی سمت a_x کے الٹ ہوگی۔ یوں پیا برقی دباؤ پر E کی سمت پیا کے دوسرے سرے سے پہلے سرے کی جانب ہے اور پیا پر برقی دباؤ کا مثبت سراپیا کا دوسرا سرا ہے۔

باب 9. وقت کے ساتھ بدلتے میدان اور میکس ویل کے مساوات

پیما کی جگہ مزاحمت جوڑنے سے دور میں گھڑی کے الٹ برقی رو گزرے گی جو a_z کے الٹ سمت میں مقناطیسی بہاؤ پیدا کرے گی۔ یہ لورنز کے قانون کے عین مطابق ہے۔

آئیں اب اسی شکل میں دئے مسئلے کو حرکتی دباؤ تصور کرتے ہوئے حل کریں۔ مقناطیسی میدان میں v سمتی رفتار سے حرکت کرتے ہوئے بار Q پر قوت

$$F = Qv \times B$$

یا حرکتی شدت $E_{جری}$

$$(9.12) \quad E_{جری} = \frac{F}{Q} = v \times B$$

عمل کرتی ہے۔ حرکتی شدت a_x سمت میں ہے۔ حرکت کرتے سلاخ میں ساکن مثبت ایٹم اور آزاد منفی الیکٹران پائے جاتے ہیں۔ ان تمام باروں پر ایسی قوت پائی جائے گی البتہ ساکن ایٹم متقید ہونے کی بنا حرکت نہیں کریں گے۔ اگر محرک سلاخ کو متوازی سلاخوں سے اٹھایا جائے تو اس میں آزاد الیکٹران پر a_x کے الٹ جانب قوت انہیں سلاخ کے پرلے سرے پر انبار کرنا شروع کر دے گی۔ الیکٹرانوں کا انبار سلاخ میں $-a_x$ جانب برقی میدان کی شدت E پیدا کرے گا۔ الیکٹران کا انبار بڑھتا رہے گا حتیٰ کہ $E_{جری}$ اور E برابر ہو جائیں۔ ایسا ہوتے ہی سلاخ میں کل برقی میدان کی شدت صفر ہو جائے گی اور اس میں بار کا حرکت رک جائے گا۔

یوں حرکتی برقی دباؤ

$$(9.13) \quad \text{محرک برقی دباؤ} = \oint E_{جری} \cdot dL = \oint (v \times B) \cdot dL$$

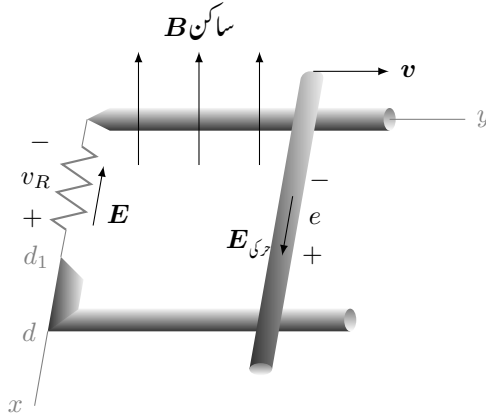
سے حاصل ہوگی۔ مساوات کے دائیں ہاتھ بند دائرے کے ساکن حصوں پر مکمل کی قیمت صفر ہوگی لہذا محرک برقی دباؤ صرف حرکت کرتے حصوں کی وجہ سے پیدا ہوگی۔ یوں حرکت کرتے سلاخ پر گھڑی کے الٹ چلتے ہوئے مکمل سے

$$\oint (v \times B) \cdot dL = \int_a^0 vB dx = -Bvd$$

حاصل ہوتا ہے۔ چونکہ B از خود وقت کے ساتھ تبدیل نہیں ہو رہا لہذا یہی کل محرک برقی دباؤ ہو گا۔

یوں وقت کے ساتھ تبدیل نہ ہوتے مقناطیسی میدان میں حرکت کرتے بند دائرے میں محرک برقی دباؤ حاصل کرتے وقت حرکت کرتے حصوں پر حرکتی شدت $E_{جری}$ کے استعمال سے محرک برقی دباؤ یوں

$$(9.14) \quad \text{محرک برقی دباؤ} = \oint E \cdot dL = \oint E_{جری} \cdot dL = \oint (v \times B) \cdot dL$$



شکل 9.2: محرک برقی دہا اور برقی دہا کا موازنہ۔

حاصل کی جاسکتی ہے۔ البتہ وقت کے ساتھ بدلتی مقناطیسی میدان میں محرک برقی دہا کے حصول میں مساوات 9.5 کا حصہ شامل کرنا ضروری ہے یوں محرک برقی دہا

$$(9.15) \quad \text{محرک برقی دہا} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} + \oint (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{L}$$

سے حاصل ہوگی۔ یہ مساوات دراصل مساوات 9.1

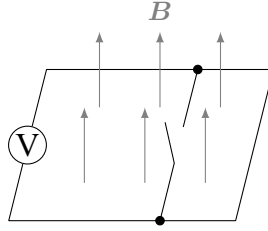
$$\text{محرک برقی دہا} = - \frac{d\Phi}{dt}$$

ہی ہے۔

آئیں شکل 9.1 میں پیمائش برقی دہا کی جگہ مزاحمت نسب کرتے ہوئے اس کی مدد سے مساوات 9.3 جو محرک برقی دہا کی تعریف بیان کرتا ہے پر دوبارہ غور کریں۔ نئی شکل کو شکل 9.2 میں دکھایا گیا ہے۔ مساوات 9.12 محرک سلاخ پر پیدا ہونے والی E دیتا ہے جو سلاخ میں مثبت بار کو سلاخ کے اُزلے سرے کی طرف دھکیلیے گا۔ اس کے برعکس مزاحمت پر برقی دہا v_R پایا جاتا ہے جس کی وجہ سے اس میں برقی میدان کی شدت E پائی جائے گی جو مزاحمت میں مثبت بار کو مزاحمت کے پرلے سرے کی جانب دھکیلیے گی۔

آپ شکل کو دیکھ کر تسلی کر لیں کہ مزاحمت پر میدان کی شدت $E = -Ea_x$ سے برقی دہا v_R یوں

$$(9.16) \quad v_R = - \int_0^{d_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = \int_0^{d_1} E dx = Ed_1$$



شکل 9.3: محرک برقی دباؤ یا وقت کے ساتھ بدلتی مقناطیسی میدان اور یا حرکت کرتے بند دائرے سے ہی پیدا ہو سکتی ہے۔

حاصل ہوتی ہے جبکہ متحرک سلاخ پر حرکی شدت $E_{جرى} = E_{جرى} a_x$ سے حرکی دباؤ e یوں

$$(9.17) \quad e = \oint E_{جرى} \cdot dL = \int_0^d E_{جرى} \cdot dL = \int_0^d E_{جرى} dx = E_{جرى} d$$

حاصل ہوتی ہے۔ شکل میں دو افقی موصل سلاخوں کے مابین برقی دباؤ کو سلاخوں کے بائیں سروں پر v_R جبکہ ان کے دائیں سروں پر e کہا گیا ہے لہذا v_R اور e دونوں مثبت اور برابر قیمت رکھتے ہیں۔ یہاں ضرورت اس بات کی ہے کہ آپ دیکھ سکیں کہ v_R کی مثبت قیمت حاصل کرنے کے لئے ضروری ہے کہ مساوات میں منفی کی علامت استعمال کی جائے جبکہ e کے مثبت قیمت کے حصول کے لئے ضروری ہے کہ مساوات میں جمع کی علامت استعمال کی جائے۔ حرکی دباؤ کے بند تکمیل میں دائرے کے بقایا اطراف پر تکمیل کی قیمت صفر ہونے کے ناطے صرف متحرک سلاخ پر تکمیل لیا گیا ہے۔

اگرچہ مساوات 9.1 انتہائی سادہ شکل رکھتی ہے لیکن اس کا استعمال کبھی کبھار مشکل ہو جاتا ہے۔ ایسا اس وقت ہوتا ہے جب دور کے کسی حصے کو تبدیل کرتے ہوئے دوسرا حصہ نسب کیا جائے۔ یہ بات شکل 9.3 پر غور کرنے سے بہتر سمجھ آئے گی۔ اس شکل میں نا تو وقت کے ساتھ تبدیل ہوتا مقناطیسی میدان ہے اور نا ہی بند دائرے کا کوئی حصہ متحرک ہے۔ البتہ شکل میں دکھائے سوچ کو چالو یا غیر چالو کرتے ہوئے بند دائرے میں مقناطیسی بہاؤ کم اور زیادہ کیا جا سکتا ہے۔ یہاں بغیر سوچے مساوات 9.1 استعمال کرتے ہوئے غلط نتائج حاصل ہوتے ہیں۔ یاد رہے کہ برقی دباؤ یا تو وقت کے ساتھ بدلتے مقناطیسی میدان اور یا پھر بند دائرے کے کسی حصے کے حرکت سے ہی پیدا ہو گا۔

مشق 9.1: خطہ $\rho < 4 \text{ cm}$ میں میدان $B = \frac{2 \cos 1000t a_z}{5 + \rho^2} \text{ T}$ پایا جاتا ہے۔ الف) سطح $z = 1.5 \text{ cm}$ ، $\rho < 2 \text{ cm}$ سے گزرتی مقناطیسی بہاؤ حاصل کریں۔ ب) نقطہ $N(0.02, 10^\circ, 3)$ پر E حاصل کریں۔

پ) سطح $z = 0$ پر رداس $\rho = 2 \text{ cm}$ اور مزاحمت $4 \frac{\Omega}{\text{cm}}$ کی موصل تار کا دائرہ پایا جاتا ہے۔ اس تار میں برقی رو حاصل کریں۔

جوابات: $10 \sin 1000t \text{ mA}$ ، $4 \sin 1000t a_\phi \frac{\text{V}}{\text{m}}$ ، $502.6 \cos 1000t \mu\text{Wb}$

مشق 9.2: شکل 9.3 میں $B = 0.5 a_z$ ٹسلا، رفتار $100y a_y$ میٹر فی سیکنڈ جبکہ $d = 0.5$ میٹر ہے۔ اگر $t = 0$ پر $y = 0.2$ میٹر ہو تب $t = 15$ ملی سیکنڈ پر مندرجہ ذیل حاصل کریں۔

- سلاخ کی رفتار،
- محرک برقی دباؤ V_{21} ،
- پیمائشی دباؤ کی اندرونی مزاحمت دس میگا اوہم کی صورت میں دور میں برقی رو۔

جوابات: $10 \mu\text{A}$ ، 100 V ، $4.017 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

9.2 انتقالی برقی رو

فیراڈے کے تجرباتی نتیجے سے میکس ویل کی پہلی مساوات

$$(9.18) \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

حاصل ہوئی جو کہتا ہے کہ بدلتی مقناطیسی میدان پیدا کرتا ہے برقی دباؤ۔ گردش کے عمل کو مد نظر رکھتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں ایسے پیدا کردہ برقی دباؤ کا بند لکیری کھل صفر کے برابر نہیں ہوتا۔ آئیں اب وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے برقی میدان پر غور کریں۔

ایمپیر کے دوری قانون کی نقطہ شکل

$$(9.19) \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

ساکن مقناطیسی میدان پر لاگو ہوتی ہے۔ اس مساوات کی پھیلاؤ

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{H} = 0 = \nabla \cdot \mathbf{J}$$

لیتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ گردش کی پھیلاؤ ہر صورت صفر کے برابر ہوتی ہے لہذا مندرجہ بالا مساوات کا بائیں ہاتھ ہر صورت صفر دے گا اور یوں اگر یہ مساوات درست ہو تب اس کا دایاں ہاتھ بھی ہر صورت صفر ہونا چاہیے۔ مگر ہم استمراری مساوات سے جانتے ہیں کہ

$$(9.20) \quad \nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

ہوتا ہے۔ اس سے ثابت ہوتا ہے کہ مساوات 9.19 صرف اس صورت درست ہو گا جب $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ ہو۔ یہ ایک غیر ضروری اور غیر حقیقی شرط ہے لہذا وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے برقی میدان پر استعمال کے قابل بنانے کی خاطر مساوات 9.19 کو تبدیل کرنا لازم ہے۔ تصور کریں کہ مساوات 9.19 میں نامعلوم جزو \mathbf{G} کی شمولیت سے یہ مساوات وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے برقی میدان پر بھی لاگو کرنے کے قابل ہو جاتا ہے۔ ایسی صورت میں مساوات 9.19 یوں

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \mathbf{G}$$

لکھی جائے گی۔ آئیں دوبارہ اس کی پھیلاؤ حاصل کریں جس سے

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{J} + \nabla \cdot \mathbf{G}$$

یا

$$\nabla \cdot \mathbf{G} = \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں استمراری مساوات کا سہارا لیا گیا۔ اس مساوات میں ρ کی جگہ $\nabla \cdot \mathbf{D}$ پر کرنے سے

$$\nabla \cdot \mathbf{G} = \frac{\partial (\nabla \cdot \mathbf{D})}{\partial t} = \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

یعنی

$$\mathbf{G} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

حاصل ہوتا ہے۔ یوں ایمپیر کے دوری قانون کی درست شکل

$$(9.21) \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

ہے۔ مندرجہ بالا مساوات برقی و مقناطیسیات کے اب تک تمام دریافت کردہ اصولوں پر پورا اترتی آئی ہے۔ جب تک یہ غلط ثابت نہ ہو جائے، ہم اسے درست ہی تصور کریں گے۔

مساوات 9.21 میکس ویل کے مساوات میں سے ایک مساوات ہے۔ اس مساوات میں $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ کی بعد ایمپیر فی مربع میٹر حاصل ہوتی ہے جو کثافت برقی رو کا بعد ہے۔ میکس ویل نے اس مساوات میں دائیں ہاتھ نئے جزو کو کثافت انتقالی رو¹⁰ کا نام دیا اور J_d سے ظاہر کیا یعنی

$$(9.22) \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \mathbf{J}_d$$

$$\mathbf{J}_d = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

ہم تین اقسام کے کثافت رو دیکھ چکے جن میں کثافت انتقالی رو کے علاوہ غیر بار شدہ خطے میں عموماً الیکٹران کے حرکت سے پیدا کثافت ایصالی رو

$$(9.23) \quad \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

اور بار کے حجم کے حرکت سے پیدا کثافت اتصالی رو

$$(9.24) \quad \mathbf{J} = \rho_h \mathbf{v}$$

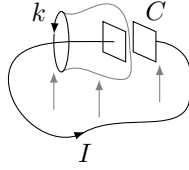
شامل ہیں۔ مساوات 9.21 میں J سے مراد ایصالی اور اتصالی رو کے کثافتوں کا مجموعہ ہے جبکہ مقید بار H کا حصہ ہیں۔ غیر موصل خطے میں جہاں کثافت بار پائی ہی نہیں جاتی $J = 0$ ہوتا ہے لہذا غیر موصل میں

$$(9.25) \quad \nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (J = 0)$$

ہو گا۔ مساوات 9.25 اور مساوات 9.18 میں مشابہت دیکھیں۔

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

¹⁰displacement current density



شکل 9.4: موصل تار میں ایصالی رو برقی گیر کے چادروں کے درمیان انتقالی رو کے برابر ہے۔

مقناطیسی شدت H اور برقی شدت E کافی مشابہت رکھتے ہیں۔ اسی طرح کثافت رو D اور کثافت بہاؤ B بھی کافی مشابہت رکھتے ہیں۔ اس مشابہت کو یہیں تک رکھیں چونکہ جیسے ہی میدان میں بار پر قوت کی بات کی جائے، دونوں اقسام کے میدان بالکل مختلف طریقوں سے عمل کرتے ہیں۔

کسی بھی سطح سے کل انتقالی رو سطحی تکمل

$$(9.26) \quad I_d = \int_S \mathbf{J}_d \cdot d\mathbf{S} = \int_S \frac{\partial D}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

سے حاصل ہوگی۔ مساوات 9.21 کے سطحی تکمل

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} + \int_S \frac{\partial D}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

پر مسئلہ سٹوکس کے اطلاق سے

$$(9.27) \quad \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I + I_d = I + \int_S \frac{\partial D}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے ایکپیئر کے دوری قانون کی نقطہ شکل حاصل ہوتی ہے۔

انتقالی رو کو شکل 9.4 کی مدد سے سمجھتے ہیں جہاں موصل تار سے برقی گیر C کے دوسرے جوڑتے ہوئے بند دور بنایا گیا ہے جس میں وقت کے ساتھ بدلتی سائن نما مقناطیسی میدان B محرک برقی دباؤ

$$e = V_0 \cos \omega t$$

پیدا کرتی ہے۔ یہ سادہ برقی دور ہے جس میں مزاحمت اور امالہ کو نظر انداز کرتے ہوئے برقی رو

$$\begin{aligned} i &= -\omega CV_0 \sin \omega t \\ &= -\omega \frac{\epsilon S}{d} V_0 \sin \omega t \end{aligned}$$

لکھی جاسکتی ہے جہاں ϵ ، S اور d برقی گیر (کپیسٹر) سے متعلق ہیں۔ آئیں انتقالی رو کو نظر انداز کرتے ہوئے تار کے گرد بند دائرے k پر ایمپیسر کا دوری قانون لاگو کریں۔

$$\oint_k \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I_k$$

اب بند دائرہ k اور اس دائرے پر \mathbf{H} حقیقی مقدار ہیں اور مکمل سے حاصل رو I_k اس دائرے سے گھیرے کسی بھی سطح سے گزرتی رو کو ظاہر کرتی ہے۔ اگر ہم k کو سیدھی سطح کا سرحد تصور کریں تب موصل تار اس سطح کو چھیدتا ہوا گزرے گا۔ یوں اس سطح سے I رو ہی گزرے گی جو ایصالی رو ہے۔ اس کے برعکس اگر ہم k کو تھیلے کا منہ تصور کریں جیسے شکل میں دکھایا گیا ہے تب ایصالی رو ایسی سطح سے نہیں گزرتی چونکہ تھیلا برقی گیر (کپیسٹر) کے دو چادروں کے درمیان سے گزرتا ہے اور تار اسے چھوتی تک نہیں۔ ایسی صورت میں تھیلے سے گزرتی ایصالی رو صفر کے برابر ہے۔ ایسی صورت میں ہمیں انتقالی رو کا سہارا لینا ہو گا۔ برقی گیر (کپیسٹر) کے چادروں کے درمیان

$$D = \epsilon E = \epsilon \left(\frac{V_0}{d} \cos \omega t \right)$$

ہے لہذا

$$J_d = \frac{\partial D}{\partial t} = -\omega \epsilon \frac{V_0}{d} \sin \omega t$$

اور یوں

$$I_d = S J_d = -\omega \frac{\epsilon S}{d} V_0 \sin \omega t$$

ہو گی۔

یہ وہی جواب ہے جو ایصالی رو سے حاصل ہوا تھا۔ اس مثال سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ ایمپیسر کے دوری قانون کو استعمال کرتے ہوئے سطح سے گزرتی ایصالی رو اور انتقالی رو دونوں کا خیال رکھنا ہو گا۔ کہیں پر سطح سے صرف ایصالی رو گزرے گی تو کہیں اس سے صرف انتقالی رو گزرے گی اور کبھی کبھار دونوں کا مجموعہ۔

انتقالی رو وقت کے ساتھ بدلتے برقی میدان سے پیدا ہوتے ہیں لہذا یہ ایسے تمام غیر موصل یا نیم موصل خطوں میں پائی جاتی ہے جہاں وقت کے ساتھ تبدیل ہوتی ایصالی رو پائی جائے۔ اگرچہ موصل خطے میں بھی انتقالی رو پائی جاتی ہے لیکن، جیسے آپ مندرجہ ذیل مشق میں دیکھیں گے، اس کی قیمت ایصالی رو کی نسبت سے اتنی کم ہوتی ہے کہ یہ

باب 9. وقت کے ساتھ بدلتے میدان اور میکس ویل کے مساوات

قابل نظر انداز ہوتی ہے۔ یہی وجہ ہے کہ انتقالی رو تجرباتی طور دریافت نہیں کی گئی بلکہ اس تک منطق کے ذریعہ سے پہنچا گیا۔

مثال 9.1: ایک خطے کے مستقل $\sigma = 0$ ، $\mu_R = 2.5$ اور $\epsilon_R = 1.2$ ہیں۔ اس میں کثافت انتقالی برقی رو درج ذیل ہے۔

$$J_d = 10 \cos(2 \times 10^8 t - kx) a_y \frac{\mu A}{m^2}$$

الف) D اور E حاصل کریں۔ ب) فیراڈے کے قانون کی نقطہ شکل اور مکمل کے استعمال کرتے ہوئے B اور H حاصل کریں۔ پ) مساوات 9.22 استعمال کرتے ہوئے J_d حاصل کریں۔ ت) حاصل J_d اور سوال میں دیے گئے J_d کا آپس میں موازنہ کرتے ہوئے k کی مثبت قیمت حاصل کریں۔

حل: الف) چونکہ $J_d = \frac{\partial D}{\partial t}$ کے برابر ہے لہذا

$$D = \int J_d dt = 5 \times 10^{-14} \sin(2 \times 10^8 t - kx) a_y + M \frac{C}{m^2}$$

حاصل کیا جاسکتا ہے۔ ساکن میدان صفر ہونے کی صورت میں مکمل کا مستقل $M = 0$ ہو گا۔ یوں

$$E = \frac{D}{\epsilon_R \epsilon_0} = 4.7 \times 10^{-3} \sin(2 \times 10^8 t - kx) a_y \frac{V}{m}$$

ہو گا۔

ب) فیراڈے کے قانون سے

$$\nabla \times E = -4.70587111 \times 10^{-3} k \cos(2 \times 10^8 t - kx) a_z = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

لکھتے ہوئے مکمل لے کر

$$\begin{aligned} B &= \int 4.70587111 \times 10^{-3} k \cos(2 \times 10^8 t - kx) a_z dt \\ &= 2.3529 \times 10^{-11} k \sin(2 \times 10^8 t - kx) a_z \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے جس سے

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_R \mu_0} = 7.4896 \times 10^{-6} k \sin(2 \times 10^8 t - kx) \mathbf{a}_z$$

لکھا جا سکتا ہے۔

(پ) چونکہ $\sigma = 0$ ہے لہذا کثافت ایصالی برقی رو صفر ہوگی۔ یوں مساوات 9.22 سے حاصل کرتے ہیں۔

$$\nabla \times \mathbf{H} = 7.4896 \times 10^{-6} k^2 \cos(2 \times 10^8 t - kx) \mathbf{a}_y \frac{\text{A}}{\text{m}^2} = \mathbf{J}_d$$

(ت) حاصل کردہ اور سوال میں دیا گیا \mathbf{J}_d برابر پر کرتے ہوئے

$$k = \sqrt{\frac{10 \times 10^{-6}}{7.4896 \times 10^{-6}}} = 1.155 \text{ m}^{-1}$$

حاصل ہوتا ہے۔

مثال 9.2: رداس a اور b کے موصل ہم محوری کرہ، جہاں $b > a$ ہے، کو برقی دباؤ $v = V_0 \cos \omega t$ مہیا کی جاتی ہے۔ دونوں کرہ کے درمیانی نخلے کے مستقل $\sigma = 0$ ، $\epsilon_R = 1$ اور $\mu_R = 1$ ہیں۔ بیرونی کرہ کو برقی زمین تصور کریں۔ الف) کرہ برقی گیر (کپیسٹر) کو مہیا برقی رو حاصل کریں۔ ب) دونوں کرہ کے مابین انتقالی برقی رو حاصل کریں۔ پ) کیا بیرون برقی گیر (کپیسٹر) ایصالی برقی رو اور اندرون برقی گیر (کپیسٹر) انتقالی برقی رو برابر ہیں؟

حل: الف) صفحہ 215 پر مساوات 5.60 کرہ کپیسٹر کی کپیسٹنس دیتی ہے جس سے مہیا کردہ ایصالی برقی رو یوں

$$I = C \frac{dv}{dt} = -\frac{4\pi\epsilon\omega V_0}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} \sin \omega t$$

حاصل کی جا سکتی ہے۔

ب) صفحہ 250 پر مساوات 6.24 استعمال کرتے ہوئے دونوں کرہ کے درمیان خطے میں برقی دباؤ کو

$$V = \frac{\frac{1}{r} - \frac{1}{b}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} V_0 \cos \omega t$$

لکھتے ہوئے

$$\mathbf{E} = -\nabla V = \frac{V_0 \cos \omega t}{r^2 \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)} \mathbf{a}_r$$

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} = \frac{\epsilon V_0 \cos \omega t}{r^2 \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)} \mathbf{a}_r$$

حاصل ہوتا ہے جس سے کثافت انتقالی برقی رو

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = -\frac{\omega \epsilon V_0 \sin \omega t}{r^2 \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)} \mathbf{a}_r$$

لکھی جاسکتی ہے۔ یوں انتقالی برقی رو

$$I_d = 4\pi r^2 J_d = -\frac{4\pi \omega \epsilon V_0 \sin \omega t}{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)}$$

ہوگی۔

پ) بیرون برق گیر (کپیسٹر) ایصالی برقی رو اور اندرون برق گیر (کپیسٹر) انتقالی برقی رو برابر ہیں۔

مشق 9.3: ٹھوس تانبے کی تار میں سائن نما، پچاس ہرٹز کی ایصالی رو $I_0 \cos \omega t$ گزر رہی ہے۔ اس میں انتقالی رو حاصل کریں۔ پچاس ہرٹز رو کی صورت میں ایصالی اور انتقالی رو کے موثر قیمت کی شرح حاصل کریں۔

حل: $I_d = -\frac{\omega \epsilon_0}{\sigma} I_0 \sin \omega t$: جبکہ ان کے موثر قیمت کی شرح $2.08 \times 10^{16} = \frac{\sigma}{\omega \epsilon_0} = \frac{1}{I_d}$ ہے۔

9.3 میکس ویل مساوات کی نقطہ شکل

ہم وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے میدانوں میں میکس ویل کے دو مساوات کے نقطہ اشکال

$$(9.28) \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

اور

$$(9.29) \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

حاصل کر چکے ہیں۔ میکس ویل کے بقایا دو مساوات وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے میدان میں بھی جوں کے توں

$$(9.30) \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_h$$

$$(9.31) \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

رہتے ہیں۔

مساوات 9.30 کہتا ہے کہ کثافت برقی رو کا منبع کثافت بار ہے۔ وقت کے ساتھ بدلتے مقناطیسی میدان میں برقی میدان پیدا ہوتا ہے جو بند دائرے پر چلتا ہے۔ ایسے برقی میدان کا نا تو کسی بار سے اخراج ہوتا ہے اور نا ہی یہ کسی بار پر ختم ہوتا ہے۔ اس کے برعکس ہر مثبت بار سے اس کے برابر برقی بہاؤ کا اخراج ہوتا ہے اور ہر منفی بار پر اس کے برابر برقی بہاؤ کا اختتام ہوتا ہے۔

مساوات 9.31 کہتا ہے کہ کسی بھی نقطے سے کل مقناطیسی بہاؤ کا اخراج صفر ہے یعنی مقناطیسی بہاؤ نا تو کسی نقطے سے خارج ہوتا ہے اور نا ہی یہ کسی نقطے پر اختتام پذیر ہوتا ہے۔ سادہ زبان میں اس کا مطلب ہے کہ مقناطیس کا ایک قطب ممکن نہیں جس سے مقناطیسی بہاؤ کا اخراج ہو یا اس پر مقناطیسی بہاؤ اختتام ہو۔

مندرجہ بالا چار مساوات پر برقی و مقناطیسیات کی بنیاد کھڑی ہے جنہیں استعمال کرنے کی خاطر چار معاون مساوات

$$(9.32) \quad \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$$

$$(9.33) \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

$$(9.34) \quad \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

$$(9.35) \quad \mathbf{J} = \rho_h \mathbf{v}$$

باب 9. وقت کے ساتھ بدلتے میدان اور میکس ویل کے مساوات

بھی درکار ہوتے ہیں۔

ایسے ذو برق اور مقناطیسی اشیاء جن میں متغیرات سادہ تعلق نہ رکھتے ہوں، ان میں مساوات 9.32 اور مساوات 9.33 کی جگہ

$$(9.36) \quad D = \epsilon_0 E + P$$

$$(9.37) \quad B = \mu_0 (H + M)$$

استعمال ہوتے ہیں۔ خطی اشیاء میں

$$(9.38) \quad P = \chi_e E$$

اور

$$(9.39) \quad M = \chi_m H$$

لکھا جا سکتا ہے۔

آخر میں لورنز قوت کی مساوات

$$(9.40) \quad F = \rho_h (E + v \times B)$$

بھی شامل کرتے ہیں۔

غیر سمتی مقناطیسی دباؤ V اور سمتی مقناطیسی دباؤ A انتہائی اہم ہیں البتہ ان کی شمولیت لازم نہیں۔

مثال 9.3: ایک خطے میں $\rho_h = 0$ ہے۔ اگر اس خطے میں $\nabla \cdot E = 0$ ہو تب خطے کی برقی مستقل ϵ پر کیا شرط لاگو ہوتی ہے۔

حل: مساوات 9.30 کے تحت $\rho_h = 0$ کی صورت میں $\nabla \cdot D = 0$ ہو گا۔ یوں

$$\nabla \cdot D = \nabla \cdot (\epsilon E) = E \cdot \nabla \epsilon + \epsilon \nabla \cdot E = 0$$

یا

$$\nabla \cdot E + E \cdot \frac{\nabla \epsilon}{\epsilon} = 0$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اب $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ اس صورت ہو گا اگر $\nabla \epsilon = 0$ ہو۔

مشق 9.4: ایک خطے کے مستقل $\sigma = 0$ ، $\epsilon_R = 2.5$ اور $\mu_R = 10$ ہیں۔ کیا اس خطے میں میدان مساوات پر پورا اترتے ہیں۔
 $\mathbf{D} = (z + 6 \times 10^7 t) \mathbf{a}_x$ اور $\mathbf{B} = (-754z - 4.52 \times 10^{10} t) \mathbf{a}_y$ کی جوڑی میکس ویل کے

جواب: چونکہ برقی میدان سے حاصل $\nabla \times \mathbf{E}$ مقناطیسی میدان سے حاصل $-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ کے برابر ہے اور اسی طرح مقناطیسی میدان سے حاصل $\nabla \times \mathbf{H}$ مقناطیسی میدان سے حاصل $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ کے برابر ہے لہذا یہ جوڑی میکس ویل کے مساوات پر پورا اترتی ہے۔

9.4 میکس ویل مساوات کی مکمل شکل

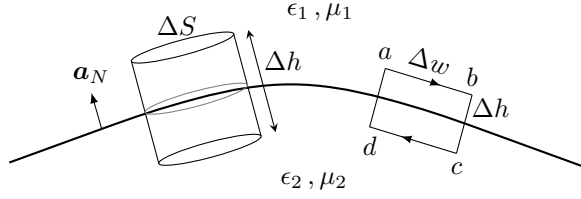
مساوات 9.28 کے سطحی مکمل پر مسئلہ سٹوکس کے اطلاق سے فیراڈے کے قانون کو

$$(9.41) \quad \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اسی طرح مساوات 9.29 سے ایمپیئر کے دوری قانون کی مکمل صورت

$$(9.42) \quad \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I + \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

حاصل ہوتی ہے۔



شکل 9.5: وقت کے ساتھ بدلتے میدان کے سرحدی شرائط۔

برقی اور مقناطیسی میدان کے عمل اشکال، گاوس کے قوانین مساوات 9.30 اور مساوات 9.31 کے صحیحی کھل اور مسئلہ پھیلاؤ کی مدد سے یوں لکھے جاسکتے ہیں۔

$$(9.43) \quad \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_h \rho_h dh$$

اور

$$(9.44) \quad \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

مندرجہ بالا چار مساوات سے E ، H ، D اور B کے سرحدی شرائط حاصل ہوتے ہیں جن سے میکس ویل کے جزوی تفرقی مساوات کے مستقل حاصل کئے جاتے ہیں۔ وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے میدان کے سرحدی شرائط عموماً ساکن میدان کے سرحدی شرائط ہی ہوتے ہیں لہذا ساکن میدان کے طریقہ کار سے وقت کے ساتھ بدلتے میدان کے سرحدی شرائط بھی حاصل کئے جاسکتے ہیں۔

آئیں شکل 9.5 کی مدد سے سرحد کے متوازی برقی اور مقناطیسی شرائط حاصل کریں۔ شکل میں مستطیل دائرے پر مساوات 9.41 کے اطلاق سے

$$(E_{m1} - E_{m2}) \Delta w = -\frac{\partial B_n}{\partial t} \Delta w \Delta h$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں $\frac{\partial B_n}{\partial t}$ سے مراد دائرے کے گھیرے سطح سے گزرتی مجموعی میدان کی تبدیلی ہے جس کا کچھ حصہ خطہ 1 اور کچھ حصہ خطہ 2 سے گزرتا ہے۔ اس مساوات کے دائیں ہاتھ کی قیمت $\Delta h \rightarrow 0$ کرتے ہوئے صفر کے قریب ترکی جاسکتی ہے۔ ایسی صورت میں دائیں ہاتھ کو صفر ہی تصور کرتے ہوئے

$$(9.45) \quad E_{m1} = E_{m2}$$

یعنی

$$(9.46) \quad \mathbf{a}_N \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = 0$$

حاصل ہوتا ہے۔

سرحد پر انتہائی کم موٹائی کے خطے میں کثافت برقی رو \mathbf{K} تصور کرتے ہوئے کسی بھی چھوٹی لمبائی dL پر برقی رو کو $I = \mathbf{K} \cdot dL$ لکھا جاسکتا ہے۔ یوں شکل 9.5 میں مستطیل دائرے پر مساوات 9.42 کے اطلاق سے

$$(H_{m1} - H_{m2}) \Delta w = K_{\perp} \Delta w + \frac{\partial D}{\partial t} \Delta w \Delta h$$

حاصل ہوتا ہے جہاں K_{\perp} سے مراد K کا وہ حصہ ہے جو H_{m1} اور H_{m2} کے عمودی ہے۔ دائیں ہاتھ دوسرے جزو کی قیمت $0 \rightarrow \Delta h$ کرتے ہوئے صفر کے قریب ترکی جاسکتی ہے لہذا اس جزو کو نظر انداز کرتے ہوئے

$$(9.47) \quad H_{m1} - H_{m2} = K_{\perp}$$

حاصل ہوتا ہے جسے یوں

$$(9.48) \quad \mathbf{a}_N \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{K}_{\perp}$$

بھی لکھا جاسکتا ہے۔

کسی بھی حقیقی دو مختلف اشیاء کے سرحد، مثلاً سمندر کے پانی اور ہوا کے سرحد یا ہوا اور دیوار کے سرحد، پر کثافت برقی رو \mathbf{K} صفر ہوتی ہے۔ لہذا حقیقی مسائل میں $K = 0$ کی بنا پر

$$(9.49) \quad H_{m1} = H_{m2}$$

ہو گا۔ صفحہ 375 پر شکل 8.9 میں سطحی کثافت برقی رو \mathbf{K} دکھائی گئی ہے جبکہ یہاں شکل 9.5 میں اسے صفر تصور کرتے ہوئے نہیں دکھایا گیا۔

مساوات 9.43 اور مساوات 9.44 سے سرحدی عمودی شرائط

$$(9.50) \quad \mathbf{a}_N \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = \rho_s$$

اور

$$(9.51) \quad \mathbf{a}_N \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0$$

باب 9. وقت کے ساتھ بدلتے میدان اور میکس ویل کے مساوات

حاصل ہوتے ہیں۔

موصل کو ایسا کامل موصل تصور کرتے ہوئے جس کی موصلیت لامحدود مگر J محدود ہو سے موصل کے اندر اوہم کے قانون سے

$$(9.52) \quad E = 0$$

اور یوں فیورڈے کے قانون کی نقطہ شکل سے، وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے میدان کی صورت میں

$$(9.53) \quad H = 0$$

حاصل ہوتے ہیں۔ اس طرح ایمپیئر کے دوری قانون کی نقطہ شکل سے محدود J کی قیمت

$$(9.54) \quad J = 0$$

حاصل ہوتی ہے لہذا برقی رو صرف موصل کی سطح پر بطور سطحی کثافت رو K ممکن ہے۔ یوں اگر خطہ 2 کامل موصل ہو تب مساوات 9.45، 9.49، 9.50 اور 9.51 کی جگہ

$$(9.55) \quad E_{m1} = 0$$

$$(9.56) \quad H_{m1} = K$$

$$(9.57) \quad D_{n1} = \rho_s$$

$$(9.58) \quad B_{n1} = 0$$

لکھا جائے گا۔ یاد رہے کہ سطحی کثافت بار کی موجودگی ذو برق، کامل موصل اور غیر کامل موصل تمام پر ممکن ہے جبکہ سطحی کثافت رو K صرف کامل موصل کی صورت میں ممکن ہے۔

مندرجہ بالا سرحدی شرائط میکس ویل کے مساوات کے حل کے لئے لازم ہیں۔ حقیقت میں پیش آنے والے تمام مسائل میں مختلف اشیاء کے سرحدیں پائی جاتی ہیں اور ایسے ہر سرحد کے دونوں اطراف پر مختلف متغیرات کے تعلق سرحدی شرائط سے ہی حاصل کرنا ممکن ہے۔ کامل موصل کی صورت میں موصل کے اندر، وقت کے ساتھ بدلتے، تمام متغیرات صفر ہوتے ہیں البتہ ایسی صورت میں مساوات 9.55 تا مساوات 9.58 میں دئے شرائط کا اطلاق نہایت مشکل ہوتا ہے۔

لامحدود خطے کو بے سرحد خطہ تصور کیا جا سکتا ہے۔ سرحد کی غیر موجودگی میں متحرک لہروں کے چند بنیادی خاصیت لہر کی حرکت پر غور سے واضح ہوتے ہیں۔ اگلا باب انہیں متحرک لہروں پر ہے۔ چونکہ لامحدود خطے میں سرحد نہیں

پایا جاتا لہذا سرحدی شرائط کی ضرورت نہیں پڑتی۔ اسی وجہ سے لامحدود خطے میں میکس ویل مساوات کا حل نہایت آسان ہوتا ہے۔

مثال 9.4: موصل سطح پر نقطہ $N(2, 3 - 1)$ پایا جاتا ہے جہاں میدان $E = (15a_x - 20a_y + 6a_z) \cos 10^6 t \frac{V}{m}$ ہے۔ موصل سطح کے گرد خطے کے مستقل $\mu_R = 2.2$ ، $\epsilon_R = 1.6$ اور $\sigma = 0$ ہیں۔ الف) نقطہ N پر موصل سطح کی عمودی اکائی سمتیہ a_N حاصل کریں۔ ب) اس نقطے پر کثافت بار حاصل کریں۔

حل: الف) چونکہ نقطہ N پر برقی میدان دیا گیا ہے اور موصل سطح پر برقی میدان سطح کے عمودی ہوتا ہے لہذا عمودی سمتیہ E کے سمت میں ہی ہو گا۔ یوں لمحہ $t = 0$ پر میدان کی قیمت استعمال کرتے ہوئے a_N حاصل کرتے ہیں۔

$$a_N = \frac{E_{t=0}}{|E_{t=0}|} = \frac{15a_x - 20a_y + 6a_z}{\sqrt{15^2 + 20^2 + 6^2}} = 0.58a_x - 0.78a_y + 0.23a_z$$

ب) موصل سطح پر عمودی میدان اور کثافت بار کے تعلق سے

$$\begin{aligned} \rho_S = D \cdot a_N &= 1.6\epsilon_0(15a_x - 20a_y + 6a_z) \cos 10^6 t \cdot (0.58a_x - 0.78a_y + 0.23a_z) \\ &= 1.138 \cos(10^6 t) \frac{nC}{m^2} \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے۔

مثال 9.5: خطہ-1 کے مستقل $\sigma_1 = 0$ ، $\epsilon_{R1} = 5.2$ اور $\mu_{R1} = 6$ ہیں جبکہ خطہ-2 کے مستقل $\sigma_2 = 0$ ، $\epsilon_{R2} = 1.5$ اور $\mu_{R2} = 2.2$ ہیں۔ ان کے سرحد پر کوئی کثافت بار نہیں پایا جاتا۔ سمتیہ $10a_x - 5a_y + 15a_z$ خطہ-2 سے خطہ-1 کی جانب ہے۔ خطہ الف میں سرحد کے قریب نقطہ N پر میدان

باب 9. وقت کے ساتھ بدلتے میدان اور میکس ویل کے مساوات

$E_1 = (100\mathbf{a}_x - 50\mathbf{a}_y + 80\mathbf{a}_z) \cos 3600t \frac{\text{V}}{\text{m}}$ پایا جاتا ہے۔ الف) اسی نقطے کے قریب E_{t1} ، E_{n2} اور E_2 حاصل کریں۔

جوابات: $41.8 \frac{\text{V}}{\text{m}}$ ، $454 \frac{\text{V}}{\text{m}}$ ، $456 \frac{\text{V}}{\text{m}}$

مثال 9.6: $z < 0$ خطہ-1 ہے جہاں $\epsilon_1 = 1.5 \times 10^{-11} \frac{\text{F}}{\text{m}}$ ، $\mu_1 = 2.2 \times 10^{-6} \frac{\text{H}}{\text{m}}$ اور $\sigma_1 = 6 \times 10^{-3} \frac{\text{S}}{\text{m}}$ ہیں۔ خطہ-2 جو $z > 0$ پر پایا جاتا ہے میں $\epsilon_2 = 2\epsilon_1$ ، $\mu_2 = \frac{\mu_1}{2}$ اور $\sigma_2 = 4\sigma_1$ ہیں۔ نقطہ $N(0, 0, 0^-)$ سرحد پر خطہ-1 میں پایا جاتا ہے جہاں میدان $\mathbf{E}_1 = (30\mathbf{a}_x + 20\mathbf{a}_y + 10\mathbf{a}_z) \cos 10^9 t \frac{\text{V}}{\text{m}}$ ہے۔ الف) اس نقطے پر \mathbf{E}_{n1} ، \mathbf{E}_{m1} ، \mathbf{D}_{n1} اور \mathbf{D}_{m1} حاصل کریں۔ ب) اس نقطے پر \mathbf{J}_{n1} اور \mathbf{J}_{m1} حاصل کریں۔ پ) اسی نقطے پر \mathbf{E}_{m2} ، \mathbf{D}_{m2} اور \mathbf{J}_{m2} حاصل کریں۔ ت) استمراری مساوات کی مدد سے $\mathbf{J}_{n1} - \mathbf{J}_{n2} = -\frac{\partial \mathbf{D}_{n1}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{D}_{n2}}{\partial t}$ لکھتے ہوئے \mathbf{E}_{n2} اور \mathbf{J}_{n2} ، \mathbf{D}_{n2} حاصل کریں۔

حل: الف) خطہ-1 سے خطہ-2 جانب اکائی سمتیہ \mathbf{a}_z ہے۔ یوں

$$\mathbf{E}_{n1} = \mathbf{a}_N \cdot \mathbf{E}_1 = \mathbf{a}_z \cdot [30\mathbf{a}_x + 20\mathbf{a}_y + 10\mathbf{a}_z] \cos(10^9 t) = 10 \cos(10^9 t)$$

ہو گا جس سے

$$\mathbf{E}_{n1} = E_{n1} \mathbf{a}_N = 10 \cos(10^9 t) \mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{E}_{m1} = \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_{n1} = [30\mathbf{a}_x + 20\mathbf{a}_y] \cos(10^9 t)$$

$$\mathbf{D}_{n1} = \epsilon_1 \mathbf{E}_{n1} = 1.5 \times 10^{-10} \cos(10^9 t) \mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{D}_{m1} = \epsilon_1 \mathbf{E}_{m1} = 10^{-10} [4.5\mathbf{a}_x + 3\mathbf{a}_y] \cos(10^9 t)$$

لکھے جاسکتے ہیں۔

ب)

$$\mathbf{J}_{n1} = \sigma_1 \mathbf{E}_{n1} = (6 \times 10^{-3}) 10 \cos(10^9 t) \mathbf{a}_z = \frac{3}{50} \cos(10^9 t) \mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{J}_{m1} = \sigma_1 \mathbf{E}_{m1} = (6 \times 10^{-3}) [30\mathbf{a}_x + 20\mathbf{a}_y] \cos(10^9 t) = \left[\frac{9}{50} \mathbf{a}_x + \frac{3}{25} \mathbf{a}_y \right] \cos(10^9 t)$$

(پ) سرحد پر متوازی برقی میدان بے جوڑ ہوتا ہے لہذا اس سرحدی شرط کی بنا پر

$$E_{m2} = E_{m1} = [30a_x + 20a_y] \cos(10^9 t)$$

ہو گا جس سے

$$\begin{aligned} D_{m2} &= \epsilon_2 E_{m2} \\ &= (3 \times 10^{-11}) [30a_x + 20a_y] \cos(10^9 t) \\ &= 10^{-10} [9a_x + 6a_y] \cos(10^9 t) \\ J_{m2} &= \sigma_2 E_{m2} \\ &= (24 \times 10^{-3}) [30a_x + 20a_y] \cos(10^9 t) \\ &= \left[\frac{18}{25} a_x + \frac{12}{25} a_y \right] \cos(10^9 t) \end{aligned}$$

حاصل کئے جا سکتے ہیں۔

(ت) مساوات 9.50 سرحد پر سطحی کشافیت بار ρ_S اور عمودی میدان کا تعلق بیان کرتی ہے۔ شکل 9.5 کی طرح سرحد پر کم سے کم قد ($\Delta h \rightarrow 0$) کی چھوٹی ڈبیا میں کل $\rho_S \Delta S$ بار پایا جائے گا۔ اس ڈبیا سے برقی رو کی اخراج سے ڈبیا میں موجود بار میں کمی پیدا ہوگی جسے استمراری مساوات پیش کرتی ہے

$$(J_{n1} - J_{n2}) \cdot \Delta S = -\frac{\partial \rho_S}{\partial t} \Delta S$$

جہاں $\rho_S = J_{n1} - J_{n2}$ کے برابر ہے۔ اس مساوات کو

$$J_{n1} - J_{n2} = -\frac{\partial}{\partial t} (D_{n1} - D_{n2})$$

یا

$$\sigma_1 E_{n1} - \sigma_2 E_{n2} = -\frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_1 E_{n1} - \epsilon_2 E_{n2})$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اس تفرقی مساوات میں $E_{n1} = 10 \cos 10^9 t$ پر کرتے ہوئے E_{n2} کے لئے حل کرتے ہیں۔ ایسا نامعلوم مستقل کے طریقے سے کرتے ہیں۔ یہ طریقہ استعمال کرتے ہوئے ہم تصور کرتے ہیں کہ

$$E_{n2} = A \cos 10^9 t + B \sin 10^9 t$$

باب 9. وقت کے ساتھ بدلتے میدان اور میکس ویل کے مساوات

کے برابر ہے جہاں A اور B درکار مستقل ہیں۔ ہم E_{n1} اور E_{n2} کو استمراری مساوات میں پر کرتے ہیں۔

$$(6 \times 10^{-3})10 \cos 10^9 t - 24 \times 10^{-3}[A \cos 10^9 t + B \sin 10^9 t] \\ = 1.5 \times 10^{-11} \times 10 \times 10^9 \sin 10^9 t + 3 \times 10^{-11}[-10^9 A \sin 10^9 t + 10^9 B \cos 10^9 t]$$

اس مساوات میں دونوں جانب \cos اجزاء کے سر برابر ہوں گے۔ یوں

$$(6 \times 10^{-3})10 - 24 \times 10^{-3}A = 3 \times 10^{-11}[10^9 B]$$

ہو گا۔ اسی طرح مساوات کے دونوں جانب \sin اجزاء کے سر برابر ہوں گے لہذا

$$-24 \times 10^{-3}[B] = 1.5 \times 10^{-11} \times 10 \times 10^9 + 3 \times 10^{-11}[-10^9 A]$$

ہو گا۔ مندرجہ بالا دو مساوات کو آپس میں حل کرتے ہوئے

$$A = \frac{165}{41}$$

$$B = -\frac{50}{41}$$

حاصل ہوتا ہے جس سے

$$E_{n2} = \frac{165}{41} \cos 10^9 t - \frac{50}{41} \sin 10^9 t = 4.21 \cos(10^9 t - 16.9^\circ)$$

لکھا جاسکتا ہے۔ یوں

$$\mathbf{E}_{n2} = 4.21 \cos(10^9 t - 16.9^\circ) \mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{D}_{n2} = \epsilon_2 \mathbf{E}_{n2}$$

$$= (3 \times 10^{-11})4.21 \cos(10^9 t - 16.9^\circ) \mathbf{a}_z$$

$$= 1.26 \times 10^{-10} \cos(10^9 t - 16.9^\circ) \mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{J}_{n2} = \sigma_2 \mathbf{E}_{n2}$$

$$= (24 \times 10^{-3})4.21 \cos(10^9 t - 16.9^\circ) \mathbf{a}_z$$

$$= 0.1 \cos(10^9 t - 16.9^\circ) \mathbf{a}_z$$

ہوں گے۔

9.5 تاخیری دباؤ

وقت کے ساتھ بدلتے دباؤ، جنہیں تاخیری دباؤ¹¹ کہا جاتا ہے، اشعاعی اخراج¹² کے مسائل حل کرنے میں نہایت اہم ثابت ہوتے ہیں۔ آپ کو یاد ہو گا کہ غیر سمتی مقناطیسی دباؤ V کو خطے میں تقسیم ساکن بار کی صورت

$$(9.59) \quad V = \int_h \frac{\rho_h dh}{4\pi\epsilon R} \quad (\text{برقی سکون})$$

میں لکھا جاسکتا ہے۔ اسی طرح سمتی مقناطیسی دباؤ A کو وقت کے ساتھ نہ بدلتے یعنی یک سمتی برقی رو کے تقسیم کی صورت

$$(9.60) \quad A = \int_h \frac{\mu J dh}{4\pi R} \quad (\text{یک سمتی رو})$$

میں لکھا جاسکتا ہے۔ انہیں مساوات کے نقطہ اشکال بالترتیب

$$(9.61) \quad \nabla^2 V = -\frac{\rho_h}{\epsilon} \quad (\text{برقی سکون})$$

اور

$$(9.62) \quad \nabla^2 A = -\mu J \quad (\text{یک سمتی رو})$$

ہیں۔

غیر سمتی اور سمتی مقناطیسی دباؤ کے حصول کے بعد میدان کے بنیادی متغیرات ڈھلوان

$$(9.63) \quad E = -\nabla V \quad (\text{برقی سکون})$$

اور گردش

$$(9.64) \quad B = \nabla \times A \quad (\text{یک سمتی رو})$$

کی مدد سے حاصل ہوتے ہیں۔

آئیں اب ساکن بار اور یک سمتی رو سے متعلق، وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے ایسے دباؤ حاصل کریں جو مندرجہ بالا مساوات پر پورا اترتے ہوں۔

retarded potentials¹¹
radiation¹²

باب 9. وقت کے ساتھ بدلتے میدان اور میکس ویل کے مساوات

میکس ویل کے مساوات کے تحت $\nabla \cdot B = 0$ ہو گا۔ صفحہ 319 پر مساوات 7.66 کے تحت گردش کی پھیلاؤ لازماً صفر ہوتی ہے لہذا مساوات 9.64 میکس ویل کی مساوات $\nabla \cdot B = 0$ پر پورا اترتی ہے۔ یوں ہم مساوات 9.64 کو بدلتے میدان کے لئے بھی درست تصور کرتے ہیں۔

صفحہ 333 پر مشق 7.7 میں آپ نے ثابت کیا کہ ڈھلوان کی گردش لازماً صفر ہوتی ہے یوں مساوات 9.63 کی گردش لینے سے دایاں ہاتھ صفر حاصل ہوتا ہے جبکہ بائیں ہاتھ $\nabla \times E$ حاصل ہوتا ہے جو مساوات 9.28 کے تحت صفر نہیں ہے۔ یوں صاف ظاہر ہے کہ مساوات 9.63 وقت کے ساتھ بدلتے میدان کے لئے درست نہیں ہے۔ آئیں اس توقع سے مساوات 9.63 کے دائیں جانب متغیرہ N جمع کریں

$$E = -\nabla V + N$$

کہ وقت کے ساتھ بدلتے میدان کے لئے ایسی مساوات درست ثابت ہو گی۔ فی الحال N ایک نا معلوم متغیرہ ہے۔ گردش لینے سے

$$\begin{aligned}\nabla \times E &= -\frac{\partial B}{\partial t} = -\nabla \times (\nabla V) + \nabla \times N \\ &= 0 + \nabla \times N\end{aligned}$$

یعنی

$$\nabla \times N = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 9.64 کے استعمال سے یوں

$$\nabla \times N = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times A)$$

یا

$$\nabla \times N = -\nabla \times \left(\frac{\partial A}{\partial t} \right)$$

حاصل ہوتا ہے جس کا سادہ ترین حل

$$N = -\frac{\partial A}{\partial t}$$

ہے لہذا اب ہم

$$(9.65) \quad \mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

لکھ سکتے ہیں۔

ہمیں اب بھی دیکھنا ہو گا کہ آیا مساوات 9.64 اور مساوات 9.65 میکس ویل کے بقایا دو مساوات یعنی مساوات 9.29

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

اور مساوات 9.30

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_h$$

پر پورا اترتے ہیں کہ نہیں۔ یہاں پہلی مساوات میں $\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A}$ اور $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ پر کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} &= \mathbf{J} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\ &= \mathbf{J} + \epsilon \left(-\nabla \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \right) \end{aligned}$$

یا

$$(9.66) \quad \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu \mathbf{J} - \mu \epsilon \left(\nabla \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \right)$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں مساوات 9.65 کا سہارا لیا گیا۔ اسی طرح مساوات 9.30 سے

$$\epsilon \left(-\nabla \cdot \nabla V - \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{A} \right) = \rho_h$$

یا

$$(9.67) \quad \nabla^2 V + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{A}) = -\frac{\rho_h}{\epsilon}$$

حاصل ہوتا ہے۔

مساوات 9.66 اور مساوات 9.67 میں کوئی تضاد نہیں پایا جاتا۔ ساکن یا یک سمتی حالات میں $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ کی وجہ سے مساوات 9.66 اور مساوات 9.67 سے بالترتیب مساوات 9.62 اور مساوات 9.61 حاصل ہوتے ہیں۔ یوں ہم فرض کر سکتے ہیں کہ وقت کے ساتھ بدلتے دباؤ کی تعریف یوں کی جاسکتی ہے کہ ان سے B اور E بذریعہ مساوات 9.64 اور مساوات 9.65 حاصل کئے جاسکتے ہوں۔ البتہ \mathbf{A} اور V کو مساوات 9.64 اور مساوات 9.65 از خود مکمل طور پر بیان نہیں کرتے۔ یہ دو مساوات لازمی لیکن نامکمل شرائط ہیں جن پر \mathbf{A} اور V کا پورا اترنا ضروری ہے۔ آئیں ایک مثال سے اس حقیقت کو سمجھیں۔

تصور کریں کہ ہمارے پاس سادہ سمتی مقناطیسی دباؤ ہے جس کے A_y اور A_z اجزاء صفر کے برابر ہیں۔ یوں مساوات 9.64 کی مدد سے ہم لکھ سکتے ہیں۔

$$B_x a_x + B_y a_y + B_z a_z = 0 a_x + \frac{\partial A_x}{\partial z} a_y - \frac{\partial A_x}{\partial y} a_z$$

اس سے ظاہر ہے کہ x محدد کے ساتھ A_x کے تبدیلی کے بارے میں کچھ اخذ کرنا ممکن نہیں ہے۔ یہ مساوات $\frac{\partial A_x}{\partial x}$ کا ذکر تک نہیں کرتا۔ ہاں اگر ہمیں \mathbf{A} کے پھیلاؤ کے بارے میں بھی معلومات فراہم ہوتی تب x محدد کے ساتھ A_x کے تبدیلی کے بارے میں کچھ کہنا ممکن ہوتا چونکہ دئے گئے سمتی دباؤ سے

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ آخر میں یہ بھی بنانا ضروری ہے کہ \mathbf{A} کے بارے میں ہماری تمام معلومات جزوی تفرقی مساوات کی صورت میں ہیں جن سے \mathbf{A} کے حصول کے وقت مکمل کا مستقل شامل کرنا ضروری ہے۔ کسی بھی حقیقی مسئلہ جس میں مکمل خلاء کے لئے حل درکار ہو میں ایسا مستقل صفر کے برابر ہو گا چونکہ کوئی بھی میدان لامحدود فاصلے پر صفر ہی ہو گا۔

اس مثال سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ اگر ہمیں لامحدود خلاء میں کسی بھی نقطے پر سمتی میدان کی قیمت معلوم ہو تب اس سمتی میدان کو تمام خلاء میں میدان کے گردش اور پھیلاؤ سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ ہمیں مکمل آزادی ہے کہ جیسے چاہیں \mathbf{A} کی پھیلاؤ بیان کریں۔ ہم مساوات 9.66 اور مساوات 9.67 کو مد نظر رکھتے ہوئے یوں \mathbf{A} کے پھیلاؤ کے لئے سادہ ترین تفاعل

$$(9.68) \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = -\mu\epsilon \frac{\partial V}{\partial t}$$

لکھتے ہیں جس سے مساوات 9.66

$$(9.69) \quad \nabla^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J} + \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}$$

صورت اختیار کر لے گی جبکہ مساوات 9.67

$$(9.70) \quad \nabla^2 V = -\frac{\rho_h}{\epsilon} + \mu \epsilon \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$$

صورت اختیار کر لے گی۔

مندرجہ بالا دو مساوات متحرک امواج سے متعلق ہیں جن پر اگلے باب میں غور کیا جائے گا۔ ان مساوات کی مشابہت بھی حیرت انگیز ہے۔ باب کے اس حصے میں، وقت کے ساتھ بدلتے میدان کے لئے، حاصل کئے گئے نتائج یہاں دوبارہ پیش کرتے ہیں۔

$$(9.71) \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

$$(9.72) \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = -\mu \epsilon \frac{\partial V}{\partial t}$$

$$(9.73) \quad \mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

اگلے باب میں متحرک امواج پر غور کیا جائے گا۔ آپ دیکھیں گے کہ وقت کے ساتھ بدلتے برقی و مقناطیسی میدان متحرک امواج پیدا کرتے ہیں جن کی رفتار v

$$(9.74) \quad v = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}}$$

کے برابر ہوتی ہے۔ خالی خلاء میں یہ رفتار تقریباً $3 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ کے برابر ہوتی ہے جو خالی خلاء میں روشنی کی رفتار ہے۔ اس سے اخذ کیا جاسکتا ہے کہ نقطہ N_1 پر کثافت بار سے دور کسی نقطہ N_2 پر دباؤ کی قیمت اسی لمحے کثافت بار کے قیمت پر منحصر نہیں ہوتی بلکہ کچھ دیر قبل کے کثافت بار پر منحصر ہوتی ہے۔ کثافت بار میں تبدیلی کی خبر N_1 سے N_2 تک رفتار v سے پہنچتی ہے لہذا ان نقطوں کے درمیان فاصلہ R ہونے کی صورت میں یہ خبر $\frac{R}{v}$ سیکنڈ تاخیر سے پہنچے گی۔ اس طرح وقت کے ساتھ بدلتی صورت میں مساوات 9.59 کی نئی شکل

$$(9.75) \quad V = \int_h \frac{[\rho_h]}{4\pi\epsilon R} dh$$

باب 9. وقت کے ساتھ بدلتے میدان اور میکس ویل کے مساوات

ہو گی جہاں $[\rho_h]$ سے مراد یہ ہے کہ مساوات میں وقت t کی جگہ تاخیری وقت t' استعمال کیا جائے یعنی

$$t' = t - \frac{R}{v}$$

یوں اگر خلاء میں کشافیت بار

$$\rho_h = e^{-r} \cos \omega t$$

ہو تب

$$[\rho_h] = e^{-r} \cos \left[\omega \left(t - \frac{R}{v} \right) \right]$$

ہو گا جہاں R تفرقی بار سے اس نقطے تک فاصلہ ہے جہاں اس تفرقی بار سے پیدا ہوا کا حصول درکار ہو۔

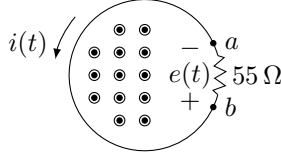
اسی طرح وقت کے ساتھ بدلتی صورت میں مساوات 9.60 کی نئی شکل یعنی تاخیری سمتی مقناطیسی دباؤ کی مساوات

$$(9.76) \quad A = \int_h \frac{\mu[J]}{4\pi R} dh$$

ہو گی۔

تاخیری وقت کے استعمال کی بنا پر ایسے دباؤ کو تاخیری دباؤ¹³ کہا جاتا ہے۔

تاخیری برقی اور تاخیری مقناطیسی دباؤ کے استعمال سے برقی و مقناطیسی مسئلے نسبتاً زیادہ آسانی سے حل ہوتے ہیں۔ یوں اگر ہمیں ρ اور J معلوم ہوں تب ہم مساوات 9.75 اور مساوات 9.76 سے V اور A حاصل کر سکتے ہیں جن سے مقناطیسی میدان بذریعہ مساوات 9.71 اور برقی میدان بذریعہ مساوات 9.73 حاصل کئے جاسکتے ہیں۔ اگر ہمیں ρ اور J کی قیمتیں معلوم نہ ہوں اور نا ہی ان کے قیمتوں کا اندازہ لگانا ممکن ہو تب تاخیری دباؤ، میکس ویل مساوات کے حل سے زیادہ، مددگار ثابت نہیں ہوتے۔



شکل 9.6: دائرے میں یکساں مقناطیسی بہاؤ، محرک برقی دباو پیدا کرتا ہے۔

سوالات

سوال 9.1: $\rho = 12 \text{ cm}$ کے گول دائرے میں وقت کے ساتھ تبدیل ہوتا، یکساں مقناطیسی میدان $B(t) = 0.15 \sin 1000t \text{ Wb}$ ہے جو دائرے میں محرک برقی دباو $e(t)$ پیدا کرتا ہے۔ گول دائرے کی مزاحمت 55Ω ہے۔ محرک برقی دباو، گول دائرے میں برقی رو $i(t)$ پیدا کرتی ہے۔ برقی رو $i(t)$ سے پیدا مقناطیسی بہاؤ کو نظر انداز کرتے ہوئے $e(t)$ اور $i(t)$ حاصل کریں۔ صورت حال شکل 9.6 میں دکھائی گئی ہے جہاں صفحہ سے اوپر کی جانب باہر نکلتی مقناطیسی میدان کو چھوٹے دائروں میں بند نقطوں سے ظاہر کیا گیا ہے۔

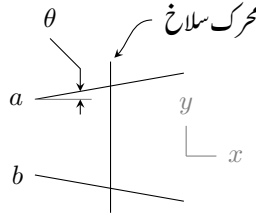
جوابات: $-6.78 \cos 1000t \text{ V}$ ، $-123 \cos 1000t \text{ mA}$

سوال 9.2: سطح $z = 0$ پر موصل تار کے مستطیل کے اطراف $x = \pm 2 \text{ m}$ ، $y = \pm 1.5 \text{ m}$ پر ہیں۔ وقت کے ساتھ تبدیل ہوتا مقناطیسی میدان $B = (0.25a_x - 0.55a_y + 0.1a_z) \sin 1200t \text{ T}$ ہے۔ مستطیل کی کل مزاحمت $R = 4200 \Omega$ ہے۔ مثبت z محدود کی جانب سے دیکھتے ہوئے، گھڑی کی سمت میں برقی رو حاصل کریں۔ برقی رو سے پیدا ثنائی مقناطیسی میدان کو نظر انداز کرتے ہوئے حل کریں۔

جواب: $343 \cos 1200t \text{ mA}$

سوال 9.3: مقناطیسی میدان $B = 5 \cos(1.2 \times 10^8 \pi t - \pi y) a_z \mu\text{T}$ ہے۔ مندرجہ ذیل فرضی یا غیر موصل دائروں پر a_ϕ سمت میں بڑھتا محرک برقی دباو حاصل کریں۔ الف) $(0, 0, 0)$ تا $(1, 0, 0)$ تا $(1, 1, 0)$ تا $(0, 1, 0)$ تا $(0, 0, 0)$ (ب) $(0, 0, 0)$ تا $(2, 0, 0)$ تا $(2, 2, 0)$ تا $(0, 2, 0)$ تا $(0, 0, 0)$

جوابات: $600[\cos(1.2 \times 10^8 \pi t - \pi) - \cos(1.2 \times 10^8 \pi t)] \text{ V}$ ، 0 V



شکل 9.7: محرک سلاخ پر مقناطیسی میدان محرک دباؤ پیدا کرتا ہے۔

سوال 9.4: رداس $\rho = 1 \text{ mm}$ اور $\rho = 3 \text{ mm}$ کے ہم محوری تار میں

$$\mathbf{H} = \frac{0.122}{\rho} \cos 5 \times 10^8 \pi t \cos 0.5 \pi z \mathbf{a}_\phi \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

پایا جاتا ہے۔ مستطیل $(0.001, 0^\circ, 0)$ تا $(0.003, 0^\circ, 0)$ تا $(0.003, 0^\circ, 1.5)$ تا $(0.001, 0^\circ, 1.5)$ میں محرک برقی دباؤ حاصل کریں۔

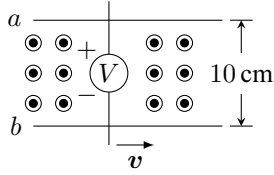
جواب: $119 \sin(5 \times 10^8 \pi t) \text{ V}$

سوال 9.5: لمحہ $t = 0$ پر موصل تار کے مستطیل کے اطراف $x = \pm 0.4 \text{ m}$ اور $y = \pm 0.6 \text{ m}$ پر ہیں۔ یہ مستطیل $6a_y \frac{\text{m}}{\text{s}}$ کی سمتی رفتار سے حرکت کر رہی ہے۔ غیر یکساں مقناطیسی میدان $\mathbf{B} = 3x^2 y a_z \text{ T}$ ہے۔ مستطیل کی مزاحمت $R = 100 \Omega$ ہے۔ مستطیل میں طاقت کی اخراج حاصل کریں۔ ساکن سلاخوں میں کتنی محرک برقی دباؤ پیدا ہوتی ہے۔

جواب: 0 V ، $P = 2.12 \text{ mW}$

سوال 9.6: شکل 9.7 میں دو ساکن موصل سلاخ x محدد کے ساتھ $\theta = \pm 10^\circ$ کا زاویہ بناتے ہیں۔ صفحہ کے بالائی سطح سے نکلتی مقناطیسی میدان $\mathbf{B} = 0.5 a_z \text{ T}$ ہے۔ محرک سلاخ کی رفتار $\mathbf{v} = 8a_x \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ہے۔ ساکن سلاخوں کے بائیں سروں کے درمیان فاصلہ 2 cm ہے۔ ان کے مابین آلہ پیمائش برقی دباؤ v_{ab} ناپتا ہے۔ الف) محرک سلاخ کے مقام کو $t = 0$ پر $x = 0$ لیتے ہوئے آلہ پیمائش پر حاصل برقی دباؤ کو مساوات 9.1 سے حاصل کریں۔ ب) اسی محرک دباؤ کو مساوات 9.13 کے دائیں ہاتھ کی مدد سے حاصل کریں۔ پ) محرک سلاخ کا مقام $x = 50t^2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ہونے کی صورت میں جواب حاصل کریں۔

جوابات: الف اور ب: $v_{ab} = -11.285t - 0.08 \text{ V}$ ، پ: $v_{ab} = -881.6t^3 - t \text{ V}$



شکل 9.8: کھلے دور اور بند دور میں محرک برقی دباؤ۔

سوال 9.7: رداس $\rho = 0.5 \text{ cm}$ اور $\rho = 4 \text{ cm}$ کی ہم محوری تار میں میدان $H_\phi = \frac{5}{\rho} \cos(2\pi \times 10^7 t - 5z)$ پائے جاتے ہیں۔ الف) مساوات 9.28 کے دونوں اطراف حل کرتے ہوئے ثابت کریں کہ ہم محوری تار میں موجود میدان اس پر پورا اترتے ہیں۔ ب) سمتی سطح $0.5 \text{ cm} < \rho < 4 \text{ cm}$ ، $0 < z < 1 \text{ cm}$ اور اس کے محیط پر مساوات 9.4 کے دونوں اطراف حل کرتے ہوئے محرک برقی دباؤ حاصل کریں۔ سمتی سطح کی سمت a_ϕ لیں۔ یوں محیط پر چلتے ہوئے $z = 1 \text{ cm}$ پر a_ρ سمت میں چلنا ہو گا۔

جوابات: $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{40\pi^2}{\rho} \sin(2\pi \times 10^7 t - 5z) a_\phi$
 $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = -\frac{d}{dt} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 52.26 [\cos(2\pi \times 10^7 t - 0.05) - \cos(2\pi \times 10^7 t)] \text{ V}$

سوال 9.8: شکل 9.8 میں $\mathbf{B} = 0.55 a_z \text{ T}$ اور $\mathbf{v} = 6 a_x \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ہیں۔ محرک سلاخ میں انتہائی زیادہ مزاحمت رکھتا بیٹا برقی دباؤ V (الف) ساکن سلاخوں کے بائیں اور دائیں سرے آزاد رکھتے ہوئے بیٹا پر کیا برقی دباؤ حاصل ہوگی۔ ب) ساکن سلاخوں کے بائیں سرے a اور b آپس میں موصل تار سے جوڑنے کے بعد بیٹا پر کیا حاصل ہوگا۔ پ) ساکن سلاخوں کے دائیں سرے آپس میں موصل تار سے جوڑنے کے بعد بیٹا پر کیا حاصل ہوگا۔ ت) ساکن سلاخ کے بائیں سرے آپس میں اور ان کے دائیں سرے آپس میں جوڑ کر بیٹا کیا پڑھے گا۔

جوابات: 0 V ، 3.3 V ، 3.3 V ، 3.3 V

سوال 9.9: برقی میدان $E = E_0 \cos 1500t \frac{\text{V}}{\text{m}}$ کی صورت میں مندرجہ ذیل اشیاء میں ایصالی برقی رد اور انتقالی برقی رو کی شرح حاصل کریں۔ الف) تانبا جس کے مستقل $\epsilon_R = 1$ اور $\sigma = 5.8 \times 10^7 \frac{\text{S}}{\text{m}}$ ہیں۔ ب) مقطر پانی جس کے مستقل $\epsilon_R = 80$ اور $\sigma = 10^{-4} \frac{\text{S}}{\text{m}}$ ہیں۔ پ) کوارٹز جس کے مستقل $\epsilon_R = 3.8$ اور $\sigma = 10^{-17} \frac{\text{S}}{\text{m}}$ ہیں۔

جوابات: $\frac{\sigma}{\omega \epsilon}$ ، 4.4×10^{15} ، 94 ، 2×10^{-10}

سوال 9.10: برقی میدان $E = E_0 e^{\frac{t}{\tau}} \frac{V}{m}$ کی صورت میں مندرجہ ذیل اشیاء میں ایصالی برقی رو اور انتقالی برقی رو کی شرح حاصل کریں جہاں $\tau = 10^{-7}$ کے برابر ہے۔ الف) تانبا جس کے مستقل $\epsilon_R = 1$ اور $\sigma = 5.8 \times 10^7 \frac{S}{m}$ ہیں۔ ب) مقطر پانی جس کے مستقل $\epsilon_R = 80$ اور $\sigma = 10^{-4} \frac{S}{m}$ ہیں۔ پ) کوارٹز جس کے مستقل $\epsilon_R = 3.8$ اور $\sigma = 10^{-17} \frac{S}{m}$ ہیں۔

جوابات: $\frac{\sigma \tau}{\epsilon}$ ، 6.5×10^{11} ، 0.014 ، 2.97×10^{-11}

سوال 9.11: محدد z پر موجود ہم محوری تار کی لمبائی 12 cm جبکہ اس کے رداس 2 mm اور 6 mm ہیں۔ دونوں تاروں کے درمیان مادے کے مستقل $\mu = 5 \times 10^{-6} \frac{H}{m}$ ، $\epsilon = 2 \times 10^{-11} \frac{F}{m}$ اور $\sigma = 4 \times 10^{-5} \frac{S}{m}$ ہیں۔ تار میں $E = \frac{10^4}{\rho} \cos(10^6 t) a_\rho \frac{V}{m}$ کی صورت میں J ، I_c ، J_d ، I_d اور $\frac{|I_d|}{|I_c|}$ حاصل کریں۔

جوابات: $\frac{0.5}{\rho} \cos(10^6 t) a_\rho \frac{A}{m^2}$ ، $0.12\pi \cos 10^6 t A$ ، $-\frac{0.1}{\rho} \sin 10^6 t \frac{A}{m^2}$ ، 0.2 ، $-0.024\pi \sin 10^6 t A$

سوال 9.12: رداس ρ_1 اور ρ_2 کے ہم محوری تار کی لمبائی l ہے۔ تار کو بیرونی دور $V_0 \cos \omega t$ برقی دباؤ فراہم کرتی ہے۔ تار میں برقی میدان E کی مساوات لکھتے ہوئے J_d اور I_d حاصل کریں۔ ثابت کریں کہ انتقالی برقی رو بیرونی دور میں پائی جانے والی ایصالی برقی رو کے برابر ہے۔

جوابات: $E = \frac{V_0 \cos \omega t}{\rho \ln \frac{b}{a}} a_\rho \frac{V}{m}$ ، $J_d = \frac{-\omega \epsilon V_0 \sin \omega t}{\rho \ln \frac{b}{a}} a_\rho$ ، $I_d = -\frac{2\pi l \omega \epsilon V_0 \sin \omega t}{\ln \frac{b}{a}}$ ، $I_c = C \frac{dV}{dt} = -\frac{2\pi l \omega \epsilon V_0 \sin \omega t}{\ln \frac{b}{a}}$

سوال 9.13: مساوات 9.22 کی پہلی مساوات کے دونوں اطراف پھیلاؤ کا عمل استعمال کرتے ہوئے استمراری مساوات حاصل کریں۔

جواب: $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{H} = 0 = \nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho_h}{\partial t}$

سوال 9.14: ایک خطہ جہاں $E = 32 \sin ax \cos 5y \cos(2 \times 10^{10} t) a_z$ ہے کے مستقل $\mu_R = 2.5$ ، $\epsilon_R = 1.2$ اور $\sigma = 0$ ہیں۔ میکس ویل کے مساوات استعمال کرتے ہوئے a کی مثبت قیمت دریافت کریں۔ تمام کھلم کے مستقل کو صفر لیں۔

جواب: $a = 115.44 \text{ m}^{-1}$

سوال 9.15: ایک تریسلی تار میں مقناطیسی میدان $\mathbf{H} = 15 \cos(4 \times 10^9 t - \beta z) \mathbf{a}_x \frac{\text{A}}{\text{m}}$ پایا جاتا ہے۔ تریسلی تار کے درکار مستقل $\mu_R = 1$ ، $\epsilon_R = 5$ اور $\sigma = 0$ ہیں۔ میکس ویل کے مساوات استعمال کرتے ہوئے β کی مثبت قیمت دریافت کریں۔

جواب: $\beta = 29.83 \text{ m}^{-1}$

سوال 9.16: محدود کے مرکز سے گزرتی موصل سطح پر $\mathbf{E} = (33\mathbf{a}_x + 12\mathbf{a}_y + 25\mathbf{a}_z) \cos(10^7 t) \frac{\text{V}}{\text{m}}$ پایا جاتا ہے۔ سطح کے قریب خطے کے مستقل $\sigma = 0$ ، $\epsilon_R = 12$ اور $\mu_R = 1.6$ ہیں۔ نقطہ $(0, 0, 0)$ پر موصل سطح پہ کثافت بار حاصل کریں۔ اس نقطے پر سطح کے متوازی میدان حاصل کریں۔

جوابات: 0 ، $4.58 \cos(10^7 t) \frac{\text{nC}}{\text{m}^2}$

سوال 9.17: خطہ $z < 0$ میں $\epsilon_{R1} = 1$ ، $\mu_{R1} = 1$ اور $\sigma_1 = 0$ ہیں جبکہ خطہ $z > 0$ میں $\epsilon_{R2} = 9$ ، $\mu_{R2} = 4$ اور $\sigma_2 = 0$ ہیں۔ پہلے خطے میں میدان $\mathbf{E}_1 = [10 \cos(10^9 t - 3.336z) - 2 \cos(10^9 t + 3.336z)] \mathbf{a}_y$ اور دوسرے خطے میں $\mathbf{E}_2 = (A \cos(10^9 t - 20.014z)) \mathbf{a}_y$ ہیں۔ الف) مستقل A کی قیمت دریافت کریں۔ ب) مقناطیسی میدان \mathbf{H}_1 اور \mathbf{H}_2 حاصل کریں۔ پ) ثابت کریں کہ مقناطیسی میدان سرحدی شرائط پر پورا اترتے ہیں۔

جوابات: $\mathbf{H}_1 = [-0.0265 \cos(10^9 t - 3.336z) - 0.0053 \cos(10^9 t + 3.336z)] \mathbf{a}_x$ ، $A = 8$ ،

$$\mathbf{H}_{m1} = \mathbf{H}_{m2} \text{ ، } \mathbf{H}_2 = -0.0318 \cos(10^9 t - 20.014z) \mathbf{a}_x$$

سوال 9.18: خالی خلاء میں مساوات 9.9 نکلی محدود میں میدان دیتی ہے۔ خالی خلاء میں $\mathbf{J} = 0$ لیتے ہوئے میکس ویل کی مساوات $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ استعمال کرتے ہوئے \mathbf{E} حاصل کریں۔ حاصل \mathbf{E} سے میکس ویل کی مساوات $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ کی مدد سے واپس \mathbf{B} حاصل کریں۔ یوں ثابت کریں کہ دی گئی میدان میکس ویل کی مساوات پر پورا نہیں اترتا۔

جواب: چونکہ ہمیں واپس ابتدائی میدان حاصل نہیں ہوتا لہذا یہ میدان میکس ویل کی مساوات پر پورا نہیں اترتا۔

باب 9. وقت کے ساتھ بدلتے میدان اور میکس ویل کے مساوات

سوال 9.19: دو عدد ہم محوری موصل نکلی $\rho = 1 \text{ cm}$ اور $\rho = 10 \text{ cm}$ کے ساتھ سطح $z = 0$ اور $z = 50 \text{ cm}$ مل کر ڈبیا بناتے ہیں۔ اس ڈبیا میں موجود ذو برق کے مستقل $\sigma = 0$ ، $\epsilon_R = 1.5$ اور $\mu_R = 2.5$ ہیں جبکہ اس میں درج ذیل میدان پایا جاتا ہے۔

$$H = \frac{10}{\rho} \cos 2\pi z \sin(6\pi 10^7 t) a_\phi \frac{A}{m}$$

الف) نقطہ $N(0.01, 30^\circ, 0.02)$ پر سطحی کثافت برقی رو حاصل کریں۔ ب) برقی میدان E حاصل کریں۔
پ) نقطہ $N(0.015, 0^\circ, 0.2)$ پر سطحی کثافت بار حاصل کریں۔ ت) نقطہ $N(0.015, 0^\circ, 0.2)$ پر انتقالی برقی رو حاصل کریں۔

جوابات: $E = -\frac{25098}{\rho} \sin 2\pi z \cos(6\pi 10^7 t) a_\rho \frac{V}{m}$ ، $K = 992 \sin(6\pi 10^7 t) \frac{A}{m}$
 $J = 3984 \sin(6\pi 10^7 t) a_\rho \frac{A}{m^2}$ ، $\rho_S = -21.1 \cos(6\pi 10^7 t) a_\rho \frac{\mu C}{m^2}$

سوال 9.20: خالی خلاء میں $V = x(z - ct) V$ اور $A = x(\frac{z}{c} - t) a_z \frac{Wb}{m}$ پائے جاتے ہیں جہاں $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$ کے برابر ہے۔ الف) ثابت کریں کہ $\nabla \cdot A = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t}$ کے برابر ہے۔ ب) میدان B ، H ، E اور D حاصل کریں۔ پ) ثابت کریں کہ $J = 0$ اور $\rho_h = 0$ کی صورت میں حاصل میدان میکس ویل کے چار مساواتوں پر پورا اترتے ہیں۔

جوابات: الف) چونکہ $\nabla \cdot A = x \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ اور $\frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{x}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$ ہیں لہذا $\nabla \cdot A = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t}$ ہو گا۔

ب) $B = (t - \frac{z}{c}) a_y T$ ، $H = \frac{1}{\mu_0} (t - \frac{z}{c}) a_y \frac{A}{m}$ ، $E = (ct - z) a_x \frac{V}{m}$ ، $D = \epsilon_0 (ct - z) a_x \frac{V}{m}$
پ) حاصل میدان مساوات 9.28 تا 9.31 پر پورا اترتے ہیں۔

سوال 9.21: خالی خلاء میں دو عدد موصل چادر $y = 0$ اور $y = y_0$ پر پائے جاتے ہیں۔ ان کے درمیان درج ذیل میدان پایا جاتا ہے۔

$$E = 10^4 \cos(10^7 t - 6z) a_y \frac{V}{m}$$

الف) B حاصل کریں۔ ب) $A(x, 0, z, t) = 0$ کی صورت میں $A(x, y, z, t)$ حاصل کریں۔ پ) $V(x, 0, z, t) = 0$ کی صورت میں $V(x, y, z, t)$ حاصل کریں۔

جواب: $A(x, y, z, t) = -\frac{3y}{500} \cos(10^7 t - 6z) a_z \frac{Wb}{m}$ ، $B = -\frac{3}{500} \cos(10^7 t - 6z) a_x \frac{Wb}{m}$ ،

$$V(x, y, z, t) = -3.21 \times 10^8 y \cos(10^7 t - 6z) V$$

باب 10

مستوی امواج

لامحدود خطہ جس کی کوئی سرحد نہ ہو میں میس وبل مساوات کا حل سادہ ترین مسئلہ ہے البتہ اس سے حاصل نتائج انتہائی دلچسپ اور معلوماتی ثابت ہوتے ہیں۔ آپ دیکھیں گے کہ وقت کے ساتھ بدلتا برقی میدان، وقت کے ساتھ بدلتے مقناطیسی میدان کو جنم دیتا ہے جبکہ وقت کے ساتھ بدلتا مقناطیسی میدان، وقت کے ساتھ بدلتے برقی میدان کو جنم دیتا ہے۔ چونکہ برقی میدان بار کی بدولت جبکہ مقناطیسی میدان برقی رو کی بدولت ہے لہذا بار یا رو میں کسی بھی تبدیلی سے باہمی تعاون کے بدلتا برقی اور بدلتا مقناطیسی میدان یعنی برقی و مقناطیسی¹ موج پیدا ہوتی ہے۔ ایسی امواج کی تعدد² کا دارومدار بار یا رو (یا دونوں) میں تبدیلی کی شرح پر منحصر ہے۔ یوں ω زاویائی تعدد³ پر سائن نما شکل میں ارتعاش کرتا بار ω زاویائی تعدد کی سائن نما موج ہی پیدا کرتی ہے۔ برقی و مقناطیسی امواج روشنی کی رفتار سے حرکت کرتی ہیں۔ انسانی آنکھ مخصوص تعدد کی برقی و مقناطیسی امواج دیکھنے کی صلاحیت رکھتی ہے۔ برقی و مقناطیسی امواج کے تعدد کی وہ پٹی جو ہمیں نظر آتی ہیں روشنی⁴ کہلاتی ہے۔ سائن نما موج کو اس کی تعدد f یا دوری عرصے⁵ λ سے بیان کیا جا سکتا ہے۔ ہم 380 nm تا 750 nm کے دوری عرصے کے برقی و مقناطیسی امواج دیکھ سکتے ہیں۔

electromagnetic¹
frequency²
angular frequency³
light⁴
time period⁵

دو اشیاء کی سرحد پر برقی و مقناطیسی موج پر غور کرنے سے شعاعی انعکاس⁶، شعاعی انحراف⁷ اور انکسار امواج⁸ کے حقائق دریافت ہوتے ہیں۔ مختصراً شعاع کے تمام خصوصیات میکس ویل کے مساوات سے حاصل کرنا ممکن ہے۔

10.1 خالی خلاء میں برقی و مقناطیسی مستوی امواج

جیسا کہ آپ جانتے ہیں کہ کسی بھی جسم کے اندر کسی بھی طرح پہنچایا گیا اضافی بار باہمی قوت دفع سے آخر کار حجم کے سطح پر پہنچ جاتا ہے۔ اگر ان لمحات کو نظر انداز کیا جائے جتنی دیر آزاد بار سطح تک پہنچتا ہے تو جسم کے حجم میں $\rho_h = 0$ تصور کیا جاسکتا ہے۔ اس کتاب میں $\rho_h = 0$ ہی تصور کرتے ہوئے برقی و مقناطیسی امواج پر غور کیا جائے گا لہذا ایسا ہی تصور کرتے ہوئے صفحہ 417 پر دئے گئے میکس ویل مساوات یہاں دوبارہ پیش کرتے ہیں

$$(10.1) \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

$$(10.2) \quad \nabla \times \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

$$(10.3) \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$

$$(10.4) \quad \nabla \cdot \mathbf{H} = 0$$

جہاں $D = \epsilon E$ اور $B = \mu H$ کے علاوہ قانون اوہم کی نقطہ شکل $J = \sigma E$ کے استعمال سے تمام مساوات صرف دو متغیرات E اور H کی صورت میں لکھے گئے ہیں۔

اس سے پہلے کہ ہم ان مساوات کو حل کریں، آپس انہیں صرف دیکھ کر فیصلہ کریں کہ خالی خلاء میں ان سے کیا نتائج اخذ کئے جاسکتے ہیں۔ خالی خلاء میں کثافت برقی رو J صفر کے برابر ہوتی ہے۔ اس حقیقت کو مد نظر رکھتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔ مساوات 10.1 کہتی ہے کہ کسی بھی نقطے پر مقناطیسی میدان میں وقت کے ساتھ تبدیلی سے اس نقطے کے گرد برقی میدان کی گردش پیدا ہوتی ہے۔ گردش سے مراد ایسا میدان ہے جو بند دائرے پر اس نقطے کے گرد گھومتی ہو۔ اگر مقناطیسی میدان کی قیمت زیادہ ہو تب برقی گردش کی قیمت بھی زیادہ ہوگی اور اگر مقناطیسی میدان کی قیمت کم ہو تب گردش بھی کم ہوگی۔ یوں دو حقائق سامنے آتے ہیں۔ پہلی حقیقت یہ ہے کہ کسی بھی نقطے پر بدلتا مقناطیسی میدان اس نقطے کے گرد، یعنی نقطے سے ذرا دور، برقی میدان پیدا کرتی ہے اور دوسری حقیقت یہ کہ پہلی میدان کی

reflection⁶
refraction⁷
diffraction⁸

قیمت کم یا زیادہ کرنے سے پیدا میدان کی قیمت بھی تبدیل ہوتی ہے یعنی بدلتا مقناطیسی میدان، بدلتے برقی میدان کو جنم دیتا ہے۔ اسی طرح مساوات 10.2 کہتی ہے کہ کسی بھی نقطے پر برقی میدان میں وقت کے ساتھ تبدیلی سے اس نقطے کے گرد مقناطیسی گردش پیدا ہوتی ہے۔ یہاں بھی صاف واضح ہے کہ کسی بھی نقطے پر برقی میدان میں وقت کے ساتھ تبدیل، اس نقطے سے ذرا دور، بدلتی مقناطیسی میدان پیدا کرتی ہے۔ ایسا معلوم ہوتا ہے کہ بدلتا مقناطیسی میدان کچھ فاصلے پر، آگے کی سمت میں، بدلتا برقی میدان پیدا کرتا ہے جو مزید آگے مقناطیسی میدان پیدا کرتا ہے اور یہ سلسلہ جاری رہتا ہے۔ جیسا کہ ہم جلد دیکھیں گے، ایسے جڑواں، ہاتھ میں ہاتھ ڈالے، حرکت کرتے بدلتے برقی اور بدلتے مقناطیسی میدان کی رفتار $\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}$ یعنی تقریباً $3 \times 10^8 \frac{m}{s}$ ہے جو خالی خلاء میں روشنی کی رفتار ہے۔

10.2 برقی و مقناطیسی مستوی امواج

میکس ویل مساوات کے حل دوری سمیتیاں⁹ کی مدد سے نہایت آسان ہو جاتے ہیں لہذا پہلے دوری سمتیہ پر غور کرتے ہیں جو آپ نے برقی ادوار حل کرتے وقت ضرور استعمال کئے ہوں گے۔

سائن نمائندگی کی عمومی شکل

$$(10.5) \quad E_y = E_{xyz} \cos(\omega t + \psi)$$

ہے جہاں

$$(10.6) \quad \omega = 2\pi f$$

زاویائی تعدد¹⁰ اور ϕ زاویائی فاصلہ¹¹ ہیں جبکہ E_{xyz} از خود x, y, z اور ω کا تابع تفاعل¹² ہو سکتا ہے۔ تعدد f کی اکائی ہرتز¹³ ہے۔ یہاں دھیان رہے کہ E_{xyz} وقت t کا تابع نہیں ہے۔

کسی بھی متغیر x کے لئے یولر مماثل¹⁴ کو $e^{jx} = \cos x + j \sin x$ لکھا جاتا ہے جہاں $j = \sqrt{-1}$ خیالی عدد¹⁵ ہے۔ آزاد متغیر $\omega t + \psi$ کے لئے یولر مماثل

$$e^{j(\omega t + \psi)} = \cos(\omega t + \psi) + j \sin(\omega t + \psi)$$

⁹ phasor

¹⁰ angular frequency

¹¹ phase angle

¹² dependent function

¹³ Hertz

¹⁴ Euler's identity

¹⁵ imaginary number

لکھا جا سکتا ہے جو حقیقی¹⁶ اور خیالی¹⁷ اجزاء پر مشتمل مخلوط تفاعل¹⁸ ہے۔ یوں $\cos(\omega t + \psi)$ کو $e^{j(\omega t + \psi)}$ کا حقیقی جزو تصور کیا جا سکتا ہے۔ اس طرح

$$E_y = E_{xyz} \cos(\omega t + \psi) = \left[E_{xyz} e^{j(\omega t + \psi)} \right]_{\text{حقیقی}} = \left[E_{xyz} e^{j\omega t} e^{j\psi} \right]_{\text{حقیقی}}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں زیر نوشت میں حقیقی لکھنے سے مراد یہ ہے کہ پورے تفاعل کا حقیقی جزو لیا جائے۔ مندرجہ بالا مساوات کو بطور دوری سمتیہ یوں

$$E_{ys} = E_{xyz} e^{j\psi}$$

لکھا جاتا ہے جہاں $e^{j\omega t}$ اور زیر نوشت میں حقیقی کو پوشیدہ رکھا جاتا ہے۔ اس مساوات کے بائیں ہاتھ E_{ys} لکھتے ہوئے زیر نوشت میں s یاد دلاتی ہے کہ یہ مساوات دوری سمتیہ کی شکل میں لکھی گئی ہے لہذا یاد رہے کہ اصل تفاعل میں $e^{j\omega t}$ پایا جاتا ہے اور پورے تفاعل کا صرف حقیقی جزو ہی لیا جائے۔ تفاعل E_{ys} کے زیر نوشت میں s دراصل اس حقیقت کو ظاہر کرتی ہے کہ اس تفاعل کا آزاد متغیر، مخلوط تعدد¹⁹ ہے۔ ہمارے استعمال میں s خیالی عدد یعنی $s = j\omega$ ہو گا۔

اب $E_y = 10.5 \cos(10^6 t - 0.35z)$ کو دوری سمتیہ کی شکل میں لکھنے کی خاطر اسے یولر مماثل کے حقیقی جزو

$$E_y = \left[10.5 e^{j(10^6 t - 0.35z)} \right]_{\text{حقیقی}} = \left[10.5 e^{j10^6 t} e^{-j0.35z} \right]_{\text{حقیقی}}$$

لکھنے کے بعد $e^{j10^6 t}$ اور زیر نوشت میں حقیقی کو پوشیدہ رکھتے ہوئے یوں

$$E_{ys} = 10.5 e^{-j0.35z}$$

لکھا جائے گا جہاں بائیں ہاتھ E_{ys} میں زیر نوشت میں s کا اضافہ کیا گیا۔ یاد رہے کہ E_y حقیقی تفاعل ہے جبکہ E_{ys} عموماً مخلوط تفاعل ہوتا ہے۔

دوری سمتیہ سے اصل تفاعل حاصل کرنے کی خاطر اسے $e^{j\omega t}$ سے ضرب دیتے ہوئے حاصل جواب کا حقیقی جزو لیا جاتا ہے۔

real¹⁶
imaginary¹⁷
complex function¹⁸
complex frequency¹⁹

مساوات 10.5 کا وقت کے ساتھ جزوی تفرق

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_y}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} [E_{xyz} \cos(\omega t + \psi)] = -\omega E_{xyz} \sin(\omega t + \psi) \\ &= \left[j\omega E_{xyz} e^{j(\omega t + \psi)} \right]_{\text{حقیقی}}\end{aligned}$$

کے برابر ہے۔ یہ عمومی نتیجہ ہے جس کے تحت وقت کے ساتھ تفاعل کا تفرق، دوری سمتیہ کو $j\omega$ سے ضرب دینے کے مترادف ہے۔ یوں مثال کے طور پر اگر

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = -\frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial H_y}{\partial z}$$

ہو تب اسی کی دوری سمتیہ شکل

$$j\omega E_{xs} = -\frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial H_y}{\partial z}$$

ہو گی۔ اسی طرح سائن نما میدان کے لئے میکس ویل کے مساوات بھی با آسانی دوری سمتیہ کی شکل میں لکھے جاسکتے ہیں لہذا

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

کو دوری سمتیہ کی صورت میں

$$(10.7) \quad \nabla \times \mathbf{E}_s = -j\omega\mu \mathbf{H}_s$$

لکھا جائے گا۔ میکس ویل کے بقایا مساوات کو بھی دوری سمتیہ کی صورت میں لکھتے ہیں۔

$$(10.8) \quad \nabla \times \mathbf{H}_s = (\sigma + j\omega\epsilon) \mathbf{E}_s$$

$$(10.9) \quad \nabla \cdot \mathbf{E}_s = 0$$

$$(10.10) \quad \nabla \cdot \mathbf{H}_s = 0$$

آئیں ان مساوات سے امواج کی مساوات حاصل کریں۔ ایسا کرنے کی خاطر مساوات 10.7 کی گردش

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_s = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}_s) - \nabla^2 \mathbf{E}_s = -j\omega\mu \nabla \times \mathbf{H}_s$$

میں مساوات 10.8 اور مساوات 10.9 پر کرنے سے

$$(10.11) \quad \nabla^2 \mathbf{E}_s = j\omega\mu (\sigma + j\omega\epsilon) \mathbf{E}_s = \gamma^2 \mathbf{E}_s$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

$$(10.12) \quad \gamma = \mp \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)}$$

حرکی مستقل²⁰ کہلاتا ہے۔ چونکہ $j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)$ مخلوط عدد ہے لہذا اس کا جزر γ بھی مخلوط عدد ہو گا جسے

$$(10.13) \quad \gamma = \alpha + j\beta$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں α اور β مثبت اور حقیقی اعداد ہیں۔ مساوات 10.12 کو یوں بھی لکھا جا سکتا ہے

$$(10.14) \quad \gamma = j\omega\sqrt{\mu\epsilon}\sqrt{1 - j\frac{\sigma}{\omega\epsilon}}$$

جہاں کسی وجہ سے صرف مثبت قیمت لی گئی ہے۔ یہ وجہ آپ کو جلد بتلا دی جائے گی۔

مساوات 10.11 سمٹی ہلم ہولٹز مساوات²¹ کہلاتی ہے۔ کارٹیزیی محدود میں بھی سمٹی ہلم ہولٹز مساوات کی بڑی شکل کافی پیچیدہ نظر آتی ہے چونکہ اس سے چار چار اجزاء پر مشتمل تین عدد مساوات نکلتے ہیں۔ کارٹیزیی محدود میں اس کی x مساوات

$$(10.15) \quad \nabla^2 E_{xs} = \gamma^2 E_{xs}$$

یعنی

$$(10.16) \quad \frac{\partial^2 E_{xs}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_{xs}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_{xs}}{\partial z^2} = \gamma^2 E_{xs}$$

ہے۔ ہم فرض کرتے ہیں کہ ہمارے دلچسپی کے میدان نا تو x اور نا ہی y کے ساتھ تبدیل ہوتے ہیں۔ ایسی صورت میں $\frac{\partial^2 E_{xs}}{\partial x^2} = 0$ اور $\frac{\partial^2 E_{xs}}{\partial y^2} = 0$ ہوں گے لہذا مندرجہ بالا مساوات

$$(10.17) \quad \frac{\partial^2 E_{xs}}{\partial z^2} = \gamma^2 E_{xs}$$

صورت اختیار کر لے گی۔ اس طرح کے دو درجی تفرقی مساوات آپ نے پڑھی ہو گی لہذا میں توقع رکھتا ہوں کہ آپ اس کے حل

$$(10.18) \quad E_{xs} = Ae^{-\gamma z}$$

²⁰propagation constant
²¹vector Helmholtz equation
²²ہرمن لڈوگ فرڈینانڈون ہلم ہولٹز جرمنی کے عالم طبیعیات تھے۔

اور

$$(10.19) \quad E_{xs} = Be^{\gamma z}$$

لکھ سکتے ہیں۔

آئیں $\gamma = \alpha + j\beta$ پر کرتے ہوئے ان جوابات میں سے مساوات 10.18 پر غور کریں۔ مساوات 10.18 در حقیقت دوری سمتیہ ہے لہذا اسے $e^{j\omega t}$ سے ضرب دے کر

$$\begin{aligned} E_x &= \left[Ae^{j\omega t} e^{-(\alpha+j\beta)z} \right]_{\text{حقیقی}} \\ &= \left[Ae^{-\alpha z} e^{j(\omega t - \beta z)} \right]_{\text{حقیقی}} \end{aligned}$$

حقیقی جزو

$$E_x = Ae^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z)$$

لیتے ہیں۔ مساوات کے مستقل A کی جگہ $t = 0$ اور $z = 0$ پر میدان کی قیمت E_0 پر کرتے ہوئے اصل حل

$$(10.20) \quad E_x = E_0 e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z)$$

لکھا جا سکتا ہے۔ یہ مستوی موج²³ کی وہ مساوات ہے جس کی تلاش میں ہم نکلے تھے۔ اگر ہم مساوات 10.19 کو لے کر آگے بڑھتے تو مساوات 10.20 کی جگہ موج کی مساوات

$$(10.21) \quad E_x = E_0 e^{\alpha z} \cos(\omega t + \beta z)$$

حاصل ہوتی۔

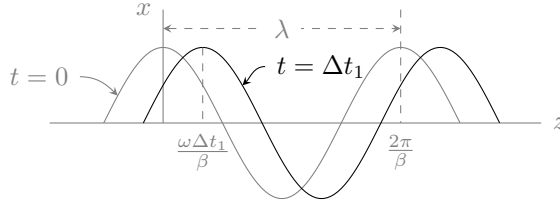
مساوات 10.18 میں $A = E_0$ پر کرتے ہوئے اس کی سمتیہ شکل

$$(10.22) \quad \mathbf{E}_s = E_0 e^{-\gamma z} \mathbf{a}_x$$

لکھی جا سکتی ہے جو صرف \mathbf{a}_x جزو پر مشتمل ہے۔ آئیں مساوات 10.20 میں دئے متحرک موج²⁴ پر اب غور کریں۔

مساوات 10.20 کہتی ہے کہ برقی میدان ہر نقطے پر x محدد کے متوازی ہے۔ اگر z کی قیمت تبدیل نہ کی جائے تب x اور y تبدیل کرنے سے میدان تبدیل نہیں ہوتا۔

plane wave²³
travelling wave²⁴



شکل 10.1: وقت $t = 0$ اور $t = t_1$ پر خلاء میں موج کا مقام۔

مساوات 10.20 میں z بڑھانے سے α کی وجہ سے موج کی چوٹی گھٹتی ہے لہذا α تضعیفی مستقل²⁵ کہلاتا ہے۔ موج کی چوٹی طاقت کے ضیاع کی وجہ سے گھٹتی ہے۔ یوں بے ضیاع²⁶ خطے میں $\alpha = 0$ ہو گا جبکہ ضیاع کار²⁷ خطے میں $\alpha > 0$ ہو گا۔ تضعیفی مستقل کو نیپر²⁸ فی میٹر $\frac{\text{Np}}{\text{m}}$ میں ناپا جاتا ہے۔ یوں مساوات 10.20 میں e کی طاقت یعنی αz بے بعد³⁰ مقدار نیپر Np میں ہو گی۔ موج کی مساوات میں $-\beta z$ زاویائی فاصلہ ہے جسے ریڈیئن میں ناپا جاتا ہے لہذا β زاویائی مستقل³¹ کہلاتا ہے جبکہ اس کی اکائی ریڈیئن فی میٹر $\frac{\text{rad}}{\text{m}}$ ہے۔

بے ضیاع خطے میں $\alpha = 0$ جبکہ ضیاع کار خطے میں $\alpha > 0$ ہو گا۔ اس کتاب میں انہیں غیر عامل³² خطوں پر بحث کی جائے گی۔ یہاں بتلاتا چلوں کہ $\alpha < 0$ بھی ممکن ہے۔ ایسی صورت میں موج کا حیثہ مسلسل بڑھتا جائے گا۔ منفی α کی صورت میں α کو افزائشی مستقل³³ کہا جاتا ہے۔ لیزر³⁴ میں $\alpha < 0$ حاصل کرتے ہوئے شعاع کی طاقت بڑھائی جاتی ہے۔ لیزر عامل³⁵ خطہ ہے۔

موج کی مساوات میں $\alpha = 0$ تصور کرتے ہوئے اسے وقت $t = 0$ پر شکل 10.1 میں ہلکی سیاہی سے دکھایا گیا ہے۔ یہاں دھیان رہے کہ شکل میں z محدود کو افقی دکھایا گیا ہے۔ جیسے آپ دیکھ سکتے ہیں $t = 0$ پر موج کی دو آپس میں قریبی چوٹیاں $z = 0$ اور $z = \frac{2\pi}{\beta}$ پر پائی جاتی ہیں۔ دو آپس میں قریبی چوٹیوں کے درمیان فاصلے کو طول

attenuation constant²⁵

loss less²⁶

lossy²⁷

neper²⁸

تضعیفی مستقل کی اکائی جان نیپر کے نام سے منسوب ہے۔

dimensionless³⁰

phase constant³¹

passive³²

gain coefficient³³

laser³⁴

active region³⁵

موج³⁶ کہا جاتا ہے اور λ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ یوں اس موج کی طول موج

(10.23)

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$$

ہے جس سے

(10.24)

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$$

لکھا جاسکتا ہے جو انتہائی اہم نتیجہ ہے۔

موج کی مساوات ہی کو وقت $t = \Delta t_1$ پر شکل 10.1 میں دوبارہ گاڑھی سیاہی میں بھی دکھایا گیا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اس دورانیے میں موج نے دائیں جانب یعنی z بڑھنے کی طرف حرکت کی ہے۔ یوں صاف ظاہر ہے کہ یہ موج وقت کے ساتھ مثبت z جانب حرکت کر رہی ہے۔ دورانیے Δt_1 میں موج کی چوٹی نے $\frac{\omega \Delta t_1}{\beta}$ فاصلہ طے کیا ہے لہذا موج کے رفتار کو

(10.25)

$$v = \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\omega \Delta t_1}{\beta} \frac{1}{\Delta t_1} = \frac{\omega}{\beta}$$

لکھا جاسکتا ہے۔

مساوات 10.24 کو مساوات 10.25 میں پر کرنے سے

(10.26)

$$v = f\lambda$$

حاصل ہوتا ہے جو λ طول موج اور f تعدد رکھنے والے موج کی رفتار v دیتی ہے۔

مساوات 10.20 میں مساوات 10.25 استعمال کرتے ہوئے

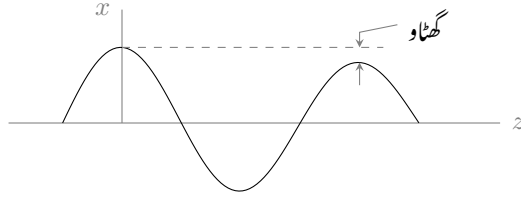
(10.27)

$$E_x = E_0 e^{-\alpha z} \cos \left[\omega \left(t - \frac{z}{v} \right) \right]$$

حاصل ہوتا ہے جسے مساوات 10.25 اور مساوات 10.24 کی مدد سے

(10.28)

$$E_x = E_0 e^{-\alpha z} \cos \left(\omega t - \frac{2\pi z}{\lambda} \right)$$



شکل 10.2: موج چلتے ہوئے آہستہ آہستہ کمزور ہوتی رہتی ہے۔

بھی لکھا جا سکتا ہے۔

موج کی رفتار کو مساوات 10.20 سے دوبارہ حاصل کرتے ہیں۔ اس مساوات کے تحت کسی بھی لمحہ t پر موج کی چوٹی اس مقام پر ہوگی جہاں

$$\omega t - \beta z = 0$$

ہو۔ چونکہ رفتار $\frac{dz}{dt}$ کو کہتے ہیں لہذا اس مساوات کے تفرق

$$\omega dt - \beta dz = 0$$

سے رفتار

$$(10.29) \quad v = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{\beta}$$

حاصل ہوتی ہے۔

شکل 10.2 میں α کو صفر تصور نہیں کیا گیا ہے۔ ایسی صورت میں موج کی چوٹی، z کے ساتھ بتدریج گھٹتی ہے لہذا $\alpha = 0.001 \frac{\text{NP}}{\text{m}}$ کی صورت میں 1 km کے فاصلے پر موج کی چوٹی، ابتدائی چوٹی کے $\frac{e^{-1}}{e^0} = 0.368$ گنا رہ گئی ہو گی جہاں ابتدائی چوٹی $z = 0$ پر لی گئی ہے۔

برقی موج E_s سے مساوات 10.7

$$\nabla \times \mathbf{E}_s = -j\omega\mu\mathbf{H}_s$$

کی مدد سے مقناطیسی موج باآسانی حاصل ہوتی ہے۔ مساوات 10.22 استعمال کرتے ہوئے مندرجہ بالا مساوات سے

$$-\gamma E_0 e^{-\gamma z} \mathbf{a}_y = -j\omega\mu\mathbf{H}_s$$

یا

$$\mathbf{H}_s = \frac{\gamma}{j\omega\mu} E_0 e^{-\gamma z} \mathbf{a}_y$$

حاصل ہوتا ہے جس میں مساوات 10.12 سے مثبت γ کی قیمت پر کرنے سے

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_s &= \sqrt{\frac{\sigma + j\omega\epsilon}{j\omega\mu}} E_0 e^{-\gamma z} \mathbf{a}_y \\ (10.30) \quad &= \frac{E_0}{Z} e^{-\gamma z} \mathbf{a}_y \end{aligned}$$

ملتا ہے جہاں دوسرے قدم پر

$$(10.31) \quad Z = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}}$$

لکھا گیا ہے۔ اس مساوات کو

$$(10.32) \quad Z = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{1}{\sqrt{1 - j\frac{\sigma}{\omega\epsilon}}}$$

بھی لکھا جا سکتا ہے۔

مساوات 10.22 کی غیر سمتی صورت یعنی $E_{xs} = E_0 e^{-\gamma z}$ کو مساوات 10.30 کے غیر سمتی صورت یعنی H_{ys} سے تقسیم کرتے ہوئے

$$(10.33) \quad \frac{E_{xs}}{H_{ys}} = Z$$

ملتا ہے۔

یہاں ذرا رک کر ایک برقی دور پر غور کرتے ہیں۔ منبع برقی دباؤ $V_0 \cos(\omega t - \psi)$ جسے دوری سمتیہ $V_0 e^{-j\psi}$ لکھا جا سکتا ہے کے ساتھ سلسلہ وار مزاحمت R ، امالہ L اور برقی گیر (کپیسٹر) C جڑے ہیں جن کی رکاوٹ Z

$$Z = R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) = R + jX = |Z| e^{j\theta_z} = |Z| \angle \theta_z$$

لکھی جاسکتی ہے جہاں $\frac{1}{\omega C} > \omega L$ کی صورت میں X مثبت ہو گا جبکہ $\frac{1}{\omega C} < \omega L$ کی صورت میں یہ منفی ہو گا۔ مزید $\frac{1}{\omega C} = \omega L$ کی صورت میں دور خالص مزاحمتی رکاوٹ پیش کرے گا اور $\theta_Z = 0$ ہو گا۔ اس دور میں برقی رو دوری سمتیہ کی مدد سے

$$I_s = \frac{V_s}{Z_s} = \frac{V_0 e^{-j\psi}}{|Z| e^{j\theta_Z}} = \frac{V_0}{|Z|} e^{-j(\psi + \theta_Z)}$$

حاصل ہوتا ہے جس سے

$$i = \frac{V_0}{|Z|} \cos(\omega t - \psi - \theta_Z)$$

لکھا جاسکتا ہے۔ برقی دباؤ اور برقی رو ایک ہی تعدد رکھتے ہیں البتہ ان میں زاویائی فاصلہ θ_Z پایا جاتا ہے۔ مثبت X کی صورت میں برقی رو اس زاویائی فاصلے کے برابر برقی دباؤ کے پیچھے رہتی ہے جبکہ منفی X کی صورت میں برقی رو اس زاویائی فاصلے کے برابر برقی دباؤ کے آگے رہتی ہے۔ ہم دیکھتے ہیں کہ برقی دباؤ اور برقی رو کی شرح

$$\frac{V_s}{I_s} = |Z| e^{j\theta_Z} = Z$$

کے برابر ہے جسے رکاوٹ کہتے ہیں۔

آئیں اب دوبارہ امواج کی بات کریں۔ برقی موج کو برقی دباؤ تصور کرتے ہوئے اور مقناطیسی موج کو برقی رو تصور کرتے ہوئے آپ دیکھیں گے کہ دونوں مسائل ہو بہو یکساں ہیں۔ اسی وجہ سے برقی موج E_{xs} اور مقناطیسی موج H_{ys} کی شرح Z ، قدرتی رکاوٹ³⁷ کہلاتی ہے۔ بالکل برقی رکاوٹ کی طرح قدرتی رکاوٹ حقیقی یا خیالی یا مخلوط عدد ہو سکتا ہے۔ قدرتی رکاوٹ کی اکائی اوہم Ω ہے۔

مساوات 10.30 سے مقناطیسی موج

$$(10.34) \quad H_y = \frac{E_0 e^{-\alpha z}}{|Z|} \cos(\omega t - \beta z - \theta_Z)$$

لکھی جائے گی جہاں قدرتی رکاوٹ کو

$$(10.35) \quad Z = |Z| e^{j\theta_Z}$$

³⁷intrinsic impedance

لکھا گیا۔

مساوات 10.20 کے تحت برقی میدان x محدد کے متوازی ہے جبکہ مساوات 10.34 کے تحت مقناطیسی میدان y محدد کے متوازی ہے لہذا یہ میدان آپس میں ہر وقت عمودی رہتے ہیں۔ اس کے علاوہ دونوں امواج z سمت میں حرکت کر رہے ہیں۔ یوں میدان کی سمت اور حرکت کی سمت بھی آپس میں عمودی ہیں۔ ایسی امواج جن میں میدان کی سمت اور حرکت کی سمت عمودی ہوں عرضی امواج³⁸ کہلاتے ہیں۔ پانی کی سطح پر لہریں بھی عرضی امواج ہوتی ہیں۔ اسی طرح رسی کو کھینچ کر رکھتے ہوئے اسے جھٹکے سے ہلانے سے رسی میں عرضی موج پیدا ہوتی ہے۔ عرضی برقی و مقناطیسی موج³⁹ میں برقی میدان اور مقناطیسی میدان دونوں حرکت کے سمت کے عمودی ہوتے ہیں۔ باب 13 میں ایسی امواج پر غور کیا جائے گا جن میں صرف ایک میدان سمت حرکت کے عمودی ہو گا۔ انہیں عرضی برقی موج⁴⁰ یا عرضی مقناطیسی موج⁴¹ کا نام دیا گیا ہے۔

آئیں اب چند مخصوص صورتوں میں ان مساوات کو استعمال کرنا سیکھیں۔

10.2.1 خالی خلاء میں امواج

خالی خلاء میں $\sigma = 0$ ، $\mu_R = 1$ اور $\epsilon_R = 1$ ہیں لہذا مساوات 10.12 سے مثبت حرکی مستقل

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu_R\mu_0(\sigma + j\omega\epsilon_R\epsilon_0)} = j\omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$$

حاصل ہوتا ہے جس سے

$$\alpha = 0$$

$$\beta = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ چونکہ خالی خلاء میں $\alpha = 0$ ہے لہذا خالی خلاء بے ضیاع خطہ ہے۔ یوں خالی خلاء میں برقی و مقناطیسی امواج کی رفتار، جسے روایتی طور پر c سے ظاہر کیا جاتا ہے، مساوات 10.25 سے

$$(10.36) \quad c = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}$$

³⁸transverse waves

³⁹transverse electromagnetic, TEM

⁴⁰transverse electric wave, TE wave

⁴¹transverse magnetic wave, TM wave

حاصل ہوتی ہے جس کی قیمت

$$c = \frac{1}{\sqrt{4 \times \pi \times 10^{-7} \times 8.854 \times 10^{-12}}} = 2.99 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\approx 3 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

ہے۔

مساوات 10.31 سے خالی خلاء کی قدرتی رکاوٹ

$$Z_0 = \sqrt{\frac{j\omega\mu_R\mu_0}{\sigma + j\omega\epsilon_R\epsilon_0}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$$

حاصل ہوتی ہے۔ قدرتی رکاوٹ کی قیمت حاصل کرنے کی خاطر ہم 9×10^9 سے $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ لکھتے ہوئے

$$(10.37) \quad Z_0 = 120\pi \approx 377 \Omega$$

حاصل کرتے ہیں۔ یوں خالی خلاء میں کسی بھی لمحے، کسی بھی نقطے پر برقی میدان کی قیمت اس نقطے پر مقناطیسی میدان کے 377 گنا ہوگی۔

حرکی مستقل اور قدرتی رکاوٹ کی قیمتیں استعمال کرتے ہوئے خالی خلاء میں متحرک موج کے میدان

$$E_x = E_0 \cos \left[\omega \left(t - \frac{z}{c} \right) \right]$$

$$H_y = \frac{E_0}{120\pi} \cos \left[\omega \left(t - \frac{z}{c} \right) \right]$$

لکھے جائیں گے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ دونوں میدان ہم زاویہ ہیں۔ یوں کسی بھی نقطے پر بڑھتے برقی میدان کی صورت میں اس نقطے پر مقناطیسی میدان بھی بڑھتا ہے۔ ان مساوات کے تحت امواج بالکل سیدھے حرکت کرتی ہیں اور نا وقت اور نا ہی فاصلے کے ساتھ ان کی طاقت میں کسی قسم کی کمی رونما ہوتی ہے۔ یہی وجہ ہے کہ کائنات کی دور ترین کہکشاؤں سے ہم تک برقی و مقناطیسی امواج پہنچتی ہیں اور ہمیں رات میں چمکتے اور خوبصورت تارے نظر آتے ہیں۔

مشق 10.1: بے تار⁴² ذرائع ابلاغ میں 36 000 km کی اونچائی پر پرواز کرتے مصنوعی سیارے اہم کردار ادا کرتے ہیں۔ یہ سیارے زمین کے اوپر ایک ہی نقطے پر آویزاں نظر آتے ہیں۔ ان سیاروں سے زمین کے قریبی نقطے تک برقی اشارہ کتنی دیر میں پہنچے گا۔

جواب: 0.12 s

مثال 10.1: خالی خلاء میں 240 MHz تعدد کی موج بڑھتے a_z سمت میں حرکت کر رہی ہے۔ الف) λ ، β اور ω دریافت کریں۔ ب) لمحہ $t = 0$ پہ موج کی $128 \frac{V}{m}$ چوٹی مجدد کے مرکز پر پائی جاتی ہے۔ موج کی حقیقی اور دوری مساوات لکھیں۔ پ) اگر موج کی چوٹی لمحہ $t = 1.2 \text{ ns}$ پر نقطہ $z = 25 \text{ cm}$ پہ ہو تب موج کی مساوات کیا ہوگی؟

حل: الف) موج کی رفتار $c = 3 \times 10^8 \frac{m}{s}$ لیتے ہوئے

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \times 10^8}{240 \times 10^6} = \frac{5}{4} \text{ m}$$

اور یوں

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{8\pi}{5} \frac{\text{rad}}{\text{m}}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ اب زاویائی تعدد حاصل کرتے ہیں۔

$$\omega = 2\pi f = 4.8\pi \times 10^8 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

ب) حقیقی مساوات

$$E = 128 \cos \left(4.8\pi \times 10^8 t - \frac{8\pi}{5} z \right)$$

ہے جبکہ دوری مساوات مندرجہ ذیل ہے۔

$$E = 128e^{-j\frac{8\pi}{5}z}$$

پ) اب موج تاخیر سے محدود کے مرکز پر پہنچتی ہے۔ موج کا تاخیری زاویہ θ لکھتے ہوئے موج کی مساوات

$$E = 128 \cos \left(4.8\pi \times 10^8 t - \frac{8\pi}{5}z + \theta \right)$$

ہوگی۔ موج کی چوٹی $(4.8\pi \times 10^8 t - \frac{8\pi}{5}z + \theta) = 0$ پر ہوگی لہذا $t = 1.2 \text{ ns}$ اور $z = 0.25 \text{ m}$ پر کرتے ہوئے $\theta = -0.176\pi$ حاصل ہوتا ہے۔ یہ قیمت مندرجہ بالا مساوات میں استعمال کی جائے گی۔ موج کی دوری مساوات مندرجہ ذیل ہے۔

$$E_s = 128e^{-j\pi(\frac{8}{5}z + 0.176)}$$

مثال 10.2: لمحہ $t = 0$ پہ محدود کے مرکز پر موج کی چوٹی $340 \frac{\text{V}}{\text{m}}$ پائی جاتی ہے جبکہ $z = 1.5 \text{ m}$ وہ قریب ترین نقطہ ہے جہاں میدان صفر کے برابر ہے۔ موج گھٹنے z کی سمت میں حرکت کر رہی ہے۔ اس لمحہ برقی میدان اکائی سمتیہ $a_E = \frac{2}{\sqrt{13}}a_x + \frac{3}{\sqrt{13}}a_y$ کی سمت میں ہے۔ برقی موج کی مساوات لکھیں۔

حل: موج کی چوٹی اور صفر کے درمیان فاصلے سے $\frac{\lambda}{4} = 1.5$ لکھ کر $\lambda = 6 \text{ m}$ حاصل ہوتا ہے جس کو استعمال کرتے ہوئے ہم $\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{3}$ اور $f = \frac{3 \times 10^8}{6} = 50 \text{ MHz}$ حاصل کرتے ہیں۔ چونکہ موج گھٹنے z جانب حرکت کر رہی ہے اور لمحہ $t = 0$ پر اس کی چوٹی محدود کے مرکز پر پائی جاتی ہے لہذا

$$E = E_0 \cos \left(2\pi \times 50 \times 10^6 t + \frac{\pi}{3}z \right)$$

لکھا جائے گا۔ لمحہ $t = 0$ پر محدود کے مرکز پر میدان $340a_E$ پایا جاتا ہے لہذا موج کی مکمل خاصیت مندرجہ ذیل مساوات بیان کرے گی۔

$$E = 340 \left[\frac{2}{\sqrt{13}}a_x + \frac{3}{\sqrt{13}}a_y \right] \cos \left(2\pi \times 50 \times 10^6 t + \frac{\pi}{3}z \right)$$

اس کی دوری شکل مندرجہ ذیل ہے۔

$$\mathbf{E}_s = 340 \left[\frac{2}{\sqrt{13}} \mathbf{a}_x + \frac{3}{\sqrt{13}} \mathbf{a}_y \right] e^{j\frac{\pi}{3}z}$$

مثال 10.3: خالی خلاء میں برقی موج $\mathbf{E}_s = 340 \left[\frac{2}{\sqrt{13}} \mathbf{a}_x + \frac{3}{\sqrt{13}} \mathbf{a}_y \right] e^{j\frac{\pi}{3}z}$ پائی جاتی ہے۔ مقناطیسی موج کی مساوات لکھیں۔
حل: خالی خلاء میں

$$\frac{E_0}{H_0} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi$$

سے مقناطیسی چوٹی کی قیمت

$$H_0 = \frac{340}{120\pi} = \frac{17}{6\pi}$$

حاصل ہوتی ہے۔ یہ حقیقی عدد ہے لہذا برقی اور مقناطیسی میدان ہم قدم ہیں۔ خالی خلاء میں موج کے برقی اور مقناطیسی میدان آپس میں عمودی ہوتے ہیں۔ یوں مقناطیسی موج کی سمت میں سمتیہ $x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y$ اور برقی موج کی سمت میں سمتیہ \mathbf{a}_E کا غیر سمتی ضرب صفر کے برابر ہو گا یعنی

$$\left(\frac{2}{\sqrt{13}} \mathbf{a}_x + \frac{3}{\sqrt{13}} \mathbf{a}_y \right) \cdot (x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y) = 0$$

ہو گا جس سے

$$(10.38) \quad 2x + 3y = 0$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس میں x کی کوئی بھی قیمت پر کرتے ہوئے y کی قیمت حاصل ہوتی ہے۔ یوں $x = 1$ پر کرنے سے $y = -\frac{2}{3}$ حاصل ہوتا ہے۔ یوں مقناطیسی میدان $\mathbf{a}_H = \frac{1}{\sqrt{13}} \left(\mathbf{a}_x - \frac{2}{3} \mathbf{a}_y \right)$ سمتیہ کی سمت میں ہو گی۔ اس طرح مقناطیسی میدان کی سمت میں اکائی سمتیہ

$$\mathbf{a}_H = \frac{\mathbf{a}_x - \frac{2}{3} \mathbf{a}_y}{\sqrt{1 + \frac{4}{9}}} = \frac{3}{\sqrt{13}} \mathbf{a}_x - \frac{2}{\sqrt{13}} \mathbf{a}_y$$

ہوگی۔ یاد رہے کہ $\mathbf{a}_E \times \mathbf{a}_H$ سے موج کی حرکت کی سمت حاصل ہوتی ہے۔ ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\mathbf{a}_E \times \mathbf{a}_H = \left(\frac{2}{\sqrt{13}}\mathbf{a}_x + \frac{3}{\sqrt{13}}\mathbf{a}_y \right) \times \left(\frac{3}{\sqrt{13}}\mathbf{a}_x - \frac{2}{\sqrt{13}}\mathbf{a}_y \right) = -\mathbf{a}_z$$

کے برابر ہے جو موج کی درست سمت ہے۔ اب ہم مساوات 10.38 میں x کی قیمت منفی بھی پر کر سکتے تھے۔ انہیں ایسا بھی کر کے دیکھ لیں۔ اگر ہم $x = -1$ پر کرتے تب $y = \frac{2}{3}$ حاصل ہوتا جس سے اکائی سمتیہ $-1\mathbf{a}_x + \frac{2}{3}\mathbf{a}_y$ حاصل ہوتی۔ اس اکائی سمتیہ اور \mathbf{a}_E کے سمتی ضرب سے \mathbf{a}_z حاصل ہوتا ہے جو بالکل الٹ سمت میں حرکت کرتی موج کی سمت ہے۔ ظاہر ہے کہ ہم ان دو جوابات میں سے پہلے جواب کو ہی یہاں درست تسلیم کریں گے۔ یوں مقناطیسی موج کی دوری مساوات مندرجہ ذیل ہوگی۔

$$\mathbf{H}_s = H_0 \mathbf{a}_H e^{j\frac{\pi}{3}z} = \frac{17}{6\pi} \left(\frac{3}{\sqrt{13}}\mathbf{a}_x - \frac{2}{\sqrt{13}}\mathbf{a}_y \right) e^{j\frac{\pi}{3}z}$$

10.2.2 خالص یا کامل ذوبرق میں امواج

خالص یا کامل ذوبرق سے مراد ایسا ذوبرق ہے جس میں متحرک برقی و مقناطیسی امواج کی توانائی ضائع نہیں ہوتی۔ خالص ذوبرق میں $\sigma = 0$ جبکہ اس کا جزوی مقناطیسی مستقل μ_R اور جزوی برقی مستقل ϵ_R ہے لہذا مساوات 10.12 سے مثبت حرکی مستقل

$$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\epsilon}$$

حاصل ہوتا ہے جس سے

$$(10.39) \quad \alpha = 0$$

$$(10.40) \quad \beta = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ کامل ذوبرق میں $\alpha = 0$ ہے لہذا کامل ذوبرق بے ضیاع ہے۔ یوں خالی خلاء میں برقی و مقناطیسی امواج کی رفتار مساوات 10.25 سے

$$(10.41) \quad v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu_R \mu_0 \epsilon_R \epsilon_0}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_R \epsilon_R}}$$

حاصل ہوتی ہے جہاں $\frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$ کو خالی خلاء میں روشنی کی رفتار c لکھا گیا ہے۔ چونکہ ذو برق میں $\mu_R \epsilon_R > 1$ ہے لہذا ذو برق میں روشنی کی رفتار خالی خلاء میں روشنی کے رفتار سے کم ہوگی۔ خالی خلاء میں روشنی کی رفتار اس کی زیادہ سے زیادہ رفتار ہے۔

موج کی رفتار اور تعدد سے طول موج

$$(10.42) \quad \lambda = \frac{v}{f} = \frac{c}{f \sqrt{\mu_R \epsilon_R}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\mu_R \epsilon_R}}$$

حاصل ہوتی ہے جہاں خالی خلاء کے طول موج کو λ_0 لکھا گیا ہے۔ اس مساوات سے ذو برق میں روشنی کی رفتار کم ہونے کی وجہ سامنے آتی ہے۔ چونکہ $\mu_R \epsilon_R > 1$ ہے لہذا ذو برق میں طول موج کم ہو جاتا ہے جس سے روشنی کی رفتار کم ہو جاتی ہے۔

مساوات 10.31 سے ذو برقی کی قدرتی رکاوٹ

$$Z = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \sqrt{\frac{\mu_R}{\epsilon_R}} = Z_0 \sqrt{\frac{\mu_R}{\epsilon_R}}$$

حاصل ہوتی ہے جہاں خالی خلاء کی قدرتی رکاوٹ کو Z_0 لکھا گیا ہے۔

یوں ذو برق میں امواج کے مساوات

$$(10.43) \quad E_x = E_0 \cos(\omega t - \beta z)$$

$$(10.44) \quad H_y = \frac{E_0}{Z} \cos(\omega t - \beta z)$$

ہیں۔

مثال 10.4: پانی کے لئے $\mu_R = 1$ ، $\epsilon_R = 78.4$ اور $\sigma = 0$ لیتے ہوئے 300 MHz تعدد کے برقی و مقناطیسی امواج کی رفتار، طول موج اور قدرتی رکاوٹ حاصل کریں۔ برقی میدان $50 \frac{mV}{m}$ ہونے کی صورت میں برقی اور مقناطیسی امواج کی مساوات لکھیں۔ ہم $\sigma = 0$ لیتے ہوئے درحقیقت پانی میں توانائی کے ضیاع کو نظر انداز کر رہے ہیں۔

حل:

$$v = \frac{c}{\sqrt{\mu_R \epsilon_R}} = \frac{3 \times 10^8}{\sqrt{78.4}} = 0.3388 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{0.3388 \times 10^8}{300 \times 10^6} = 11.29 \text{ cm}$$

ہیں جبکہ خالی خلاء میں $\lambda = 1 \text{ m}$ ہے۔ بقایا مستقل

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = 55.7 \frac{\text{rad}}{\text{m}}$$

اور

$$Z = Z_0 \sqrt{\frac{\mu_R}{\epsilon_R}} = \frac{377}{\sqrt{78.4}} = 42.58 \Omega$$

ہیں۔ امواج کی مساوات

$$E_x = 0.05 \cos(6\pi 10^8 t - 55.7z)$$

$$H_y = \frac{0.05}{42.58} \cos(6\pi 10^8 t - 55.7z) = 0.00117 \cos(6\pi 10^8 t - 55.7z)$$

ہیں۔

مشق 10.2: کتاب کے آخر میں مختلف اشیاء کے طبعی مستقل دئے گئے ہیں۔ انہیں استعمال کرتے ہوئے ابرق میں، طاقت کے ضیاع کو نظر انداز کرتے ہوئے، 5.6 GHz اور $10 \frac{\text{mA}}{\text{m}}$ حیطے کی مقناطیسی میدان پر مندرجہ ذیل حاصل کریں۔

- موج کی رفتار،
- طول موج،
- زاویائی مستقل،

- قدرتی رکاوٹ،
- برقی میدان کا حیظ۔

جوابات: $1.62 \frac{V}{m}$ اور 162.1Ω ، $272.6 \frac{rad}{m}$ ، 23 cm ، $1.29 \times 10^8 \frac{m}{s}$

10.2.3 ناقص یا غیر کامل ذوب برقی میں امواج

کامل ذوب برقی میں امواج پر غور کے بعد فطری طور ناقص ذوب برقی پر بات کرنا ضروری ہے لہذا صاف پانی کو مثال بناتے ہوئے 20 GHz تعدد پر ایسا ہی کرتے ہیں۔ صفحہ 464 پر شکل 10.4 میں صاف پانی کے طبعی مستقل دئے گئے ہیں۔

اس تعدد پر صاف پانی کے طبعی مستقل $\epsilon_R = 41$ اور $\sigma = 36.7 \frac{S}{m}$ ہیں۔ چونکہ پانی غیر مقناطیسی ہے لہذا اس کا $\mu_R = 1$ ہو گا۔ یوں

$$\frac{\sigma}{\omega\epsilon} = 0.8$$

اور

$$\begin{aligned} \gamma &= j2 \times \pi \times 20 \times 10^9 \times \frac{\sqrt{1 \times 41}}{3 \times 10^8} \sqrt{1 - j0.8} \\ &= 3035/70.67^\circ \\ &= 1005 + j2864 \quad m^{-1} \end{aligned}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ یوں پانی کا تضعیفی مستقل

$$\alpha = 1005 \frac{Np}{m}$$

ہے جس کا مطلب ہے کہ پانی میں ہر $\frac{1}{1005}$ میٹر یعنی 1 mm فاصلہ طے کرنے پر برقی اور مقناطیسی امواج 0.368 گنا گھٹ جائیں گی۔ پانی میں $\alpha \neq 0$ ہے لہذا پانی ضیاع کا رہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں ریڈار⁴³ پانی میں کیوں کام نہیں

radar⁴³

کرتا۔ اسی طرح بارش کی صورت میں بھی ریڈار کی کارکردگی بری طرح متاثر ہوتی ہے۔ پانی میں دیکھنے کی خاطر موج آواز استعمال کی جاتی ہیں۔

تضعیفی مستقل کو عموماً ڈیسی بیل⁴⁴ فی میٹر میں ناپا جاتا ہے جہاں $1 \text{ Np} = 8.69 \text{ dB}$ کے برابر ہے۔ یوں مندرجہ بالا جواب کو

$$\alpha = 1005 \times 8.69 = 8733 \frac{\text{dB}}{\text{m}}$$

بھی لکھا جاسکتا ہے۔

زاویائی مستقل

$$\beta = 2864 \frac{\text{rad}}{\text{m}}$$

ہے جو $\sigma = 0$ کی صورت میں $2682 \frac{\text{rad}}{\text{m}}$ حاصل ہوتا ہے لہذا پانی کی موصلیت سے زاویائی مستقل زیادہ متاثر نہیں ہوا۔ اس تعدد پر خالی خلاء میں طول موج 1.5 cm ہے جبکہ پانی میں $\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$ سے طول موج 2.19 mm ہے۔

قدرتی رکاوٹ

$$Z = \frac{377}{\sqrt{41}} \frac{1}{\sqrt{1 - j0.8}} = 52/19.33^\circ = 49.1 + j17.2 \quad \Omega$$

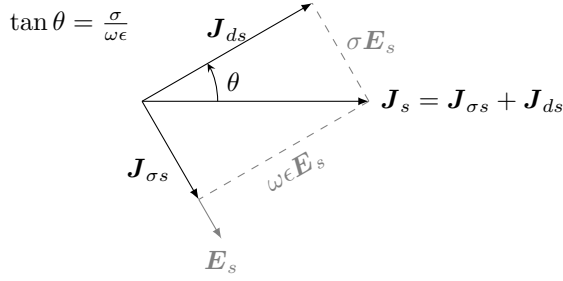
ہے لہذا E_x ہر نقطے پر H_y سے 19.33° آگے ہے۔

میکس ویل کے مساوات

$$\nabla \times \mathbf{H}_s = (\sigma + j\omega\epsilon)\mathbf{E}_s = \mathbf{J}_{\sigma s} + \mathbf{J}_{ds}$$

میں ایصال اور انتقالی کثافت برقی رو کے سمتی مجموعے کو شکل 10.3 میں بطور مجموعی کثافت رو \mathbf{J}_s دکھایا گیا ہے۔ ایصال رو اور انتقالی رو آپس میں 90° درجے کا زاویہ بناتے ہیں۔ انتقالی رو 90° آگے رہتا ہے۔ یہ بالکل متوازی جڑے مزاحمت اور برقی گیر (کپیسٹر) کی رو کی طرح صورت حال ہے۔ برقی گیر (کپیسٹر) کی رو، مزاحمت کی رو سے 90° آگے رہتی ہے۔ مزید یہ کہ مزاحمت کی رو سے برقی طاقت کا ضیاع پیدا ہوتا ہے جبکہ برقی گیر (کپیسٹر) کی رو سے ایسا نہیں

decibel, dB⁴⁴



شکل 10.3: طاقت کے ضیاع کا نمونہ۔

ہوتا۔ ان حقائق کو مد نظر رکھتے ہوئے شکل 10.3 میں زاویہ θ (جس کا کروی محدود کے زاویہ θ کے ساتھ کسی قسم کا کوئی تعلق نہیں ہے) کو دیکھیں جس کے لئے

$$(10.45) \quad \tan \theta = \frac{\sigma}{\omega \epsilon}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ یوں اس نمونہ کو طاقت کے ضیاع کا نمونہ پکارا جاتا ہے اور $\frac{\sigma}{\omega \epsilon}$ کی شرح کو ضیاعی ٹینجنٹ⁴⁵ یا مماس ضیاع کہا جاتا ہے۔

مساوات 10.14 اور مساوات 10.32 کو $\frac{\sigma}{\omega \epsilon}$ استعمال کرتے ہوئے لکھا گیا۔ کسی ذو برق کے کامل یا غیر کامل ہونے کا فیصلہ اس کے مماس ضیاع کی قیمت کو دیکھ کر کیا جاتا ہے۔ اگر اس شرح کی قیمت اکائی کے قریب ہو تب ذو برق غیر کامل قرار دیا جاتا ہے جبکہ $\frac{\sigma}{\omega \epsilon} \ll 1$ کی صورت میں ذو برق کو کامل تصور کیا جاتا ہے۔

کم مماس ضیاع کی صورت میں حرکی مستقل اور قدرتی رکاوٹ کے کارآمد مساوات حاصل کئے جاسکتے ہیں۔ حرکی مستقل

$$\gamma = j\omega \sqrt{\mu \epsilon} \sqrt{1 - j \frac{\sigma}{\omega \epsilon}}$$

کو مسئلہ ثنائی⁴⁶

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1!}x + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \dots$$

loss tangent⁴⁵
binomial theorem⁴⁶

جہاں $|x| < 1$ ہے، کی مدد سے تسلسل کی شکل میں لکھ سکتے ہیں۔ اگر ہم $x = -\frac{\sigma}{\omega\epsilon}$ اور $n = \frac{1}{2}$ لیں تو حرکی مستقل

$$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\epsilon} \left[1 - j\frac{\sigma}{2\omega\epsilon} + \frac{1}{8} \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \right)^2 + \dots \right]$$

لکھا جا سکتا ہے جس سے

$$(10.46) \quad \alpha \doteq j\omega\sqrt{\mu\epsilon} \left(-j\frac{\sigma}{2\omega\epsilon} \right) = \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

اور

$$(10.47) \quad \beta \doteq \omega\sqrt{\mu\epsilon} \left[1 + \frac{1}{8} \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \right)^2 \right]$$

حاصل ہوتے ہیں۔ اگر $\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \ll 1$ ہو تب

$$(10.48) \quad \beta \doteq \omega\sqrt{\mu\epsilon}$$

بھی لکھا جا سکتا ہے۔ بالکل اسی طرح قدرتی رکاوٹ کو

$$(10.49) \quad Z \doteq \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \left[1 - \frac{3}{8} \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \right)^2 + j\frac{\sigma}{2\omega\epsilon} \right]$$

یا

$$(10.50) \quad Z \doteq \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \left(1 + j\frac{\sigma}{2\omega\epsilon} \right)$$

لکھا جا سکتا ہے۔

آئیں دیکھیں کہ ان مساوات سے حاصل جوابات اصل مساوات کے جوابات کے کتنے قریب ہیں۔ ایسے صاف پانی کی مثال کو دوبارہ حل کر کے دیکھتے ہیں۔ صاف پانی کے طبعی مستقل 20 GHz یعنی $125 \frac{\text{Grad}}{\text{s}}$ تعدد پر $\mu_R = 1$ اور $\epsilon_R = 41$ اور $\sigma = 36.7 \frac{\text{S}}{\text{m}}$ ہیں لہذا مساوات 10.46 سے

$$\alpha = 1080 \frac{\text{Np}}{\text{m}} \quad \left(9385 \frac{\text{dB}}{\text{m}} \right)$$

حاصل ہوتا ہے جو گزشتہ حاصل کردہ قیمت $1005 \frac{Np}{m}$ کے کافی قریب ہے۔ مساوات 10.47 سے

$$\beta = 2897 \frac{\text{rad}}{m}$$

حاصل ہوتا ہے جو گزشتہ جواب $2864 \frac{\text{rad}}{m}$ کے بہت قریب ہے۔ مساوات 10.48 سے حاصل جواب

$$\beta = 2682 \frac{\text{rad}}{m}$$

درست جواب سے نسبتاً زیادہ مختلف ہے۔ قدرتی رکاوٹ مساوات 10.49 سے

$$Z = 44.75 + j23.55$$

حاصل ہوتا ہے جو $49.1 + j17.2$ کے بہت قریب ہے البتہ مساوات 10.50 سے حاصل جواب

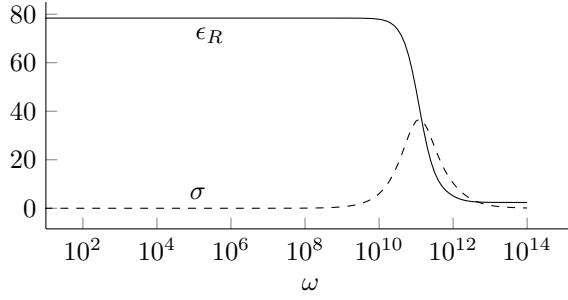
$$Z = 58.88 + j23.55$$

قدر مختلف ہے۔ صاف پانی کی اس مثال میں مماس ضیاع 0.8 ہے جو اکائی سے بہت کم نہیں ہے، اسی لئے جوابات پہلے سے قدر مختلف حاصل ہوئے۔ چونکہ موصلیت اور برقی مستقل کی بالکل درست قیمتیں عموماً ہمیں معلوم نہیں ہوتیں لہذا سادہ مساوات سے حاصل جوابات کے اس فرق کو زیادہ اہمیت نہیں دینی چاہئے۔ بہتر یہی ہوتا ہے کہ $\frac{\sigma}{\omega\epsilon} < 0.1$ ہی کی صورت میں سادہ مساوات استعمال کی جائیں۔

عموماً ذو برق کی موصلیت تعدد بڑھانے سے غیر خطی طور پر بڑھتی ہے جبکہ $\frac{\sigma}{\omega\epsilon}$ کے قیمت میں تبدیلی نسبتاً کم ہوتی ہے۔ یہی وجہ مماس ضیاع کی اہمیت کا راز ہے۔ یاد رہے کہ مختلف تعدد پر موصلیت، برقی مستقل اور مماس ضیاع نہایت تیزی سے تبدیل ہو سکتے ہیں۔ ایسا عموماً نظر آنے والی روشنی سے قدر کم یا قدر زیادہ تعدد پر ہوتا ہے۔

شکل 10.4 میں صاف پانی کا جزوی برقی مستقل ϵ_R بالمقابل زاویائی تعدد ω ٹھوس لکیر سے دکھایا گیا ہے جبکہ موصلیت بالمقابل تعدد نقطہ دار لکیر سے دکھایا گیا ہے۔ افقی محدود تعدد کا لاگ $(\log \omega)$ ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ تقریباً $10 \frac{\text{Grad}}{s}$ تعدد تک $\epsilon_R = 78.4$ رہتا ہے جبکہ اس سے بلند تعدد پر اس کی قیمت گھٹ کر 2.4 ہو جاتی ہے۔ موصلیت کی چوٹی تقریباً $36.7 \frac{S}{m}$ پائی جاتی ہے۔ دیگر ذو برق کے خط مختلف اشکال کے ہوں گے۔

مشق 10.3: ایک مادے کے طبعی مستقل 1 MHz تعدد پر $\mu_R = 1$ اور $\epsilon_R = 2.8$ ہیں۔ اس مادے کے مماس ضیاع، تضعیفی مستقل اور زاویائی مستقل حاصل کریں۔ تضعیفی مستقل کی قیمت $\frac{dB}{m}$ میں کیا ہوگی۔



شکل 10.4: صاف پائی کا جزوی برقی مستقل بالمقابل زاویائی تعدد اور موصلیت بالمقابل زاویائی تعدد۔

$$\text{جوابات: } 0.0642, 1.13 \times 10^{-3} \frac{\text{Np}}{\text{m}}, \text{ اور } 3.51 \times 10^{-4} \frac{\text{rad}}{\text{m}}, 9.8 \times 10^{-3} \frac{\text{dB}}{\text{m}}$$

مشق 10.4: ایک غیر مقناطیسی مادے کا مماس ضیاع 0.07 جبکہ $\mu_R = 4.7$ ہیں۔ ان قیمتوں کو 1 MHz تا 80 MHz تعدد کے درمیان اٹل تصور کیا جاسکتا ہے۔ اس کا تضعیفی مستقل اور مادے میں طول موج 20 MHz اور 60 MHz تعدد پر حاصل کریں۔

$$\text{جوابات: } 0.031 \frac{\text{Np}}{\text{m}} \text{ یا } 0.269 \frac{\text{dB}}{\text{m}}, 6.9 \text{ m}, 0.095 \frac{\text{Np}}{\text{m}} \text{ یا } 0.826 \frac{\text{dB}}{\text{m}}, 2.3 \text{ m}$$

10.3 پوائنٹنگ سمتیہ

امواج کی طاقت جاننے کے لئے مسئلہ پوائنٹنگ⁴⁷ درکار ہو گا لہذا پہلے اسے⁴⁸ حاصل کرتے ہیں۔

⁴⁷ Poynting theorem

⁴⁸ جان ہنری پوائنٹنگ نے 1884 میں پہلی مرتبہ اس مسئلے کو پیش کیا۔

میکس ویل کے مساوات

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

کا \mathbf{E} کے ساتھ غیر سمتی ضرب

$$\mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

لیتے ہوئے سمتی مماثل (جسے آپ با آسانی کار تیبی محدود میں ثابت کر سکتے ہیں)

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = -\mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H} + \mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E}$$

کے ذریعہ

$$\mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E} - \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس میں $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ پر کرنے سے

$$-\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

یا

$$-\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} + \epsilon \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اب

$$\epsilon \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{\epsilon}{2} \frac{\partial E^2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon E^2}{2} \right)$$

اور

$$\mu \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \frac{\mu}{2} \frac{\partial H^2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mu H^2}{2} \right)$$

لکھے جاسکتے ہیں لہذا

$$-\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon E^2}{2} + \frac{\mu H^2}{2} \right)$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس کے صحیحی تکمل

$$-\int_h \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) dh = \int_h \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dh + \frac{\partial}{\partial t} \int_h \left(\frac{\epsilon E^2}{2} + \frac{\mu H^2}{2} \right) dh$$

پر مسئلہ پھیلاؤ کے اطلاق سے

$$(10.51) \quad -\oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} = \int_h \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dh + \frac{\partial}{\partial t} \int_h \left(\frac{\epsilon E^2}{2} + \frac{\mu H^2}{2} \right) dh$$

حاصل ہوتا ہے۔

اس مساوات کے دائیں ہاتھ پہلے جزو کی بات کرتے ہیں۔ اگر پورے حجم میں کہیں پر بھی منبع طاقت موجود نہ ہو تب یہ تکمل حجم میں کل لمحاتی مزاحمتی طاقت کا ضیاع دیتا ہے۔ اگر حجم میں منبع طاقت پایا جاتا ہو تب ان منبع کے حجم پر تکمل کی قیمت مثبت ہوگی اگر منبع کو طاقت فراہم کی جا رہی ہو اور یہ تکمل منفی ہوگا اگر منبع طاقت فراہم کر رہا ہو۔

مساوات کے دائیں ہاتھ دوسرا تکمل حجم میں توانائی کا کل ذخیرہ دیتا ہے جس کا وقت کے ساتھ تفرق حجم میں ذخیرہ توانائی میں لمحاتی تبدیلی یعنی طاقت دیتا ہے۔ اس طرح مندرجہ بالا مساوات کا دایاں ہاتھ حجم میں داخل ہوتا کل طاقت دیتا ہے۔ یوں حجم سے کل خارجی طاقت

$$\oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{S}$$

ہوگا جہاں حجم گھیرتی سطح پر تکمل لیا گیا ہے۔ سمتی ضرب $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ پوائنٹنگ سمتیہ⁴⁹ پکارا اور \mathcal{P} سے ظاہر کیا جاتا ہے

$$(10.52) \quad \mathcal{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$$

جس سے مراد لمحاتی طاقت کی کثافت لی جاتی ہے جو واٹ فی مربع میٹر $\frac{W}{m^2}$ میں ناپی جاتی ہے۔ یہاں بھی برقی میدان میں کثافت توانائی $\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}$ یا مقناطیسی میدان میں کثافت توانائی $\frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}$ کے استعمال کی طرح یاد رہے کہ پوائنٹنگ سمتیہ کا بند سطح پر تکمل ہی حقیقی معنی رکھتا ہے اور ایسا تکمل سطح سے خارج ہوتا کل طاقت دیتا ہے۔ کسی بھی نقطے پر \mathcal{P} کی سمت اس نقطے پر لمحاتی طاقت کے بہاؤ کی سمت دیتا ہے۔

⁴⁹Poynting vector

چونکہ \mathcal{H} برقی میدان اور مقناطیسی میدان دونوں کے عمودی ہے لہذا طاقت کا بہاؤ بھی دونوں میدان کے عمودی سمت میں ہو گا۔ ہم نے برقی و مقناطیسی امواج پر تبصرے کے دوران دیکھا کہ امواج کے حرکت کی سمت E اور H کے عمودی ہوتی ہے لہذا \mathcal{H} کی سمت ہمارے توقع کے عین مطابق ہے۔ مزید کامل ذو برق میں

$$E_x = E_0 \cos(\omega t - \beta z)$$

$$H_y = \frac{E_0}{Z} \cos(\omega t - \beta z)$$

سے لمبائی کثافت سطحی بہاؤ طاقت

$$E_x \mathbf{a}_x \times H_y \mathbf{a}_y = \frac{E_0^2}{Z} \cos^2(\omega t - \beta z) \mathbf{a}_z = \mathcal{P} \mathbf{a}_z$$

حاصل ہوتی ہے۔ اوسط کثافت طاقت حاصل کرنے کی خاطر ہم ایک پھیروے یعنی $T = \frac{1}{f}$ دورانے کا مکمل لیتے ہوئے دوری عرصہ T پر تقسیم

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\text{اوسط}} &= f \int_0^{\frac{1}{f}} \frac{E_0^2}{Z} \cos^2(\omega t - \beta z) dt \\ &= \frac{f E_0^2}{2Z} \int_0^{\frac{1}{f}} [1 + \cos(2\omega t - 2\beta z)] dt \\ &= \frac{f E_0^2}{2Z} \left[t + \frac{1}{2\omega} \sin(2\omega t - 2\beta z) \right]_0^{\frac{1}{f}} \end{aligned}$$

کرتے ہوئے

$$(10.53) \quad \mathcal{P}_{\text{اوسط}} = \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{Z} \quad \frac{W}{m^2}$$

حاصل کرتے ہیں جو z سمت میں کثافت طاقت کا بہاؤ دیتا ہے۔ اگر میدان کی چوٹی E_0 کی جگہ اس کی موثر قیمت موثر E استعمال کی جائے تب مندرجہ بالا مساوات میں $\frac{1}{2}$ کا جزو ضربی نہیں لکھا جائے گا۔

موج کی سمت کے عمودی سطح S سے یوں

$$P_{z, \text{اوسط}} = \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{Z} S \quad W$$

طاقت گزرے گی۔

غیر کامل ذو برق کی صورت میں

$$Z = |Z| e^{j\theta_Z}$$

لیتے ہوئے

$$(10.54) \quad \begin{aligned} E_x &= E_0 e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) \\ H_y &= \frac{E_0 e^{-\alpha z}}{|Z|} \cos(\omega t - \beta z - \theta_Z) \end{aligned}$$

ہوں گے جن سے

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\text{اوسط}} &= f \int_0^{\frac{1}{f}} \frac{E_0^2}{|Z|} e^{-2\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) \cos(\omega t - \beta z - \theta_Z) dt \\ &= f \int_0^{\frac{1}{f}} \frac{E_0^2}{2|Z|} e^{-2\alpha z} [\cos(2\omega t - 2\beta z - \theta_Z) + \cos \theta_Z] dt \end{aligned}$$

یعنی

$$(10.55) \quad \mathcal{P}_{\text{اوسط}} = \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{|Z|} e^{-2\alpha z} \cos \theta_Z$$

حاصل ہوتا ہے۔

کثافت طاقت کی اوسط قیمت مخلوط پونٹنگ سمتیہ

$$(10.56) \quad \mathcal{P}_{\text{اوسط}} = \frac{1}{2} [\mathbf{E}_s \times \mathbf{H}_s^*]_{\text{حقیقی}}$$

سے بھی حاصل کی جاسکتی ہے جہاں جوڑی دار مخلوط⁵⁰ مقناطیسی موج استعمال کی جاتی ہے۔ انہیں مساوات 10.55 کو اس ترکیب سے دوبارہ حاصل کریں۔ مساوات 10.54 کی دوری سمتی شکل

$$\begin{aligned} E_{sx} &= E_0 e^{-\alpha z - j\beta z} \\ H_{sy} &= \frac{E_0}{|Z|} e^{-\alpha z - j\beta z - j\theta_Z} \\ H_{sy}^* &= \frac{E_0}{|Z|} e^{-\alpha z + j\beta z + j\theta_Z} \end{aligned}$$

complex conjugate⁵⁰

ہے جہاں جوڑی دار مخلوط مقناطیسی موج H_{sy}^* بھی لکھی گئی ہے۔ یوں

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \mathbf{E}_s \times \mathbf{H}_s^* &= \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{|Z|} e^{-2\alpha z + j\theta z} \\ &= \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{|Z|} e^{-2\alpha z} (\cos \theta z + j \sin \theta z)\end{aligned}$$

کا حقیقی حصہ لیتے ہوئے

$$\mathcal{P}_{\text{اوسط}} = \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{|Z|} e^{-2\alpha z} \cos \theta z$$

کثافت اوسط توانائی کی مطلوبہ مساوات حاصل ہوتی ہے۔

اس کتاب میں اوسط کثافت توانائی حاصل کرتے وقت مساوات 10.56 استعمال کی جائے گی۔

مشق 10.5: ایک میگا ہرٹز، تین سو میگا ہرٹز اور تین گیگا ہرٹز کے تعدد پر صاف پانی کے برف کے جزو برقی مستقل بالترتیب 4.15، 3.45 اور 3.2 ہیں جبکہ اس کے مماس ضیاع بالترتیب 0.12، 0.035 اور 0.0009 ہیں۔ یکساں سطحی موج جس کی چوٹی $z = 0$ پر $100 \frac{V}{m}$ ہو برف سے گزر رہی ہے۔ ایک مربع میٹر سطح سے اوسط طاقت کا بہاؤ $z = 0$ اور $z = 5 \text{ m}$ پر حاصل کریں۔

جوابات: 14.31 W، 23.7 W، 12.48 W، 24.7 W، 26.4 W، 27.1 W

مثال 10.5: z محدود پر $\sigma = 3.2 \times 10^7 \frac{S}{m}$ موصلیت کے غیر مقناطیسی مادے سے بنی لامحدود لمبائی کی سلاخ پائی جاتی ہے جس کا جزوی برقی مستقل $\epsilon_R = 1$ ہے۔ اس سلاخ میں a_z سمت 250 A کی یکساں یک سمتی برقی رو گزر رہی ہے اور سلاخ کا رداس 2 cm ہے۔ الف) سلاخ کی فی میٹر مزاحمت حاصل کریں۔ ب) سلاخ

میں فی میٹر طاقت کا ضیاع $I^2 R$ سے حاصل کریں۔ پ) سلاخ میں J ، E اور H حاصل کریں۔ ت) سلاخ کی سطح پر پونٹنگ سمتیہ کا سطحی کھل لیتے ہوئے فی میٹر سلاخ میں طاقت کا ضیاع حاصل کریں۔ ٹ) رداس 5 cm کے نکلی سطح پر پونٹنگ سمتیہ کے سطحی کھل کے استعمال سے سلاخ کے قریب برقی میدان حاصل کریں۔
حل: الف) فی میٹر سلاخ کی مزاحمت حاصل کرتے ہیں۔

$$R = \frac{1}{3.2 \times 10^7 \times \pi \times 0.02^2} = 24.87 \frac{\mu\Omega}{m}$$

ب) فی میٹر سلاخ میں طاقت کا مزاحمتی ضیاع یوں حاصل ہو گا۔

$$P = I^2 R = 250^2 \times 24.87 \times 10^{-6} = 1.554247 \frac{W}{m}$$

پ) سلاخ کا رقبہ عمودی تراش $A = \pi \times 0.02^2$ مربع میٹر ہے۔ یوں سلاخ میں کثافت برقی رو

$$J = \frac{I}{A} \mathbf{a}_z = \frac{250}{\pi \times 0.02^2} \mathbf{a}_z = 198949 \mathbf{a}_z \frac{A}{m^2}$$

ہو گی جس سے سلاخ میں برقی شدت $J = \sigma E$ سے

$$E = \frac{J}{\sigma} = \frac{198949 \mathbf{a}_z}{3.2 \times 10^7} = 6.217 \times 10^{-3} \mathbf{a}_z \frac{V}{m}$$

حاصل ہوتی ہے۔ دو سنٹی میٹر سے کم رداس $\rho < 2 \text{ cm}$ کا دائرہ کل

$$\frac{250 \times \pi \times \rho^2}{\pi \times 0.02^2} = 625000 \rho^2$$

ایمپیر کی برقی رو گھیرے گی۔ یوں ایمپیر کا دوری قانون استعمال کرتے ہوئے سلاخ کے اندر رداس ρ پر مقناطیسی میدان

$$H_\phi = \frac{625000 \rho^2}{2\pi \rho} = 99472 \rho \mathbf{a}_\phi \frac{A}{m}$$

حاصل ہو گا۔

ت) پونٹنگ سمتیہ

$$\mathcal{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = -618.42 \rho \mathbf{a}_\rho \frac{W}{m^2}$$

ہے۔ ہم 2 cm کے انتہائی قریب لیکن اس سے ذرا کم رداس اور 1 m لمبائی کی تصوراتی سطح پر پونٹنگ سمتیہ کا سطحی تکمیل لیتے ہوئے فی میٹر سلاخ میں مزاحمتی ضیاع حاصل کرتے ہیں۔ اس ڈبی نما تصوراتی سطح کی چمکی اور بالائی سیدھی سمتی سطح بالترتیب $-a_z$ اور a_z سمت میں ہیں جبکہ پونٹنگ سمتیہ a_ρ سمت میں ہے لہذا ان سطحوں پر پونٹنگ سمتیہ کا سطحی تکمیل صفر کے برابر ہو گا۔ یوں سطحی تکمیل حقیقت میں صرف تصوراتی سطح کے گول حصے پر لینا ضروری ہے۔ سطح میں داخل ہوتا طاقت

$$\int_S -\mathcal{P} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^1 \int_0^{2\pi} 618.42\rho^2 d\phi dz = 1.554247 \frac{\text{W}}{\text{m}}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں $\rho = 2 \text{ cm}$ پر کیا گیا ہے۔ یاد رہے کہ ہم نے دو سنٹی میٹر سے ذرا کم رداس چننا تاکہ سلاخ کے اندر حاصل کردہ برقی میدان اور مقناطیسی میدان قابل استعمال ہوں۔

ٹ) سلاخ کے رداس سے زیادہ رداس پر پونٹنگ سمتیہ کا سطحی تکمیل وہی طاقت دے گا جو سلاخ کی سطح پر تکمیل لیتے ہوئے حاصل ہوا تھا۔ مزاحمتی طاقت کا ضیاع ہمارے چنے گئے سطح پر منحصر نہیں ہے۔ 5 cm رداس اور 1 m لمبائی کی تصوراتی سطح لے کر آگے بڑھتے ہیں۔ 5 cm کا گول دائرہ پورے 250 A کی برقی رو کو گھیرے گا۔ یوں اس دائرے پر

$$\mathbf{H} = \frac{250}{2\pi \times 0.05} \mathbf{a}_\phi = 795.7747 \mathbf{a}_\phi \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

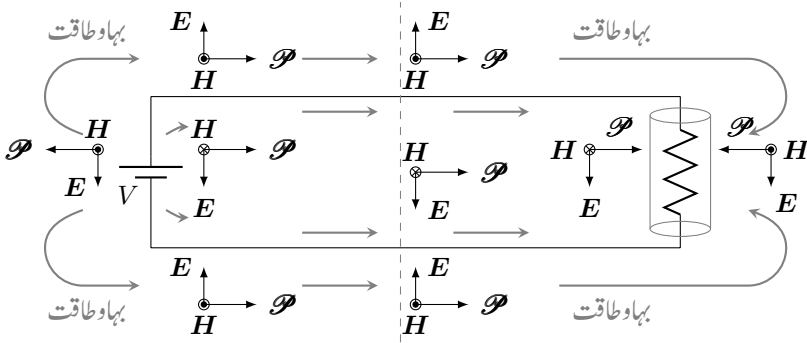
ہو گا۔ سلاخ کے گول سطح پر برقی میدان a_z سمت میں ہے۔ سرحدی شرائط کے مطابق کسی بھی دو مختلف اجسام کی سرحد پر متوازی برقی میدان برابر ہوتے ہیں۔ یوں لامحدود لمبائی کے سلاخ کے بالکل قریب برقی میدان a_z سمت میں ہی ہو گا۔ ایسا کوئی جواز نظر نہیں آتا کہ سلاخ سے دور میدان کیوں a_z سمت میں نہ ہو۔ یوں ہم $\mathbf{E} = E_0 \mathbf{a}_z$ لیتے ہیں۔ اس طرح تصوراتی سطح کی چمکی اور بالائی سطحوں پر پونٹنگ سمتیہ کا سطحی تکمیل صفر کے برابر ہو گا۔ سلاخ میں داخل ہوتا طاقت تصوراتی سطح کے گول حصے پر تکمیل سے حاصل ہو گا یعنی

$$\int_S -\mathcal{P} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^1 \int_0^{2\pi} 795.7747 E_0 \rho d\phi dz = 250 E_0 W$$

جہاں $\rho = 5 \text{ cm}$ پر کیا گیا ہے۔ حاصل جواب کو 1.554247 W کے برابر پڑ کرتے ہوئے سلاخ کے باہر

$$\mathbf{E} = 6.217 \times 10^{-3} \mathbf{a}_z \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس مثال میں سلاخ کے باہر اور سلاخ کے اندر برابر برقی میدان پایا جاتا ہے۔



شکل 10.5: برقی دور میں طاقت کا بہاؤ۔

10.4 پونٹنگ سمتیہ اور برقی دور

شکل 10.5 میں منبع طاقت کے ساتھ مزاحمت R جوڑی گئی ہے۔ اس برقی دور کو ہم عموماً حل کرتے ہوئے تصور کرتے ہیں کہ منبع طاقت برقی دباؤ V پیدا کرتی ہے جس سے دور میں برقی رو $I = \frac{V}{R}$ پیدا ہوتی ہے۔ مزاحمت اور منبع طاقت جوڑنے والی تاروں میں یہ برقی رو گزرتی ہے۔ یوں منبع سے مزاحمت تک $P = VI$ طاقت بذریعہ تار پہنچتی ہے۔ آئیں پونٹنگ سمتیہ کیا کہتی ہے۔

شکل 10.5 میں مثبت اور منفی تاروں کے مابین

$$(10.57) \quad V = - \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

برقی دباؤ پایا جاتا ہے جہاں دو تاروں کے درمیان اس تکمیل کو کسی بھی راستے پر حاصل کیا جاسکتا ہے۔ برقی میدان \mathbf{E} کی سمت مثبت تار سے منفی تار کی جانب ہے۔ اسی طرح تار یا منبع یا مزاحمت کے گرد میدان کا تکمیل

$$(10.58) \quad I = \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$$

برقی رو دیتا ہے۔ شکل میں مختلف مقامات پر \mathbf{E} اور \mathbf{H} دکھائے گئے ہیں۔ ان مقامات پر پونٹنگ سمتیہ $\mathbf{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ بھی دکھائے گئے ہیں۔ منبع طاقت پر پونٹنگ سمتیہ باہر کی جانب کو ہے جبکہ مزاحمت پر اس کی سمت اندر کی جانب کو ہے۔ منبع طاقت اور مزاحمت کے درمیان نقطہ دار سطح پر پونٹنگ سمتیہ منبع سے مزاحمت کی جانب کو ہے۔ جگہ

جگہ پونٹنگ سمتیات دریافت کرتے ہوئے طاقت کے بہاؤ کو دیکھا جاسکتا ہے۔ شکل میں طاقت کے بہاؤ کو ہلکی سیاہی کے موٹی لکیر سے دکھایا گیا ہے۔

مزاحمت میں منتقل طاقت دریافت کرنے کی خاطر مزاحمت کو مکمل گھیرتی ہوئی کسی بھی بند سطح پر پونٹنگ سمتیہ کے سطحی کھلم سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ شکل میں مزاحمت کے گرد فرضی نکلی ڈبیا دکھائی گئی ہے۔ فرض کریں کہ مزاحمت اسی نکلی ڈبیا کے شکل کا ہے۔ آئیں اس نکلی ڈبیا کے سطح پر کھلم

$$(10.59) \quad P = \oint (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} \quad \text{اخراجی طاقت}$$

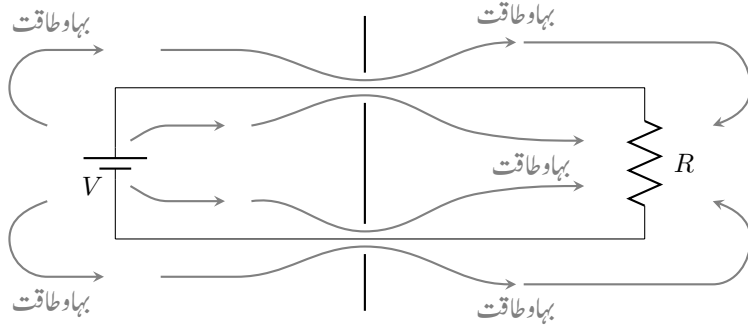
حاصل کریں جو اخراجی طاقت دے گا۔ فرض کریں کہ مزاحمت z محدود پر پڑا ہے اور اس کی لمبائی L جبکہ رداس a ہے۔ مزاحمت پر V برقی دباؤ پایا جاتا ہے لہذا اس میں میدان $\mathbf{E} = -\frac{V}{L}\mathbf{a}_z$ ہوگی۔ برقی سرحدی شرط کے تحت مزاحمت کے باہر سطح کے قریب برقی میدان یہی ہوگا۔ مزاحمت کی گول سطح پر مقناطیسی میدان کو ایمپیر کے دوری قانون سے حاصل کیا جاسکتا ہے جو $\mathbf{H} = -\frac{I}{2\pi a}\mathbf{a}_\phi$ برابر حاصل ہوتا ہے۔ نکلی ڈبیا کے بالائی اور نچلی ڈھکنوں پر پونٹنگ سمتیہ کا سطحی کھلم صفر کے برابر ہے جبکہ گول سطح پر سطحی کھلم

$$\begin{aligned} \iint (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} &= \int_0^L \int_0^{2\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot (a d\phi dz \mathbf{a}_\rho) \\ &= \int_0^L \int_0^{2\pi} -\frac{VI}{2\pi aL} a d\phi dz \\ &= -VI \quad \text{اخراجی طاقت} \end{aligned}$$

کے برابر ہے۔ یوں مزاحمت میں داخل ہوتی طاقت $P = VI$ ہے جو ہمارے توقع کے عین مطابق ہے۔

شکل 10.6 میں منبع طاقت اور مزاحمت کے درمیان کسی مقام پر لامحدود زمینی سطح نسب کر دی گئی ہے۔ اس سطح پر دو باریک سوراخ ہیں جن میں سے برقی تار گزر رہی ہیں۔ زمینی سطح پر برقی میدان صفر کے برابر ہوتا ہے لہذا زمینی سطح پر پونٹنگ سمتیہ صفر کے برابر ہوگی۔ یوں اس سطح سے کوئی طاقت نہیں گزر سکتی۔ اس شکل میں بھی طاقت کے بہاؤ دکھایا گیا ہے۔ کسی بھی مقام پر پونٹنگ سمتیہ کا سطحی کھلم لیتے ہوئے ثابت ہوتا ہے کہ منتقل طاقت کی قیمت جوں کی توں رہتی ہے۔ زیادہ دلچسپ صورت حال زمینی سطح میں ان سوراخ پر پائی جاتی ہے۔ آپ دیکھیں گے کہ ان سوراخ میں برقی میدان کی قیمت اتنی بڑھ جاتی ہے کہ سوراخ میں سے گزرتی طاقت ہی مزاحمت کو منتقل ہوتی ہے۔

آپ نے دیکھا کہ طاقت دراصل برقی تاروں میں سے نہیں گزرتی بلکہ تاروں کے گرد خلاء میں سے گزرتی ہے۔ اس عجیب مگر درست نتیجے تک صرف برقی و مقناطیسیت کی مدد سے ہی ہم پہنچ پائیں ہیں۔



شکل 10.6: برقی دور میں زمینی سطح سے طاقتی بہاؤ پر اثرات۔

اگرچہ $E \times H$ عموماً طاقت ہی ظاہر کرتی ہے لیکن یہ ممکن ہے کہ ایسا نہ ہو۔ مثلاً اگر زمینی مقناطیسی میدان H اور ساکن بار کی برقی میدان E کو لیا جائے $E \times H$ سے ایسا ظاہر ہوتا ہے جیسے طاقت کا بہاؤ پایا جاتا ہے جبکہ ایسا ہر گز درست نہیں ہے۔ پونٹنگ سمتیہ کے صحیح استعمال کے لئے ضروری ہے کہ جن مقناطیسی اور برقی میدان کی بات کی جائے، وہ دونوں آپس میں تعلق رکھتے ہوں۔ ایسے تعلق رکھنے والے میدان کی صورت میں پونٹنگ سمتیہ ہر صورت طاقت کے بہاؤ کو ظاہر کرے گی۔

10.5 موصل میں امواج

موصل میں امواج پر غور کی خاطر ہم تصور کرتے ہیں کہ موصل سے جڑے ذو برق میں امواج پیدا کی جاتی ہیں۔ ہم جاننا چاہتے ہیں کہ ایسی امواج ذو برق اور موصل کی سرحد پر موصل میں کیسے داخل ہوتی ہیں اور موصل میں ان کی کیا کارکردگی ہوتی ہے۔

ایصالی اور انتقالی رو کی شرح $\frac{\sigma}{\omega\epsilon}$ کو ماس ضیاع کہتے ہیں۔ یوں ناقص موصل کی ماس ضیاع بلند تعدد پر کم ہو گی۔ نائیکروم⁵¹ ناقص موصل ہے جس کا ماس ضیاع 100 MHz تعدد پر تقریباً 2×10^8 ہے۔ یوں کسی بھی موصل کے لئے $\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \gg 1$ ہوتا ہے۔ اس حقیقت کو مد نظر رکھتے ہوئے چند سادہ مساوات حاصل کرتے ہیں۔ حرکی مستقل

$$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\epsilon}\sqrt{1 - j\frac{\sigma}{\omega\epsilon}}$$

nichrome⁵¹

کو $1 \gg \frac{\sigma}{\omega\epsilon}$ کی بنا پر

$$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\epsilon}\sqrt{-j\frac{\sigma}{\omega\epsilon}}$$

یا

$$\gamma = j\sqrt{-j\omega\mu\sigma}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اب

$$-j = 1/\underline{-90^\circ}$$

کے برابر ہے جس کا جزر

$$\sqrt{1/\underline{-90^\circ}} = 1/\underline{-45^\circ} = \frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}}$$

ہے لہذا

$$\gamma = j\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sqrt{\omega\mu\sigma}$$

یا

$$(10.60) \quad \gamma = (j+1)\sqrt{\pi f\mu\sigma}$$

حاصل ہوتا ہے جس سے

$$(10.61) \quad \alpha = \beta = \sqrt{\pi f\mu\sigma}$$

ملتا ہے۔

ان معلومات کے بعد کہا جا سکتا ہے کہ کسی بھی μ اور σ مستقل رکھنے والے موصل کے α اور β ہر تعداد پر برابر ہی رہتے ہیں۔ یوں z سمت میں دوبارہ امواج فرض کرتے ہوئے موصل میں برقی میدان کی موج کو

$$(10.62) \quad E_x = E_0 e^{-z\sqrt{\pi f\mu\sigma}} \cos(\omega t - z\sqrt{\pi f\mu\sigma})$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اگر $z < 0$ کا ل ذو برق اور $z > 0$ موصل خطے ہوں تب ان کی سرحد $z = 0$ پر برقی سرحدی شرائط کے مطابق متوازی برقی میدان سرحد کے دونوں اطراف پر برابر ہوں گے۔ مساوات 10.62 کے تحت سرحد پر موصل میں

$$(10.63) \quad E_x = E_0 \cos \omega t \quad (z = 0)$$

ہو گی اور یوں سرحد پر ذو برق میں بھی برقی میدان یہی ہو گا۔ اب اسی حقیقت کو یوں بھی دیکھا جاسکتا ہے کہ سرحد پر ذو برق میں برقی میدان مساوات 10.63 دیتا ہے جو موصل میں سرحد پر اسی قیمت کا میدان پیدا کرتا ہے۔ ایسا تصور کرنے کا مطلب یہ ہے کہ ہم ذو برق میں میدان کو منبع میدان تصور کرتے ہیں جو موصل میں مساوات 10.62 کی موج پیدا کرتا ہے۔ موصل میں $1 \gg \frac{\sigma}{\omega\epsilon}$ کی بنا پر انتقالی رو کو نظر انداز کرتے ہوئے

$$(10.64) \quad \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

لکھا جاسکتا ہے لہذا موصل میں ہر نقطے پر کثافت رو اور برقی میدان راہ تناسب کا تعلق رکھتے ہیں اور یوں موصل میں

$$(10.65) \quad J_x = \sigma E_0 e^{-z\sqrt{\pi f \mu \sigma}} \cos(\omega t - z\sqrt{\pi f \mu \sigma})$$

لکھا جاسکتا ہے۔ شکل 10.7 میں J_x دکھایا گیا ہے جہاں عین سرحد یعنی $z = 0$ پر کثافت رو کی قیمت σE_0 کو J_0 لکھا گیا ہے۔

مساوات 10.62 اور مساوات 10.65 میں بہت سی معلومات پائی جاتی ہے۔ پہلے ان مساوات میں $e^{z\sqrt{\pi f \mu \sigma}}$ جزو پر غور کریں۔ سرحد پر اس کی قیمت $e^0 = 1$ کے برابر ہے جو سرحد سے

$$z = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}}$$

فاصلے پر $e^{-1} = 0.368$ رہ جاتی ہے۔ یہ فاصلہ گہرائی جلد⁵² کہلاتا ہے اور اسے δ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$(10.66) \quad \delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}}$$

برقی رو کا سطحی تہہ تک محدود رہنے کو اثر جلد⁵³ کہا جاتا ہے۔ یوں موصل میں

$$(10.67) \quad \alpha = \beta = \frac{1}{\delta}$$

ہو گا۔ اسی طرح سرحد سے 2δ فاصلے پر میدان $e^{-2} = 0.135$ اور 4δ فاصلے پر میدان $e^{-4} = 0.018$ یعنی صرف 1.8% رہ جائے گا۔

تانے کی $\sigma = 5.8 \times 10^7 \frac{\text{S}}{\text{m}}$ ہے لہذا اس میں گہرائی جلد

$$\delta_{\text{تانے}} = \frac{1}{\sqrt{\pi \times f \times 4 \times \pi \times 10^{-7} \times 5.8 \times 10^7}} = \frac{0.0661}{\sqrt{f}}$$

skin depth⁵²
skin effect⁵³

میٹر کے برابر ہے۔ یوں 50 Hz کا میدان سرحد سے $9.35 \text{ mm} = \frac{0.0661}{\sqrt{50}}$ فاصلے پر کم ہو کر صرف 0.368 گنارہ جائے گا۔ برقی ادوار میں مزاحمت میں طاقت کا ضیاع رو کے مربع کے راست تناسب ہوتا ہے لہذا ہر ایک گہرائی جلد کے فاصلے پر کثافت طاقت $0.135 = 0.368^2$ گنارہ ہو گی۔ خورد امواج⁵⁴ کے تعدد یعنی 10 GHz پر گہرائی جلد $0.661 \mu\text{m}$ یعنی نظر آنے والے روشنی کے طول کے آٹھویں حصے کے برابر ہے۔

ان تعدد پر کسی بھی موصل مثلاً تانبے میں سرحد سے چند ہی گہرائی جلد کے فاصلے پر تمام میدان تقریباً صفر کے برابر ہوتے ہیں۔ موصل کی سرحد پر پیدا کئے گئے برقی میدان یا کثافت رو، سرحد سے دوری کے ساتھ تیزی سے کم ہوتے ہیں۔ برقی و مقناطیسی طاقت موصل کے اندر نہیں بلکہ اس کے باہر صفر کرتی ہے۔ موصل کا کام صرف اتنا ہے کہ یہ ان امواج کو راستہ دکھاتی ہے۔ موصل کی سرحد پر پیدا کثافت رو، موصل میں موج کی حرکت کے عمودی سمت میں داخل ہوتی ہے جس سے موصل میں مزاحمتی ضیاع پیدا ہوتا ہے۔ یوں موصل بطور راہ گیر کردار ادا کرتے ہوئے مزاحمتی ضیاع بطور اجرت حاصل کرتا ہے۔

اگر آپ کسی بجلی گھر میں 50 Hz کے برقی رو کو منتقل کرنے کی خاطر پانچ سٹی میٹر رداس کے تانبے کی ٹھوس تار استعمال کر رہے ہوں تو یہ سراسر تانبہ ضائع کرنا ہو گا چونکہ کثافت رو تار کے بیرونی سطح پر ہی پائی جائے گی۔ اندرونی تار، سطح سے دور، کثافت رو قابل نظر انداز ہو گی لہذا اس سے بہتر ہو گا کہ زیادہ رداس کی ٹنگی نمائندہ استعمال کی جائے جس کی موٹائی تقریباً 1.5δ یعنی 1.4 cm ہو۔ اگرچہ یہ فیصلہ لامحدود جسامت کی سرحد کے نتائج پر بنیاد ہے، حقیقت میں محدود سرحد پر بھی میدان اسی نسبت سے گھٹتے ہیں۔

بلند تعدد پر گہرائی جلد کا فاصلہ اتنا کم ہوتا ہے کہ راہ گیر موصل کی سطحی تہہ ہی اہمیت رکھتی ہے۔ یوں خورد امواج کی منتقلی کے لئے شیشے پر $0.661 \mu\text{m}$ موٹی چاندی کی تہہ کافی ہے۔

آئیں اب موصل میں طول موج اور رفتار موج کے مساوات حاصل کریں۔ ہم

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$$

سے شروع کرتے ہوئے مساوات 10.67 استعمال کرتے ہوئے

$$\lambda = 2\pi\delta$$

لکھ سکتے ہیں۔ اسی طرح مساوات 10.25

$$v = \frac{\omega}{\beta}$$

سے

$$(10.68) \quad v = \omega \delta$$

ملتا ہے۔

تانے میں 50 Hz پر $\lambda = 5.8 \text{ cm}$ اور $v = 2.94 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ یا $10.6 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ حاصل ہوتے ہیں۔ میں تقریباً $6 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ کی رفتار سے چلتا ہوں۔ یوں آپ دیکھ سکتے ہیں کہ تانے میں برقی و مقناطیسی امواج انتہائی آہستہ چلتے ہیں۔ یاد رہے کہ اسی 50 Hz کے موج کی خالی خلاء میں $\lambda = 6000 \text{ km}$ اور رفتار $3 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ہوگی۔

موصل میں H_y کی مساوات لکھنے کی خاطر موصل کی قدرتی رکاوٹ درکار ہوگی۔ مساوات 10.31

$$Z = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}}$$

کو $1 \gg \frac{\sigma}{\omega\epsilon}$ کی وجہ سے

$$Z = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma}}$$

یا

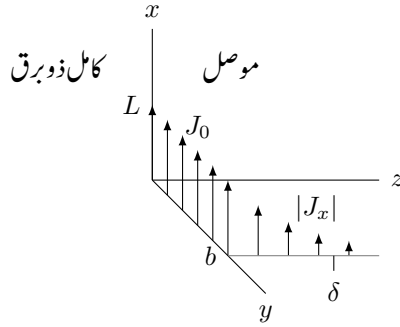
$$(10.69) \quad Z = \frac{\sqrt{2}/45^\circ}{\sigma\delta} = \frac{1}{\sigma\delta} + j\frac{1}{\sigma\delta}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ یوں مساوات 10.63 کو گہرائی جلد کی صورت

$$(10.70) \quad E_x = E_0 e^{-\frac{z}{\delta}} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)$$

میں لکھتے ہوئے مقناطیسی موج کو

$$(10.71) \quad H_y = \frac{\sigma\delta E_0}{\sqrt{2}} e^{-\frac{z}{\delta}} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta} - \frac{\pi}{4}\right)$$



شکل 10.7: موصل میں طاقت کے ضیاع اور گہرائی جلد۔

لکھا جا سکتا ہے جہاں سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مقناطیسی موج، برقی موج سے پھیرے کے آٹھویں حصے پیچھے ہے۔

مندرجہ بالا دو مساوات کی مدد سے پونٹنگ مساوات

$$\mathcal{P}_{\text{اوسط}} = \frac{1}{2} \frac{\sigma \delta E_0^2}{\sqrt{2}} e^{-\frac{2z}{\delta}} \cos \frac{\pi}{4}$$

یا

$$\mathcal{P}_{\text{اوسط}} = \frac{\sigma \delta E_0^2}{4} e^{-\frac{2z}{\delta}}$$

دیتا ہے۔ آپ دوبارہ دیکھ سکتے ہیں کہ ایک گہرائی جلد کی گہرائی پر کثافت طاقت، سرحد کے کثافت طاقت کے $e^{-2} = 0.135$ گنا رہ گئی ہے۔

شکل 10.7 پر دوبارہ نظر ڈالیں۔ مسئلہ پونٹنگ کہتا ہے کہ سرحد پر L اور b اطراف کے مستطیل میں جتنی برقی و مقناطیسی طاقت داخل ہوتی ہے، وہ تمام کی تمام موصل میں ضائع ہو جاتی ہے۔ یہ طاقت

$$\begin{aligned} P_{L, \text{اوسط}} &= \int_0^b \int_0^L \mathcal{P}_{\text{اوسط}}|_{z=0} dx dy \\ &= \int_0^b \int_0^L \frac{\sigma \delta E_0^2}{4} e^{-\frac{2z}{\delta}} \Big|_{z=0} dx dy \\ &= \frac{\sigma \delta b L E_0^2}{4} \end{aligned}$$

کے برابر ہے۔ سرحدی کثافت رو

$$J_0 = \sigma E_0$$

کی صورت میں اسے

$$(10.72) \quad P_{L, \text{اوسط}} = \frac{1}{4\sigma} \delta b L J_0^2$$

لکھا جاسکتا ہے۔

آئیں دیکھیں کہ اگر b چوڑائی میں کل برقی رو کو δ گہرائی تک محدود کر دیا جائے تو مزاحمتی ضیاع کتنا ہو گا۔ ایسا کرنے کی خاطر پہلے اس چوڑائی میں کل رو

$$I = \int_0^\infty \int_0^b J_x \, dy \, dz$$

حاصل کرتے ہیں جہاں تکمیل آسان بنانے کی غرض سے

$$J_x = J_0 e^{-\frac{z}{\delta}} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)$$

کو دوری سمتیہ کی شکل

$$\begin{aligned} J_{xs} &= J_0 e^{-\frac{z}{\delta}} e^{-j\frac{z}{\delta}} \\ &= J_0 e^{-(1+j)\frac{z}{\delta}} \end{aligned}$$

میں لکھ کر تکمیل حل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\infty \int_0^b J_0 e^{-(1+j)\frac{z}{\delta}} \, dy \, dz \\ &= \frac{J_0 b \delta}{1+j} \end{aligned}$$

اس سے

$$I = \frac{J_0 b \delta}{\sqrt{2}} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$$

لکھا جائے گا۔ اگر اس رو کو $0 < y < b$ اور $0 < z < \delta$ میں محدود کر دیا جائے تب نئی کثافت رو

$$J'_x = \frac{J_0}{\sqrt{2}} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$$

ہو گی۔ مزاحمتی طاقت کا ضیاع فی اکائی حجم $J \cdot E$ کے برابر ہے لہذا اس حجم میں کل ضیاع

$$P_L = \frac{1}{\sigma} (J'_x)^2 bL\delta = \frac{J_0^2}{2\sigma} bL\delta \cos^2\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$$

ہو گا۔ مربع کو سائن موج کی اوسط قیمت $\frac{1}{2}$ کے برابر ہوتی ہے لہذا اوسط طاقت کے ضیاع کو

$$(10.73) \quad P_L = \frac{J_0^2 bL\delta}{4\sigma}$$

لکھا جا سکتا ہے جو عین مساوات 10.72 ہے۔

اس نتیجے کو دیکھ کر اب کسی بھی موصل، جس میں اثر جلد پایا جاتا ہو، میں کل رو کو ایک جلد گہرائی میں یکساں تقسیم شدہ تصور کرتے ہوئے سلانخ کی مزاحمتی ضیاع حاصل کی جاسکتی ہے۔ یوں b چوڑائی، L لمبائی اور لامحدود گہرائی سلانخ جس میں اثر جلد پایا جاتا ہو اور b چوڑائی، L لمبائی اور δ گہرائی سلانخ جس میں یکساں تقسیم شدہ رو ہو کے مزاحمت بالکل برابر ہوں گے۔

اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے رداس r کے ٹھوس نکلی سلانخ کی مزاحمت بلند تعدد پر حاصل کی جاسکتی ہے۔ اگر گہرائی جلد سلانخ کے رداس سے بہت کم ہو تب اس طرح حاصل کردہ مزاحمت کی قیمت تقریباً بالکل درست ہو گی۔ ایسی تعدد جس پر اثر جلد پایا جاتا ہو کی صورت میں سلانخ کی بیرونی جلد ہی رو گزارے گی لہذا مزاحمت کی قیمت حاصل کرتے وقت اس نکلی نما جھلی کو ہی موصل تصور کیا جائے گا لہذا مزاحمت R

$$(10.74) \quad R = \frac{L}{\sigma S} = \frac{L}{\sigma 2\pi r \delta}$$

ایک ملی میٹر رداس اور دس میٹر لمبی تانبے کے تار کی ایک سمتی مزاحمت

$$R_{\text{سمتی}} = \frac{10}{5.8 \times 10^7 \times \pi \times 0.001^2} = 54.88 \text{ m}\Omega$$

ہے۔ ایک سو میگا ہرٹز کی تعدد پر تانبے کی $\delta = 6.61 \mu\text{m}$ ہوگی لہذا اس تعدد پر اسی تار کی مزاحمت

$$R = \frac{10}{5.8 \times 10^7 \times 2 \times \pi \times 0.001 \times 6.61 \times 10^{-6}} = 4.15 \Omega$$

ہوگی۔

مشق 10.6: ٹھوس نکلی نما لوہے کی تار جس کا رداس 5 mm اور جس کی لمبائی 2.5 m ہے میں $2 \cos 10000t$ ایمپیر کی برقی رو گزر رہی ہے۔ کتاب کے آخر میں ضمیمے سے $\sigma = 1.03 \times 10^7 \frac{\text{S}}{\text{m}}$ اور $\mu_R = 4000$ دئے گئے ہیں۔ یاد رہے کہ موصل کا $\epsilon_R = 1$ ہوتا ہے۔ آپ سے گزارش ہے کہ مندرجہ ذیل حاصل کریں۔

• ایک سمتی رو مزاحمت،

• گہرائی جلد،

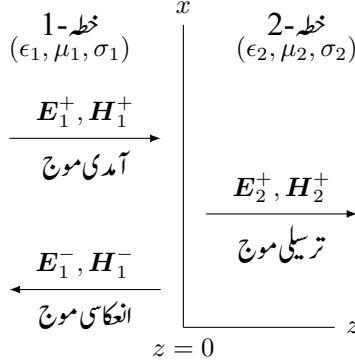
• بدلتی رو مزاحمت یا موثر مزاحمت،

• مزاحمتی طاقت کا ضیاع۔

جوابات: $3.09 \text{ m}\Omega$ ، $62 \mu\text{m}$ ، 1.25Ω اور 2.49 W

10.6 انعکاس مستوی موج

لا محدود جسامت کے حجم میں مستوی امواج ہم دیکھ چکے۔ ایسے حجم میں کبھی بھی موج دو مختلف اقسام کی اشیاء کے درمیان پائی جانے والی سرحد نہیں چھوتی۔ آئیں محدود جسامت کے حجم میں مستوی امواج پر غور کریں جہاں امواج کو ایک قسم کے مادے سے دوسرے قسم کے مادے میں داخل ہونا ہوگا۔ آپ دیکھیں گے کہ ایسی صورت میں موج کا کچھ حصہ پہلے خطے سے دوسرے خطے میں داخل ہو پاتا ہے جبکہ اس کا بقایا حصہ سرحد سے ٹکرا کر واپس پہلے خطے میں



شکل 10.8: آمدی موج سرحد سے گزرتی تریلی اور اس سے لوٹتی انعکاسی امواج پیدا کرتی ہے۔

لوٹ جاتا ہے۔ اس حصے میں ہم سرحد سے گزرتے اور اس سے ٹکرا کر واپس لوٹنے حصوں کی مساوات حاصل کریں گے۔ یہ نتائج ترمیمی تاروں⁵⁵ اور دیبر موج⁵⁶ کے مسائل میں جوں کے توں قابل استعمال ہوں گے۔

ہم $z < 0$ کو خطہ-1 تصور کرتے ہیں جہاں $(\epsilon_1, \mu_1, \sigma_1)$ ہیں جبکہ $z > 0$ کو خطہ-2 تصور کرتے ہیں جہاں $(\epsilon_2, \mu_2, \sigma_2)$ ہیں۔ یہ صورت حال شکل 10.8 میں دکھائی گئی ہے۔ ہم بڑھتے z جانب حرکت کرتے موج کو بالانوشٹ + جبکہ گھٹتے z جانب حرکت کرتے موج کو بالانوشٹ - سے ظاہر کریں گے۔ اب تصور کریں کہ پہلے خطے میں سرحد کی جانب برقی موج

$$(10.75) \quad E_{xs1}^+ = E_{x10}^+ e^{-\gamma_1 z}$$

آتی ہے۔ آپ جانتے ہیں کہ اس برقی موج کے ساتھ لازماً مقناطیسی موج

$$(10.76) \quad H_{ys1}^+ = \frac{E_{x10}^+}{Z_1} e^{-\gamma_1 z}$$

بھی ہوگی۔ سرحد کی طرف آتے موج کو آمدی موج⁵⁷ یا موج واقع کہا جاتا ہے۔ چونکہ یہ موج سرحد کی عمودی حرکت کر رہی ہے لہذا اس کی حرکت کو عمودی آمد⁵⁸ کہتے ہیں۔

transmission lines⁵⁵
waveguide⁵⁶
incident wave⁵⁷
normal incidence⁵⁸

اس آمدی موج کا کچھ حصہ جسے ترسیلی موج⁵⁹ کہتے ہیں، سرحد سے گزرتے ہوئے سیدھا چلے جائے گا۔ ترسیلی امواج

$$(10.77) \quad E_{xs2}^+ = E_{x20}^+ e^{-\gamma_2 z}$$

$$(10.78) \quad H_{ys2}^+ = \frac{E_{x20}^+}{Z_2} e^{-\gamma_2 z}$$

ہیں۔ سرحد کے دوسرے جانب حرکی مستقل γ_2 اور قدرتی رکاوٹ Z_2 ہیں جو پہلے خطے سے مختلف ہیں۔ ترسیلی امواج سرحد سے دور چلتی جاتی ہیں۔

آمدی اور ترسیلی برقی امواج x محدود کے متوازی جبکہ مقناطیسی امواج y محدود کے متوازی ہیں لہذا یہ چاروں امواج سرحد کے بھی متوازی ہیں۔ صفحہ 420 پر مساوات 9.45 اور اس کے قریب ہی مساوات 9.47 متوازی امواج کی سرحدی شرائط بیان کرتے ہیں۔ اب کائنات میں کبھی بھی دو اشیاء کی سرحد پر سطحی کشافت رو نہیں پائی جاتی۔ یوں $K_{\perp} = 0$ لیتے ہوئے ان شرائط کو

$$\begin{aligned} E_{m1} &= E_{m2} \\ H_{m1} &= H_{m2} \quad (K_{\perp} = 0) \end{aligned}$$

لکھا جاتا ہے۔

اب اگر پہلی شرط پوری کی جائے تو سرحد کے دونوں اطراف پر متوازی برقی میدان برابر ہوں گے لہذا $z = 0$ پر مساوات 10.75 اور مساوات 10.77 برابر ہوں گی۔ یوں $E_{x10}^+ = E_{x20}^+$ حاصل ہوتا ہے لیکن دوسری شرط کے مطابق سرحد کے دونوں جانب متوازی مقناطیسی میدان بھی برابر ہونا ہو گا لہذا $z = 0$ پر مساوات 10.76 اور مساوات 10.78 بھی برابر ہوں گی جس سے $\frac{E_{x10}^+}{Z_1} = \frac{E_{x20}^+}{Z_2}$ حاصل ہوتا ہے۔ یہ دونوں تب ممکن ہے جب $Z_1 = Z_2$ ہو جو حقیقت میں کبھی بھی نہیں ہو گا لہذا صرف آمدی اور ترسیلی امواج کی صورت میں سرحدی شرائط پر پورا نہیں اترا جاسکتا۔ مندرجہ بالا دونوں سرحدی شرائط صرف اس صورت میں پوری ہوتی ہیں جب سرحد سے ٹکرا کر واپس لوٹتی انعکاسی امواج

$$(10.79) \quad E_{xs1}^- = E_{x10}^- e^{\gamma_1 z}$$

$$(10.80) \quad H_{ys1}^- = -\frac{E_{x10}^-}{Z_1} e^{\gamma_1 z}$$

بھی پائے جائیں جنہیں موج منعکس⁶⁰ کہا جاتا ہے۔ انعکاسی موج کا حرکی مستقل γ_1 ہی ہے جبکہ یہ موج گھٹتے z جانب حرکت کر رہی ہے۔ انعکاسی موج میں E_{x10}^- مخلوط عدد ہو سکتا ہے۔ چونکہ انعکاسی امواج گھٹتے z جانب حرکت کرتی ہیں لہذا مسئلہ پوئنگنگ کے تحت $E_{xs1}^- = -Z_1 H_{ys1}^-$ ہو گا تاکہ $\mathbf{E}_1^- \times \mathbf{H}_1^-$ کی سمت $-a_z$ ہو۔

آمدی، ترسیلی اور انعکاسی امواج کی صورت میں دونوں سرحدی شرائط پورے ہوتے ہیں اور ان کی مدد سے E_{x10}^+ کی صورت میں بقایا تمام امواج کے طول بھی حاصل ہوتے ہیں۔ آئیں دیکھیں کہ ایسا کس طرح ہوتا ہے۔

اب پہلے خطے میں آمدی امواج کے علاوہ انعکاسی امواج بھی پائے جاتے ہیں لہذا سرحدی شرائط میں دونوں کا مجموعہ استعمال کیا جائے گا۔ یوں $z = 0$ پر سرحد کے دونوں جانب متوازی برقی میدان برابر ہونے سے

$$E_{xs1} = E_{xs2} \quad (z = 0)$$

یعنی

$$E_{xs1}^+ + E_{xs1}^- = E_{xs2}^+ \quad (z = 0)$$

یا

$$(10.81) \quad E_{x10}^+ + E_{x10}^- = E_{x20}^+$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح $z = 0$ پر سرحد کے دونوں جانب متوازی مقناطیسی میدان کے برابری سے

$$H_{ys1} = H_{ys2} \quad (z = 0, K_{\perp} = 0)$$

یعنی

$$H_{ys1}^+ + H_{ys1}^- = H_{ys2}^+ \quad (z = 0, K_{\perp} = 0)$$

یا

$$(10.82) \quad \frac{E_{x10}^+}{Z_1} - \frac{E_{x10}^-}{Z_1} = \frac{E_{x20}^+}{Z_2}$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 10.81 اور مساوات 10.82 کو E_{x10}^- کی خاطر حل کرنے کی غرض سے مساوات 10.81 کو مساوات میں پر کرتے

$$\frac{E_{x10}^+}{Z_1} - \frac{E_{x10}^-}{Z_1} = \frac{E_{x10}^+ + E_{x10}^-}{Z_2}$$

ہوئے یوں

$$E_{x10}^- = E_{x10}^+ \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}$$

حاصل ہوتا ہے۔ انعکاسی اور آمدی برقی میدان کے حیطوں کی شرح کو شرح انعکاس⁶¹ پکارا اور Γ سے ظاہر⁶² کیا جاتا ہے۔

$$(10.83) \quad \Gamma = \frac{E_{x10}^-}{E_{x10}^+} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}$$

مخلوط شرح انعکاس کی صورت میں انعکاسی اور آمدی میدان میں زاویائی فرق پایا جائے گا۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ شرح انعکاس کی حتمی قیمت صرفتا ایک ممکن ہے۔

$$(10.84) \quad |\Gamma| \leq 1$$

اسی طرح مساوات 10.81 اور مساوات 10.82 سے E_{x10}^- ختم کرنے سے

$$(10.85) \quad \tau = \frac{E_{x20}^+}{E_{x10}^+} = \frac{2Z_2}{Z_2 + Z_1}$$

حاصل ہوتا ہے جو شرح ترسیل⁶³ کہلایا اور τ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ مساوات 10.83 اور مساوات 10.85 سے

$$(10.86) \quad \tau = 1 + \Gamma$$

لکھا جاسکتا ہے۔

آئیں ان نتائج کو چند مخصوص صورتوں میں استعمال کرتے ہیں۔ تصور کریں کہ پہلا خطہ کامل ذو برق جبکہ دوسرا خطہ کامل موصل ہے۔ ایسی صورت میں σ_2 لامحدود ہو گا لہذا

$$Z_2 = \sqrt{\frac{j\omega\mu_2}{\sigma_2 + j\omega\epsilon_2}} = 0$$

ہو گا۔ یوں مساوات 10.85 سے

$$E_{x20}^+ = 0$$

⁶¹ reflection coefficient

⁶² Γ یونانی حرف تھی جیسا ہے۔

⁶³ transmission coefficient

حاصل ہوتا ہے یعنی کامل موصل میں کسی صورت بھی وقت کے ساتھ بدلتا میدان نہیں پایا جاسکتا۔ اس کو یوں بھی بیان کیا جاسکتا ہے کہ کامل موصل کی گہرائی جلد صفر کے برابر ہے۔

مساوات 10.83 میں $Z_2 = 0$ پر کرنے سے

$$\Gamma = -1$$

یعنی

$$E_{x10}^- = -E_{x10}^+$$

حاصل ہوتا ہے۔ انعکاسی موج کا حیثہ بالکل آمدی موج کے حیثے کے برابر ہے لیکن ان میں 180° کا زاویہ پایا جاتا ہے۔ موصل سطح آمدی توانائی کو واپس کرتی ہے اور یوں پہلے خطے میں کل برقی میدان

$$\begin{aligned} E_{xs1} &= E_{xs1}^+ + E_{xs1}^- \\ &= E_{x10}^+ e^{-j\beta_1 z} - E_{x10}^+ e^{j\beta_1 z} \end{aligned}$$

ہوگا جہاں کامل ذو برق میں $\gamma_1 = 0 + j\beta_1$ لیا گیا ہے۔ اس کو حل کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} E_{xs1} &= E_{x10}^+ (e^{-j\beta_1 z} - e^{j\beta_1 z}) \\ &= -j2E_{x10}^+ \sin \beta_1 z \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے جو دوری سمتیہ کی صورت میں ہے جسے $e^{j\omega t}$ سے ضرب دے کر حقیقی جزو لیتے ہوئے اصل موج کی مساوات

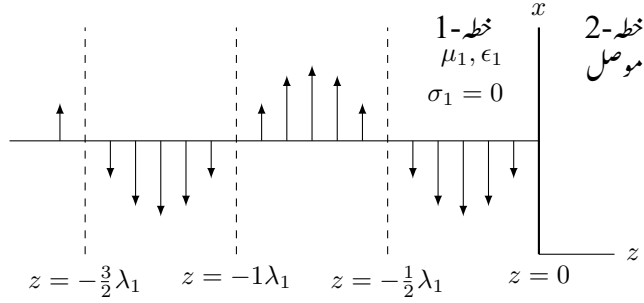
$$(10.87) \quad E_{x1} = 2E_{x10}^+ \sin \beta_1 z \sin \omega t$$

حاصل ہوتی ہے۔ یہ مساوات ساکن میدان کو ظاہر کرتی ہے۔ یاد رہے کہ اسے دو آپس میں الٹ سمت میں حرکت کرتے امواج سے حاصل کیا گیا ہے۔ اس کا موازنہ آمدی موج

$$E_{x1}^+ = E_{x10}^+ \cos(\omega t - \beta_1 z)$$

سے کریں۔ حرکت کرتے موج کی پہچان جزو $\omega t - \beta_1 z$ ہے جو مثبت سمت میں موج کو ظاہر کرتی ہے۔ مساوات 10.87 میں ωt اور $\beta_1 z$ علیحدہ علیحدہ پائے جاتے ہیں۔

مساوات 10.87 میں جس لمحہ $\omega t = n\pi$ کے برابر ہو اس لمحہ میدان ہر نقطے پر صفر کے برابر ہوگا۔ اس کے علاوہ جس نقطے پر $\beta_1 z = n\pi$ کے برابر ہو، اس نقطے پر ہر وقت میدان صفر ہی رہتا ہے۔ مساوات 10.87 کو ساکن



شکل 10.9: ساکن موج، برقی میدان۔

موج⁶⁴ کہا جاتا ہے۔ برقی میدان ان سطحوں پر ہر وقت صفر رہتا ہے جہاں

$$\beta_1 z = n\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

ہو جس سے

$$\frac{2\pi}{\lambda_1} z = n\pi$$

یعنی

$$z = n \frac{\lambda_1}{2}$$

حاصل ہوتا ہے۔ یوں سرحد یعنی $z = 0$ پر برقی میدان صفر ہو گا اور پہلے نخلے میں سرحد سے دور چلتے ہوئے ہر آدھے طول موج پر صفر برقی میدان پایا جائے گا۔ یہ صورت حال شکل 10.9 میں دکھائی گئی ہے۔ اس شکل میں نقطہ دار لکیر ان سطحوں کو ظاہر کرتی ہیں جہاں میدان صفر رہتا ہے۔ برقی میدان کو وقت $t = \frac{\pi}{2}$ پر دکھایا گیا ہے جب اس کا حیثہ زیادہ سے زیادہ ہوتا ہے۔

چونکہ $E_{xs1}^+ = Z_1 H_{ys1}^+$ اور $E_{xs1}^- = -Z_1 H_{ys1}^-$ ہوتے ہیں لہذا مقناطیسی میدان

$$H_{ys1} = \frac{E_{x10}^+}{Z_1} (e^{-j\beta_1 z} + e^{j\beta_1 z})$$

یا

$$(10.88) \quad H_{y1} = 2 \frac{E_{x10}^+}{Z_1} \cos \beta_1 z \cos \omega t$$

ہو گا۔ یہ بھی ساکن موج ہے لیکن جس سطح پر برقی میدان صفر رہتا ہے وہاں مقناطیسی ساکن موج کی چوٹی پائی جاتی ہے۔ اس کے علاوہ برقی اور مقناطیسی ساکن امواج میں 90° کا وقتی فرق پایا جاتا ہے لہذا یہ امواج کسی بھی سمت میں اوسطاً صفر طاقت منتقل کرتی ہیں۔

آئیں اب دو کامل ذو برق کی سرحد پر صورت حال دیکھیں۔ اب ان دو خطوں میں قدرتی رکاوٹ Z_1 اور Z_2 جبکہ $\alpha_1 = 0$ اور $\alpha_2 = 0$ ہوں گے۔ عددی قیمتیں لے کر آگے چلتے ہیں۔ فرض کریں کہ

$$Z_1 = 50 \Omega$$

$$Z_2 = 377 \Omega$$

$$E_{x10}^+ = 10 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

ہیں۔ یوں

$$\Gamma = \frac{377 - 50}{377 + 50} = 0.7658$$

ہے لہذا

$$E_{x10}^- = 0.7658 \times 10 = 7.658 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

ہو گا۔ پہلے نچلے میں مقناطیسی میدان

$$H_{y10}^+ = \frac{10}{50} = 0.2 \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

$$H_{y10}^- = -\frac{7.658}{50} = -0.153 \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

ہیں۔ آمدی اوسط سطحی کثافت طاقت مساوات 10.55 سے

$$P_{1, \text{اوسط}}^+ = \frac{1}{2} \frac{(E_{x10}^+)^2}{|Z_1|} e^{-2\alpha_1 z} \cos \theta_{Z1} = 1 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

جبکہ انعکاسی اوسط سطحی کثافت طاقت

$$P_{1, اوسط}^- = \frac{1}{2} \frac{(E_{x10}^-)^2}{|Z_1|} e^{-2\alpha_1 z} \cos \theta_{Z1} = 0.5864 \frac{W}{m^2}$$

ہے۔ ان مساوات میں $\alpha_1 = 0$ اور $Z_1 = 50 \Omega$ استعمال کئے گئے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ انعکاسی اور آمدی کثافت طاقت کی شرح

$$(10.89) \quad \frac{\frac{(E_{x10}^-)^2}{2Z_0}}{\frac{(E_{x10}^+)^2}{2Z_0}} = |\Gamma|^2$$

کے برابر ہے۔

دوسرے خطے میں

$$E_{x20}^+ = \frac{2Z_2}{Z_2 + Z_1} E_{x10}^+ = 17.658 \frac{V}{m}$$

$$H_{y20}^+ = \frac{17.658}{377} = 0.04684 \frac{A}{m}$$

ہیں لہذا

$$P_{2, اوسط}^+ = \frac{1}{2} \frac{(E_{x20}^+)^2}{|Z_2|} e^{-2\alpha_2 z} \cos \theta_{Z2} = 0.4135 \frac{W}{m^2}$$

ہو گا۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ انعکاسی اور ترسیلی طاقت کا مجموعہ آمدی طاقت کے عین برابر ہے۔

$$P_{1, اوسط}^+ = P_{1, اوسط}^- + P_{2, اوسط}^+$$

مثال 10.6: ہوا سے سمندری پانی ($\epsilon_R = 78, \mu_R = 1, \sigma = 5$) کی سطح پر 50 MHz تعدد کی بائیں دائری برقی موج عمودی آمد ہے۔ حرکی مستقل، انعکاسی مستقل اور ترسیلی مستقل حاصل کریں۔

حل: ہوا کی قدرت رکاوٹ $Z_1 = 377 \Omega$ ہے۔ سمندری پانی کی قدرتی رکاوٹ

$$\begin{aligned} Z_2 &= \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}} = \sqrt{\frac{j2\pi \times 50 \times 10^6 \times 4\pi \times 10^{-7}}{5 + j2\pi \times 50 \times 10^6 \times 78 \times 8.85 \times 10^{-12}}} \\ &= 6.41 + j6.14 \quad \Omega \end{aligned}$$

اور حرکی مستقل

$$\begin{aligned} \gamma_2 &= \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)} \\ &= \sqrt{j2\pi \times 50 \times 10^6 \times 4\pi \times 10^{-7}(5 + j2\pi \times 50 \times 10^6 \times 78 \times 8.85 \times 10^{-12})} \\ &= 30.7 + j32.1 \quad \text{m}^{-1} \end{aligned}$$

ہیں۔ سمندری پانی میں $\sigma \gg \omega\epsilon$ ہے لہذا سمندری پانی کو موصل تصور کیا جاسکتا ہے۔ ایسا کرنے سے حرکی مستقل

$$\gamma_2 = \sqrt{\pi f \mu \sigma (1 + j)} = 31.4 + j31.4$$

حاصل ہوتا ہے جو مکمل درست جواب $(30.7 + j32.1)$ کے انتہائی قریب جواب ہے۔

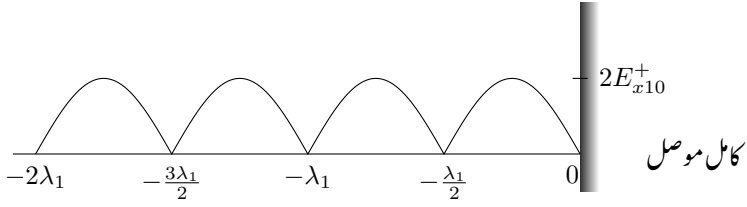
شرح انعکاس

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{6.41 + j6.14 - 377}{6.41 + j6.14 + 377} \\ &= -0.966 + j0.031 \\ &= 0.9665/178^\circ \end{aligned}$$

اور شرح ترسیل

$$\begin{aligned} \tau &= 1 + \Gamma = 0.034 + j0.031 \\ &= 0.046/53^\circ \end{aligned}$$

حاصل ہوتے ہیں۔



شکل 10.10: کامل موصل سے انعکاس، کامل ذوبق میں ساکن موج پیدا کرتا ہے۔

10.7 شرح ساکن موج

کسی بھی ترسیلی نظام میں مختلف مقامات پر برقی یا مقناطیسی میدان کے راست تناسب اشارہ باآسانی حاصل کیا جاسکتا ہے۔ محوری تار کا اندرونی تار ذرا زیادہ لمبا رکھتے ہوئے برقی میدان حاصل کیا جاسکتا ہے۔ اسی طرح تار کا ایک چھوٹا دائرہ مقناطیسی میدان کا نمونہ حاصل کرنے میں کام آتا ہے۔ ان آلات سے حاصل اشارات کو سمت کار⁶⁵ سے گزارتے ہوئے مائیکرو میٹر سے ناپا جاسکتا ہے۔ مائیکرو میٹر میدان کے حیطے کے راست تناسب جواب دیتا ہے۔ ان آلات کو عموماً درکار اشارات کے ہمسر⁶⁶ رکھا جاتا ہے تاکہ یہ زیادہ حساس ہوں۔

اگر بغیر ضیاع خطے میں یکساں مستوی موج حرکت کر رہی ہو اور اس خطے میں انعکاسی موج نہ پائی جاتی ہو تب میدان ناپنے والا آلہ تمام مقامات پر یکساں حیطہ دکھائے گا۔ ایسا آلہ تیزی سے تبدیل ہوتے حیطے کو دکھانے سے قاصر ہوتا ہے۔ ہر جگہ برابر حیطہ اس بات کی نشانی ہے کہ خطے میں طاقت ضائع نہیں ہوتی اور یہ کہ انعکاسی موج بھی غیر موجود ہے۔

اس کے برعکس کامل ذوبق میں آمدی موج کا کامل موصل سے انعکاس، ساکن موج پیدا کرتا ہے۔ ایسے خطے میں میدان ناپتا آلہ مختلف مقامات پر مختلف حیطے ناپے گا۔ چونکہ سرحد سے ہر آدھے طول موج کے فاصلے پر میدان صفر رہتا ہے لہذا ان نقطوں پر آلہ صفر حیطہ ناپے گا جبکہ عین ایسے دو قریبی نقطوں کے درمیان آلہ زیادہ سے زیادہ حیطہ دکھائے گا۔ آلے کو سرحد کے قریب اور دور کرنے سے ناپے گئے حیطے کی شکل $|\sin \beta z|$ کی طرح حاصل ہوگی جہاں سرحد سے فاصلہ z ہے۔ اسے شکل 10.10 میں دکھایا گیا ہے۔ سائن نما حیطے کا تبدیل ہونا ساکن موج کی پہچان ہے۔

rectifier⁶⁵
tuned⁶⁶

مثال 10.7: کامل موصل سے انعکاس کی صورت میں کامل ذو برق میں ساکن موج کی مساوات حاصل کریں۔

حل: کامل موصل سے انعکاس کی صورت میں $\Gamma = -1$ حاصل ہوتا ہے لہذا $E_{xs1}^- = -E_{x10}^+ e^{j\beta_1 z}$ ہو گا۔ یوں آمدی اور انعکاسی امواج کا مجموعہ

$$\begin{aligned} E_{xs1} &= E_{x10}^+ e^{-j\beta_1 z} - E_{x10}^+ e^{j\beta_1 z} \\ &= -2jE_{x10}^+ \sin \beta_1 z \end{aligned}$$

ہو گا۔ اس دوری سمتیہ سے حقیقی ساکن موج کی مساوات حاصل کرنے کی خاطر اسے $e^{j\omega t}$ سے ضرب دیتے ہوئے

$$E_{xs1} e^{j\omega t} = -2jE_{x10}^+ \sin \beta_1 z \cos \omega t + 2E_{x10}^+ \sin \beta_1 z \sin \omega t$$

حقیقی جزو

$$E_{x1} = 2E_{x10}^+ \sin \beta_1 z \sin \omega t$$

لیتے ہیں۔ یہی ساکن موج کی مساوات ہے۔ شکل 10.10 میں آلہ ناپ سے حاصل $|E_{x1}|$ دکھایا گیا ہے۔

اب ایسی صورت پر غور کرتے ہیں جہاں تمام کی تمام موج سرحد سے واپس نہیں لوٹی بلکہ اس کا کچھ حصہ سرحد پار کرتے ہوئے دوسری جانب چلے جاتی ہے۔ پہلے نخلے میں اب آمدی موج کے علاوہ ایسی انعکاسی موج پائی جاتی ہے جس کا جیٹھ آمدی موج سے کم ہوتا ہے۔ اگرچہ اب پہلے نخلے میں ساکن موج کے ساتھ ساتھ حرکت کرتی موج بھی پائی جاتی ہے لیکن اس کے باوجود اس کو ساکن موج ہی کہا جاتا ہے۔ اب کسی بھی نقطے پر میدان ہر وقت صفر نہیں رہتا۔ ساکن اور حرکت کرتے حصوں کا اندازہ جیٹھے کی زیادہ سے زیادہ قیمت اور اس کے کم سے کم قیمت کی شرح سے بیان کی جاتی ہے۔ اس شرح کو شرح ساکن موج⁶⁷ کہا اور s سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

فرض کریں کہ پہلا نخلہ کامل ذو برق ہے جبکہ دوسرا نخلہ کوئی بھی مادہ ہو سکتا ہے۔ یوں $\alpha_1 = 0$ ہو گا۔ اب

$$\begin{aligned} E_{xs1}^+ &= E_{x10}^+ e^{-j\beta_1 z} \\ E_{xs1}^- &= \Gamma E_{x10}^+ e^{j\beta_1 z} \end{aligned}$$

ہوں گے جہاں

$$\Gamma = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}$$

ہے۔ چونکہ کامل ذو برق میں $\sigma = 0$ ہوتا ہے لہذا Z_1 مثبت حقیقی عدد ہے جبکہ Z_2 مخلوط عدد ہو سکتا ہے لہذا Γ بھی مخلوط ہو سکتا ہے۔ یوں اسے

$$\Gamma = |\Gamma| e^{j\phi}$$

بھی لکھا جا سکتا ہے۔ یوں

$$E_{xs1}^- = |\Gamma| E_{x10}^+ e^{j(\beta_1 z + \phi)}$$

لکھا جا سکتا ہے جس سے ساکن موج کی مساوات

$$(10.90) \quad E_{xs1} = \left(e^{-j\beta_1 z} + |\Gamma| e^{j(\beta_1 z + \phi)} \right) E_{x10}^+$$

حاصل ہوتی ہے۔

اب آپ جانتے ہیں کہ کسی بھی مخلوط عدد $e^{j\theta}$ کو

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$$

لکھا جا سکتا ہے۔ چونکہ $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ ہوتا ہے لہذا اس کی حتمی قیمت ایک (1) ہی رہتی ہے۔ اس عدد کی زیادہ سے زیادہ قیمت $\theta = 0$ کی صورت میں +1 حاصل ہوتی ہے۔ یہی قیمت $\theta = \mp 2\pi$ یا $\theta = \mp 4\pi$ کی صورت میں بھی حاصل ہوتی ہے۔ اسی طرح اس کی کم سے کم قیمت $\theta = \mp \pi, \mp 3\pi, \mp 5\pi \dots$ پر -1 حاصل ہوتی ہے۔ اس طرح مساوات 10.90 کو

$$E_{xs1} = \left(1 + |\Gamma| e^{j(2\beta_1 z + \phi)} \right) e^{-j\beta_1 z} E_{x10}^+$$

لکھتے ہوئے اگر $2\beta_1 z + \phi$ کو θ تصور کیا جائے تو زیادہ سے زیادہ قیمت یعنی +1

$$2\beta_1 z + \phi = 0, 2\pi, -2\pi, 4\pi, -4\pi, \dots$$

پر حاصل ہوگی۔ اس مساوات کو

$$(10.91) \quad -\beta_1 z + \frac{\phi}{2} = n\pi \quad (n = 0, \mp 1, \mp 2, \dots)$$

لکھا جا سکتا ہے۔ ایسی صورت میں

$$(10.92) \quad |E_{xs1}|_{\text{بلندتر}} = (1 + |\Gamma|) E_{x10}^+$$

ہو گا۔

$Z_2 \gg Z_1$ کی صورت میں $\Gamma = 1/0^\circ$ حاصل ہوتا ہے۔ یوں سرحد پر ساکن موج کی چوٹی پائی جائے گی۔ اگلی چوٹی سرحد سے $\frac{\lambda}{2}$ فاصلے پر ہوگی۔ Z_1 اور Z_2 کے کسی بھی اور قیمت کی صورت میں سرحد اور پہلی چوٹی کے درمیان فاصلہ $\frac{\lambda}{2}$ سے کم ہوگا۔

اسی طرح $e^{j(2\beta_1 z + \phi)}$ کی کم سے کم قیمت یعنی -1

$$2\beta_1 z + \phi = \pi, -\pi, 3\pi, -3\pi, \dots$$

پر حاصل ہوگی۔ اس مساوات کو

$$(10.93) \quad -\beta_1 z_{\text{سٹر}} = \frac{\phi}{2} + n\pi + \frac{\pi}{2} \quad (n = 0, \mp 1, \mp 2, \dots)$$

لکھا جا سکتا ہے اور ایسی صورت میں

$$(10.94) \quad |E_{xs1}|_{\text{سٹر}} = (1 - |\Gamma|) E_{x10}^+$$

ہو گا۔

$Z_2 \ll Z_1$ کی صورت میں سرحد پر ساکن موج کی کمتر قیمت پائی جائے گی۔ اگلی کمتر قیمت سرحد سے $\frac{\lambda}{2}$ فاصلے پر ہوگی۔ Z_1 اور Z_2 کے کسی بھی اور قیمت کی صورت میں سرحد اور پہلی کمتر نقطے کے درمیان فاصلہ $\frac{\lambda}{2}$ سے کم ہوگا۔

مساوات 10.91 سے بلندتر z اور مساوات 10.93 سے سٹر z حاصل کرتے ہوئے دھیان رہے کہ صرف ان قیمتوں کو درست تصور کیا جائے جو شکل 10.11 میں ٹھیک طرف پائی جاتی ہوں یعنی بلندتر z اور سٹر z کی قیمت منفی ہونی چاہیے۔

موج کی کم تر قیمت ہر آدھے طول موج پر پائی جاتی ہے۔ موج کی بلند تر قیمت دو کم تر قیمتوں کے مقام کے عین وسط میں پائی جاتی ہیں۔ کامل موصل کی صورت میں پہلا کمتر میدان $-\beta_1 z = 0$ یعنی سرحد پر پایا جائے گا۔ اگر

$Z_2 < Z_1$ ہو اور دونوں قدرتی رکاوٹوں کی قیمتیں حقیقی اعداد ہوں تب $\phi = \pi$ ہو گا اور ایسی صورت میں سرحد یعنی $0 = -\beta_1 z$ پر برقی دباؤ کی کمتر قیمتیں پائی جائیں گی۔ اس کے برعکس اگر $Z_2 > Z_1$ ہو اور دونوں رکاوٹ حقیقی ہوں تب سرحد پر برقی میدان کی قیمت بلند تر ہو گی۔

ان معلومات کو زیر استعمال لانے کی غرض سے $10 \frac{\text{V}}{\text{m}}$ اور 1 GHz تعدد کے موج پر غور کرتے ہیں جو خطہ اول میں سرحد کی طرف عمودی آمد ہے۔ پہلے خطے کے مستقل $\epsilon_{R1} = 3$ ، $\mu_{R1} = 1$ اور $\sigma_1 = 0$ جبکہ دوسرے خطے کے مستقل $\epsilon_{R1} = 6$ ، $\mu_{R1} = 1$ اور $\sigma_1 = 0$ ہیں۔

یوں

$$\omega = 2\pi 10^9 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, \quad \beta_1 = 36.28 \frac{\text{rad}}{\text{m}}, \quad \beta_2 = 51.3 \frac{\text{rad}}{\text{m}}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ اگرچہ خالی خلاء میں اس موج کی طول 30 cm ہو گی، یہاں $\lambda_1 = 17.32 \text{ cm}$ اور $\lambda_2 = 12.25 \text{ cm}$ ہیں۔ قدرتی رکاوٹ $Z_1 = 217.66 \Omega$ اور $Z_2 = 153.91 \Omega$ ہیں جن سے شرح انعکاس $\Gamma = -0.17$ حاصل ہوتا ہے۔ چونکہ دونوں رکاوٹ حقیقی اعداد ہیں اور $Z_2 < Z_1$ ہے لہذا سرحد پر کمتر برقی میدان پایا جائے گا۔ پہلے خطے، یعنی $z < 0$ ، میں سرحد سے دور ہر 8.66 cm فاصلے پر برقی میدان کی کمتر قیمت پائی جائے گی۔ مساوات 10.94 سے ساکن موج کی کمتر قیمت $8.3 \frac{\text{V}}{\text{m}} = |E_{xs1}|$ حاصل ہوتی ہے۔ چونکہ پہلا خطہ کامل ذو برق ہے لہذا اس میں طاقت کا ضیاع نہیں ہوتا اور یوں اس خطے میں تمام کمتر قیمتیں برابر ہوں گی۔

میدان کی بلند تر قیمت $11.7 \frac{\text{V}}{\text{m}}$ پہلے خطے میں سرحد سے 4.33 ، 12.99 ، 21.65 ، ... سنٹی میٹر کے فاصلوں پر پائی جائیں گی۔

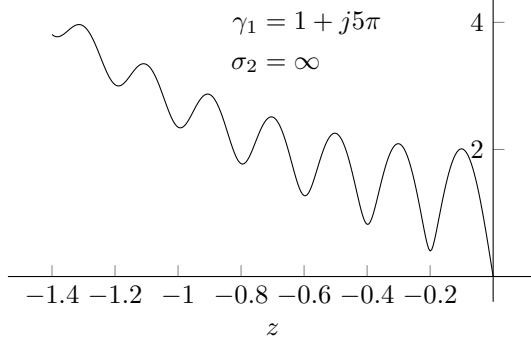
چونکہ دوسرے خطے میں انعکاسی موج نہیں پائی جاتی لہذا اس میں ساکن موج بھی نہیں پائی جائے گی۔

ساکن موج کی زیادہ سے زیادہ اور کم سے کم قیمتوں کی شرح کو شرح ساکن موج⁶⁸ کہا اور s سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$(10.95) \quad s = \frac{|E_{xs1}|_{\text{بلند تر}}}{|E_{xs1}|_{\text{کم تر}}} = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|}$$

چونکہ $|\Gamma| \leq 1$ رہتا ہے لہذا شرح ساکن موج ہر صورت مثبت اور اکائی کے برابر یا اس سے زیادہ قیمت کا ہو گا یعنی

$$(10.96) \quad s \geq 1$$



شکل 10.11: غیر کامل ذو برق میں ساکن موج کی بلند تر اور کم تر قیمتوں میں فرق سرحد سے دور کم ہوتا ہے۔

مندرجہ بالا مثال میں $s = \frac{1+0.17}{1-0.17} = 1.409$ ہے۔

اگر $|\Gamma| = 1$ ہو تب انعکاسی اور آمدی امواج برابر ہوں گے لہذا تمام کی تمام آمدی توانائی سرحد سے واپس لوٹتی ہے اور ایسی صورت میں s لا محدود ہو گی۔ پہلے خطے میں ہر $\frac{\lambda_1}{2}$ فاصلے پر ایسی سطح پائی جائے گی جس پر برقی میدان ہر وقت صفر رہتا ہے۔ ان سطحوں کے درمیان ایسی سطحیں ہوں گی جہاں آمدی موج کے دگنے حیطے کا برقی میدان ہو گا۔

اگر $Z_2 = Z_1$ ہو تب $\Gamma = 0$ ہو گا۔ ایسی صورت میں توانائی سرحد سے واپس نہیں لوٹتی، $s = 1$ ہوتا ہے اور برقی میدان کی بلند تر اور کم تر قیمتیں برابر ہوتی ہیں۔

آدھی طاقت کے انعکاس کی صورت میں $|\Gamma|^2 = 0.5$ یعنی $|\Gamma| = 0.707$ اور $s = 5.83$ ہو گا۔

چونکہ برقی اور مقناطیسی میدان کے راست تناسب اشارات باآسانی حاصل کئے جاسکتے ہیں اور s کی قیمت حاصل کرنے کے لئے راست تناسب کے اشارات ہی درکار ہیں لہذا شرح ساکن موج کو تجرباتی طور حاصل کیا جاسکتا ہے۔ یہی اس کی اہمیت کا راز ہے۔ یاد رہے کہ s حاصل کرنے کے لئے میدان کی اصل قیمت درکار نہیں ہوتی۔ صرف اتنا ضروری ہوتا ہے کہ تمام اشارات اصل میدان کے تناسب سے ہوں۔

آئیں اب پہلے خطے کو غیر کامل ذو برق تصور کریں جس کا α صفر کے برابر نہیں ہو گا۔ اب بائیں سے آتی آمدی موج مثبت z جانب چلتے ہوئے گھٹے گی۔ انعکاسی موج منفی z جانب چلتے ہوئے گھٹے جائے گی حتیٰ کہ آخر کار اس کی قیمت قابل نظر انداز ہو گی۔ یوں اگرچہ سرحد کے قریب بلند تر اور کم تر میدان میں فرق واضح ہو سکتا ہے لیکن سرحد سے دور ان میں فرق نہیں رہ پاتا۔ پہلے خطے کا حرکی مستقل $\gamma_1 = 1 + j5\pi$ اور دوسرا خطے کا موصل ہونے کی

صورت میں ایسی ہی ایک ساکن موج شکل 10.11 میں دکھائی گئی ہے جہاں موصل $z = 0$ کے دائیں ہاتھ پر ہے۔ اس شکل میں عین سرحد پر آمدی موج کی قیمت $E_{x10}^+ = 1 \frac{V}{m}$ ہے۔ چونکہ ذو برق کی سرحد موصل کے ساتھ ہے اور موصل میں برقی میدان صفر ہوتا ہے لہذا شکل میں سرحد پر برقی میدان صفر ہی ہے۔ سرحد سے $0.2 \text{ m} = \frac{2\pi}{\beta_1}$ فاصلے پر دوبارہ کم تر میدان پایا جاتا ہے۔ اسی طرح پہلی چوٹی سرحد پر آمدی میدان کے تقریباً دگنی ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کوئی بھی دو چوٹیاں یا دو نشیب برابر نہیں ہیں۔ یہاں شرح ساکن موج کی قیمت اس صورت مطلب رکھتی ہے جب اسے ناپنے کا مقام یعنی z بھی ساتھ بتلایا جائے۔ ایسی صورت میں انعکاسی شرح اور تضعیفی مستقل زیادہ کار آمد معلومات ہیں۔

اگرچہ مندرجہ بالا مثال زیادہ انتہا درجے کا تھا لیکن یہ بھی نہیں بھولنا چاہئے کہ حقیقت میں کامل ترسلی تار بھی نہیں پائے جاتے۔ حقیقت میں شرح ساکن موج ہر صورت سرحد سے فاصلے پر منحصر ہوگی اور اس کا استعمال اسی وقت ممکن ہوگا جب ہماری دلچسپی کے خطے میں اس کی قیمت زیادہ تبدیل نہ ہو۔

آئیں دوبارہ پہلا خطہ کامل ذو برق لیتے ہوئے برقی اور مقناطیسی میدان کی شرح حاصل کریں۔ لامحدود حجم میں آزاد موج کی صورت میں یہ شرح Z_1 تھی۔ انعکاسی موج کی موجودگی میں برقی اور مقناطیسی میدان صفر بھی ممکن ہیں لہذا ان کی شرح صفر سے لامحدود قیمت کی ہو سکتی ہے۔ سرحد سے $z = -l$ فاصلے پر میدان

$$E_{xs1} = (e^{j\beta_1 l} + \Gamma e^{-j\beta_1 l}) E_{x10}^+$$

$$H_{ys1} = (e^{j\beta_1 l} - \Gamma e^{-j\beta_1 l}) \frac{E_{x10}^+}{Z_1}$$

ہیں۔ ان کی شرح کو داخلی قدرتی رکاوٹ⁶⁹ کہتے اور $Z_{داخلی}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$Z_{داخلی} = \left. \frac{E_{xs1}}{H_{ys1}} \right|_{z=-l} = Z_1 \frac{e^{j\beta_1 l} + \Gamma e^{-j\beta_1 l}}{e^{j\beta_1 l} - \Gamma e^{-j\beta_1 l}}$$

اس میں $\Gamma = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}$ پر کرتے ہوئے اور یولر مماثل⁷⁰ استعمال کرتے ہوئے

$$Z_{داخلی} = Z_1 \frac{(Z_2 + Z_1)(\cos \beta_1 l + j \sin \beta_1 l) + (Z_2 - Z_1)(\cos \beta_1 l - j \sin \beta_1 l)}{(Z_2 + Z_1)(\cos \beta_1 l + j \sin \beta_1 l) - (Z_2 - Z_1)(\cos \beta_1 l - j \sin \beta_1 l)}$$

intrinsic input impedance⁶⁹
 $e^{j\alpha} = \cos \alpha + j \sin \alpha$ ⁷⁰

حاصل ہوتا ہے جسے باآسانی یوں

$$(10.97) \quad Z_{\text{داخلی}} = Z_1 \frac{Z_2 + jZ_1 \tan \beta_1 l}{Z_1 + jZ_2 \tan \beta_1 l}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

جب Z_2 اور Z_1 برابر ہوں تب داخلی قدرتی رکاوٹ، داخلی Z پہلے خطے کی قدرتی رکاوٹ Z_1 کے برابر ہوتی ہے۔ ایسی صورت میں انعکاس پیدا نہیں ہوتا اور تریسلی نظام بسم رکاوٹی⁷¹ کہلاتا ہے۔ ہم رکاوٹی نظام میں انعکاس کے غیر موجودگی کی بنا تو انائی ایک ہی سمت میں منتقل ہوتی ہے۔ اگر دوسرا خطہ کامل موصل ہو تب $Z_2 = 0$ ہو گا۔ ایسی صورت میں

$$(10.98) \quad Z_{\text{داخلی}} = jZ_1 \tan \beta_1 l \quad (Z_2 = 0)$$

ہو گا لہذا ان مقامات پر جہاں $E_{xs1} = 0$ ہو، یعنی جب $\beta_1 l = n\pi$ ہو، داخلی قدرتی رکاوٹ صفر کے برابر ہوگی جبکہ ان مقامات پر جہاں $H_{ys1} = 0$ ہو وہاں داخلی قدرتی رکاوٹ لامحدود ہوگی۔

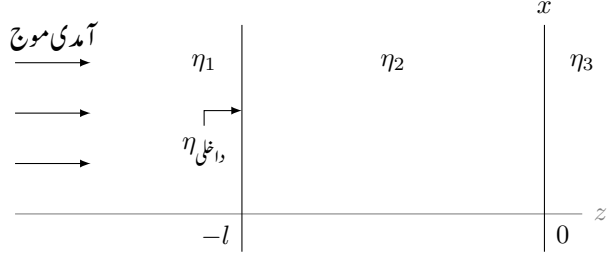
مساوات 10.97 تریسلی نظام پر غور کرنے کے لئے انتہائی اہمیت کا حامل ہے۔

10.8 دوسرحدی انعکاس

اب تک ہم دو ایسے خطوں کی سرحد پر موج کے انعکاس پر غور کرتے رہے ہیں جن میں دونوں خطے نیم لامحدود جسامت کے تھے۔ نیم لامحدود خطے⁷² سے مراد ایسا خطہ ہے جس کی ایک سرحد محدود فاصلے پر اور دوسری سرحد لامحدود فاصلے پر ہو۔ ایسی صورت میں سرحد پار کرنے کے بعد تریسلی موج دوسرے خطے میں مسلسل آگے ہی بڑھتی ہے اور ایسا کوئی امکان نہیں پایا جاتا کہ یہ لامحدود فاصلے پر موجود سرحد سے انعکاس پذیر ہو کر واپس پہلی سرحد تک آن پہنچے۔ اس حصے میں ہم محدود جسامت کے خطے میں تریسلی موج پر غور کرتے ہیں جہاں دوسرے خطے کی محدود جسامت کی بنا پر تریسلی موج کا کچھ حصہ واپس پہلی سرحد پر پہنچ سکتا ہے۔

شکل 10.12 میں دوسرحدی مسئلہ دکھایا گیا ہے جہاں پہلے نیم لامحدود خطے کی قدرتی رکاوٹ Z_1 ، دوسرے محدود موٹائی کے خطے کی قدرتی رکاوٹ Z_2 اور تیسرے نیم لامحدود خطے کی قدرتی رکاوٹ Z_3 ہے۔ محدود خطے کی

matched⁷¹
semi-infinity region⁷²



شکل 10.12: دوسری حصے میں دوسرے اور تیسرے خطے کے قدرتی رکاوٹ اور دوسرے خطے کی موٹائی کے اثرات پہلی سرحد پر داخلی قدرتی رکاوٹ کی صورت میں نمودار ہوتے ہیں۔

موٹائی l ہے۔ یہاں پہلا سرحد خطہ-1 اور خطہ-2 کے درمیان $z = -l$ پر جبکہ دوسرا سرحد خطہ-2 اور خطہ-3 کے درمیان $z = 0$ پر پایا جاتا ہے۔ پہلے خطے میں موج دائیں جانب (یعنی بڑھتے z جانب) حرکت کرتے ہوئے پہلی سرحد پر عمودی آن پہنچتی ہے جس کے بعد یہ مسلسل چلی آتی ہے۔

پہلی سرحد پر آمدی موج کا کچھ حصہ انعکاس پذیر ہو کر واپس پہلے خطے میں بائیں جانب لوٹتا ہے جبکہ اس کا بقایا حصہ دوسرے خطے میں داخل ہو کر دائیں جانب حرکت کرتے ہوئے دوسری سرحد پر پہنچتا ہے۔ اس موج کا کچھ حصہ دوسری سرحد سے بھی گزر پاتا ہے جبکہ اس کا بقایا حصہ دوسری سرحد سے انعکاس پذیر ہو کر واپس پہلی سرحد جانب چل پڑتا ہے جہاں انعکاس اور ترسیل کا عمل ایک مرتبہ دوبارہ دہرایا جاتا ہے۔ یوں دوسری سرحد سے واپس لوٹی موج کا کچھ حصہ پہلی سرحد سے گزر کر پہلے خطے میں داخل ہو کر تازہ انعکاسی موج کے ساتھ مل کر بائیں چلے جاتا ہے جبکہ اس کا بقایا حصہ پہلی سرحد سے انعکاس پذیر ہو کر اسی سرحد سے تازہ ترسیلی موج کے ساتھ مل کر دوسری سرحد کے جانب چل پڑتا ہے۔ یہی عمل بار بار دہرایا جاتا ہے۔

یوں ہر لمحہ پہلے خطے سے تازہ ترسیلی موج دوسرے خطے میں داخل ہو کر، اس خطے میں پہلے سے موجود، متعدد مرتبہ انعکاس پذیر اجزاء کے ساتھ مل کر دوسری سرحد کی جانب ایک نئی کارواں روانہ کرتی ہے۔ اسی طرح دوسرے خطے میں بار بار انعکاس پذیر اور پہلی سرحد سے دو مرتبہ ترسیل کے بعد متعدد حصے مل کر پہلے خطے میں مجموعی انعکاسی موج کو جنم دیتے ہیں۔ ہم اسی طرح تمام امواج کو مد نظر رکھتے ہوئے مسئلے کو حل کر سکتے ہیں۔ صفحہ 578 پر حصہ 11.7 میں ایسا ہی کرتے ہوئے عارضی حالت دریافت کی گئی ہے۔

اگر آمدی موج برقرار آتی رہے تب تینوں خطوں میں جلد برقرار صورت حال پیدا ہو جاتی ہے جہاں پہلے خطے میں آمدی موج کی نسبت سے کوئی خاص مقدار کی موج بطور انعکاسی موج پائی جاتی ہے۔ اس انعکاسی موج کا مخصوص جیٹھ

اور دوری زاویہ پایا جاتا ہے۔ اسی طرح دونوں سرحد سے گزرتے ہوئے، تیسرے خطے میں بھی آمدی موج کی نسبت سے کوئی خاص مقدار کی موج بطور تریسلی موج پائی جاتی ہے جس کا مخصوص حیظہ اور دوری زاویہ پایا جاتا ہے۔ دوسرے خطے میں پہلی سرحد سے تازہ تریسلی اور دوسرے خطے میں واپس انعکاسی امواج مل کر مخصوص حیظہ اور دوری زاویے کی موج کو جنم دیتے ہیں جو پہلی سرحد سے دوسری سرحد کی جانب گامزن پائی جاتی ہے۔ اسی طرح دوسرے خطے میں دوسری سرحد سے تمام انعکاس پذیر امواج کا مجموعہ بطور انفرادی موج ابھرتا ہے جس کا مخصوص حیظہ اور دوری زاویہ ہوتا ہے۔ یوں برقرار صورت حال حاصل کرنے کے بعد کل پانچ عدد امواج پائی جاتی ہیں یعنی پہلے خطے میں آمدی اور انعکاسی موج، تیسرے خطے میں تریسلی موج اور دوسرے خطے میں دائیں حرکت کرتی موج اور بائیں حرکت کرتی موج۔ ان پانچ عدد امواج کی مدد سے مسئلے کو حل کریں۔

ہم تصور کرتے ہیں کہ تینوں خطے بے ضیاع، غیر مقناطیسی ہیں اور برقی میدان x سمت میں ہے۔ یوں دوسرے خطے میں دائیں اور بائیں جانب حرکت کرتے ہوئے امواج مل کر برقی میدان

$$(10.99) \quad E_{xs2} = E_{x20}^+ e^{-j\beta_2 z} + E_{x20}^- e^{j\beta_2 z}$$

پیدا کرتے ہیں جہاں $\beta_2 = \frac{\omega \sqrt{\epsilon R_2}}{c}$ ہے جبکہ E_{x20}^- اور E_{x20}^+ مخلوط مقدار ہیں۔ مقناطیسی میدان y سمت میں ہو گا۔ یوں مقناطیسی میدان

$$(10.100) \quad H_{ys2} = H_{y20}^+ e^{-j\beta_2 z} + H_{y20}^- e^{j\beta_2 z}$$

لکھا جائے گا۔ دوسرے خطے میں بائیں اور دائیں حرکت کرتے برقی امواج دوسری سرحد کے انعکاسی مستقل Γ_{23} سے وابستہ ہیں جہاں

$$(10.101) \quad \Gamma_{23} = \frac{Z_3 - Z_2}{Z_3 + Z_2}$$

کے برابر ہے۔ یوں

$$(10.102) \quad E_{x20}^- = \Gamma_{23} E_{x20}^+$$

لکھا جاسکتا ہے۔ مقناطیسی اجزاء کو یوں

$$(10.103) \quad H_{y20}^+ = \frac{E_{x20}^+}{Z_2}$$

$$(10.104) \quad H_{y20}^- = -\frac{E_{x20}^-}{Z_2} = -\frac{\Gamma_{23} E_{x20}^+}{Z_2}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

برقی میدان تقسیم مقناطیسی میدان کو رکاوٹ موج⁷³ Z_m کہا جاتا ہے۔

$$(10.105) \quad Z_m(z) = \frac{E_{xs2}}{H_{ys2}} = \frac{E_{x20}^+ e^{-j\beta_2 z} + E_{x20}^- e^{j\beta_2 z}}{H_{y20}^+ e^{-j\beta_2 z} + H_{y20}^- e^{j\beta_2 z}}$$

مساوات 10.102 اور مساوات 10.103 استعمال کرتے ہوئے اسے

$$(10.106) \quad Z_m(z) = Z_2 \left[\frac{e^{-j\beta_2 z} + \Gamma_{23} e^{j\beta_2 z}}{e^{-j\beta_2 z} - \Gamma_{23} e^{j\beta_2 z}} \right]$$

لکھا جا سکتا ہے۔ مساوات 10.101 اور یولر مماثل⁷⁴ کے استعمال سے اسے یوں لکھا جا سکتا ہے۔

$$(10.107) \quad Z_m(z) = Z_2 \frac{Z_3 \cos \beta_2 z - jZ_2 \sin \beta_2 z}{Z_2 \cos \beta_2 z - jZ_3 \sin \beta_2 z}$$

مندرجہ بالا مساوات دوسرے نخطے میں موج کی رکاوٹ دیتی ہے۔ اسے استعمال کرتے ہوئے پہلی سرحد پر کل انعکاسی موج حاصل کرتے ہیں۔ چونکہ سرحد پر متوازی برقی میدان E اور متوازی مقناطیسی میدان H ہموار ہیں لہذا

$$(10.108) \quad E_{xs1}^+ + E_{xs1}^- = E_{xs2} \quad (z = -l)$$

$$(10.109) \quad H_{ys1}^+ + H_{ys1}^- = H_{ys2} \quad (z = -l)$$

لکھا جا سکتا ہے۔ ان مساوات کو

$$(10.110) \quad E_{x10}^+ + E_{x10}^- = E_{xs2} \quad (z = -l)$$

$$(10.111) \quad \frac{E_{x10}^+}{Z_1} - \frac{E_{x10}^-}{Z_1} = \frac{E_{xs2}}{Z_m(-l)} \quad (z = -l)$$

لکھا⁷⁵ جا سکتا ہے جہاں پہلے نخطے میں آمدی موج کا حیظہ E_{x10}^+ اور مجموعی انعکاسی موج کو حیظہ E_{x10}^- ہے۔ ان دونوں مساوات میں دائیں ہاتھ E_{xs2} کو جوں کا توں لکھا گیا ہے جبکہ $z = -l$ پر موج کی رکاوٹ کی قیمت

⁷³ wave impedance

⁷⁴ Euler's identity

⁷⁵ ایسا اس لئے لکھا جا سکتا ہے جب آمدی موج کا حیظہ عین پہلی سرحد پر پایا جاتا ہو۔

استعمال کی گئی ہے۔ $z = -l$ پر موج کے رکاوٹ کو پہلی سرحد پر داخلی قدرتی رکاوٹ $Z_{داخلی}$ لکھتے ہوئے مندرجہ بالا دو مساوات کو حل کرتے ہوئے E_{xs2} سے چھکارا حاصل کرتے ہیں۔ یوں

$$(10.112) \quad \frac{E_{x10}^-}{E_{x10}^+} = \Gamma = \frac{Z_{داخلی} - Z_1}{Z_{داخلی} + Z_1}$$

حاصل ہوتا ہے۔ پہلی سرحد پر داخلی قدرتی رکاوٹ مساوات 10.107 میں $z = -l$ پر کرنے سے

$$(10.113) \quad Z_{داخلی} = Z_2 \frac{Z_3 \cos \beta_2 l + j Z_2 \sin \beta_2 l}{Z_2 \cos \beta_2 l + j Z_3 \sin \beta_2 l}$$

یا

$$(10.114) \quad Z_{داخلی} = Z_2 \frac{Z_3 + j Z_2 \tan \beta_2 l}{Z_2 + j Z_3 \tan \beta_2 l}$$

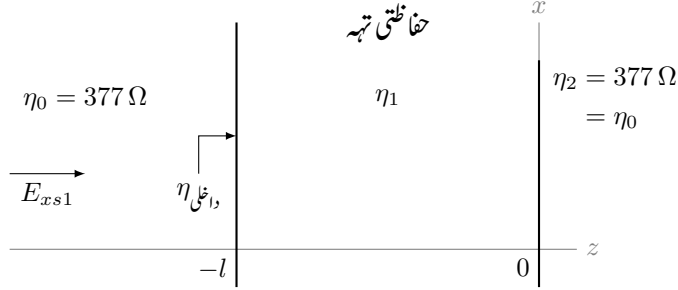
حاصل ہوتا ہے۔ یہاں رک کر ایک مرتبہ مساوات 10.114 کا مساوات 10.97 کے ساتھ موازنہ کریں۔

مساوات 10.112 اور مساوات 10.113 عمومی مساوات ہیں جن سے بے ضیاع، دو متوازی سرحد سے مجموعی انعکاسی موج کا جیٹہ اور دوری زاویہ حاصل کیے جاسکتے ہیں۔ پہلے خطے میں آمدی طاقت کا Γ^2 حصہ مجموعی انعکاسی طاقت ہو گا۔ آمدی طاقت کا $1 - \Gamma^2$ حصہ دوسرے خطے سے ہوتا ہوا تیسرے خطے میں ترسیل ہو گا۔ دوسرے خطے میں بائیں جانب سے جتنی طاقت داخل ہوتی ہے، اس سے اتنی ہی طاقت دائیں جانب خارج ہوتی ہے۔

مساوات 10.112 میں $Z_{داخلی} = Z_1$ کی صورت میں $\Gamma = 0$ حاصل ہوتا ہے جس سے انعکاسی طاقت صفر کے برابر ہو جاتی ہے۔ ایسی صورت میں تمام کی تمام آمدی طاقت تیسرے خطے میں داخل ہو پاتی ہے۔ ایسا معلوم ہوتا ہے جیسے دوسرا خطہ موجود ہی نہیں ہے۔ ایسی صورت میں ہم کہتے ہیں کہ داخلی قدرتی رکاوٹ اور پہلا خطہ ہم رکاوٹ⁷⁶ ہیں۔ ہم رکاوٹ صورت کئی طریقوں سے حاصل کرنا ممکن ہے۔ یہاں $Z_3 = Z_1$ کی صورت میں ہم رکاوٹی حالت حاصل کرتے ہیں۔ حصہ 10.8.2 میں $Z_3 \neq Z_1$ کی صورت میں ہم رکاوٹی حالت اختیار کرنا دکھایا جائے گا۔

اگر پہلے اور تیسرے خطے کے قدرتی رکاوٹ برابر ہوں، یعنی $Z_1 = Z_3$ ہوں، تب $\beta_2 l = m\pi$ جہاں $m = 1, 2, 3, \dots$ ہو کی صورت میں مساوات 10.113 سے $Z_{داخلی} = Z_1$ حاصل ہوتا ہے۔ چونکہ $\beta_2 = \frac{2\pi}{\lambda_2}$ کے برابر ہے جہاں λ_2 دوسرے خطے میں طول موج ہے لہذا

$$\frac{2\pi}{\lambda_2} = m\pi$$



شکل 10.13: ریڈار اینٹینا پر ایسی شفاف حفاظتی تہ چڑھائی جاتی ہے جو برقی و مقناطیسی امواج کو نہیں گھٹاتی۔

یا

$$(10.115) \quad l = \frac{m\lambda_2}{2}$$

درکار شرط ہے۔ مساوات 10.115 کے مطابق دوسرے خطے کی مونائی دوسرے خطے میں طول موج کی آدھی یا اس کے m گنا درکار ہے۔ ایسی صورت میں $Z_{داخلی} = Z_1$ حاصل ہوتا ہے۔ اس ترکیب سے ہم رکاوٹ صورت حال حاصل کرنے کو نصف طول موج⁷⁷ کی ترکیب کہا جاتا ہے۔

نصف طول موج ترکیب سے تمام آمدی طاقت تیسرے خطے میں منتقل کی جاسکتی ہے۔ آمدی موج کی تعدد یعنی اس کی طول موج تبدیل کرنے سے ہم رکاوٹی شرط پوری نہیں ہو پاتی لہذا ایسی صورت میں مساوات 10.113 سے حاصل $Z_{داخلی}$ کی قیمت Z_1 سے قدر مختلف ہوگی جس سے Γ صفر نہیں رہ پاتا۔ طول موج جتنی زیادہ تبدیل کی جائے Γ کی قیمت اتنی زیادہ حاصل ہوتی ہے۔ ایسی صورت میں دو سرحدی جوڑ بطور پٹی گزار فلٹر⁷⁸ کردار ادا کرتا ہے۔

آئیں دو سرحدی مسئلے کے حقیقی مثال پر غور کریں۔

ریڈار اینٹینا کو موسمی اثرات سے بچانے کی خاطر استعمال کئے جانے والی ایسی تہ کی بات کرتے ہیں جو ریڈار کے شعاعوں کے لئے بالکل شفاف ثابت ہوتی ہے۔ یہ تہ عموماً اینٹینا پر گنبد کی شکل میں ہوتی ہے۔ شکل 10.13 میں ریڈار اینٹینا $z = -l$ کے بائیں جانب خلاء میں ہے جبکہ $z = 0$ تا $z = -l$ خطے میں حفاظتی تہ ہے۔ یوں $z = 0$ کے دائیں جانب خلاء ہے جس میں ریڈار اشارات بھیجتا ہے۔ خلاء کی قدرتی رکاوٹ 377Ω ہوتی ہے۔ ذو برق کی بنی

⁷⁷ half-wave matching
⁷⁸ band pass filter

حفاظتی تہہ کی موٹائی زیادہ نہیں رکھی جاتی تاکہ اس میں طاقت کا ضیاع کم سے کم ہو۔ حفاظتی تہہ سے انعکاس قابل قبول نہیں چونکہ اس طرح ریڈار کے امواج واپس اینٹینا کی طرف لوٹیں گے۔ ہم چاہتے ہیں کہ اینٹینا، دائیں جانب کے پورے نظام کے لئے ہم رکاوٹی ہو۔ ایسا $Z_2 = Z_{\text{اغل}}$ کی صورت میں ہو گا یعنی

$$377 = Z_1 \frac{377 + jZ_1 \tan \beta_1 l}{Z_1 + j377 \tan \beta_1 l}$$

یا

$$j377^2 \tan \beta_1 l = jZ_1^2 \tan \beta_1 l$$

اب تمام غیر مقناطیسی اشیاء کی $377 < Z_1$ ہے لہذا اس مساوات پر پورا صرف اس صورت اتر جا سکتا ہے جب $\beta_1 l = n\pi$ ہو۔ کم سے کم موٹائی یوں $n = 1$ کی صورت میں $l = \frac{\pi}{\beta_1}$ یعنی $l = \frac{\lambda_1}{2}$ حاصل ہوتی ہے۔ اگر ریڈار 10 GHz کی شعاعیں پیدا کرتا ہو تب ہم حفاظتی تہہ کو کم ضیاع اور ہلکے وزن کے ایسے پلاسٹک سے بنا سکتے ہیں جس کا $\epsilon_R = 2.25$ ہے۔ ہمیں تہہ کی موٹائی

$$l = \frac{\lambda_1}{2} = \frac{v_1}{2f_1} = \frac{3 \times 10^8}{2\sqrt{2.25} \times 10^{10}} = 1 \text{ cm}$$

رکھنی ہو گی۔

اگر 10 GHz پر چلنے والے ریڈار پر چڑھائی حفاظتی تہہ کی موٹائی 0.5 cm کر دی جائے تب $\beta_1 = 314.2$ اور $Z_1 = 251.33$ لیتے ہوئے

$$Z_{\text{اغل}} = 251.33 \times \frac{377 + j251.33 \tan(314.2 \times 0.005)}{251.33 + j377 \tan(314.2 \times 0.005)} \approx 167.6 \Omega$$

ہو گی۔ یوں شرح انعکاس

$$\Gamma = \frac{167.6 - 377}{167.6 + 377} = -0.3845$$

ہو گا اور انعکاسی طاقت کی فی صد شرح

$$\frac{\left(\frac{E_{x10}^-}{2Z_0}\right)^2}{\left(\frac{E_{x10}^+}{2Z_0}\right)^2} \times 100 = |\Gamma|^2 \times 100 = 14.78 \%$$

ہوگی۔

مشق 10.7: دو خطے آپس میں $z = 0$ پر ملتے ہیں۔ سرحد کے بائیں جانب پہلا خطہ ہے جس کے مستقل $\epsilon_{R1} = 5$ ، $\mu_{R1} = 1$ اور $\sigma_1 = 0$ ہیں۔ سرحد کے دوسری جانب مستقل $\epsilon_{R2} = 2$ ، $\mu_{R2} = 10$ اور $\sigma_2 = 0$ ہیں۔ پہلے خطے میں s حاصل کریں۔ دوسرے خطے میں s حاصل کریں اور آخر میں $z = -0.6$ cm پر، غلی Z حاصل کریں۔

جوابات: 5، 1 اور $86.9/-61.8^\circ$

10.8.1 فیبری-پیروٹ طیف پیمائش

بصریات کے میدان میں عموماً انعطافی مستقل n استعمال کیا جاتا ہے جہاں

$$(10.116) \quad n = \sqrt{\epsilon_R}$$

کے برابر ہے۔ چونکہ فیبری-پیروٹ طیف پیمائش⁸⁰ بصریات میں استعمال کیا جاتا ہے لہذا ہم انعطافی مستقل استعمال کرتے ہوئے اس کی کارکردگی پر غور کرتے ہیں۔ خالی خلاء میں $\beta_0 = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ جبکہ شیشے⁸¹ میں $\beta = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0 \epsilon_R}$ ہیں۔ یوں

$$(10.117) \quad \frac{\lambda_0}{\lambda} = \frac{\beta}{\beta_0} = \sqrt{\epsilon_R} = n$$

لکھا جاسکتا ہے۔

سادہ ترین صورت میں فیبری-پیروٹ طیف پیمائش n انعطافی مستقل کے سادہ شیشے (یا کسی دوسرے شفاف مادے) کا تختہ ہوتا ہے جس کی موٹائی l کو یوں رکھا جاتا ہے کہ درکار طول موج پر یہ مساوات 10.115

$$(10.118) \quad \lambda = \frac{\lambda_0}{n} = \frac{2l}{m} \quad (m = 1, 2, 3, \dots)$$

⁷⁹refractive index
Fabry-Perot interferometer⁸⁰
⁸¹شیشے غیر متناطبی ہے لہذا اس کی $\mu_R = 1$ ہے۔

پر پورا اترے جہاں خالی خلاء میں طول موج λ_0 جبکہ شیشے کے تختے میں طول موج λ ہے۔ مندرجہ بالا مساوات سے حاصل تمام طول موج، شیشے کے تختے سے بغیر گھٹے گزرتی ہیں۔ عموماً ہم چاہتے ہیں کہ شیشے کے تختے سے صرف اور صرف ایک مخصوص طول موج گزر پائے تاکہ ایسی تمام امواج جو مندرجہ بالا مساوات پر پورا اترتے ہوں۔ ایسا یوں ممکن بنایا جاسکتا ہے کہ درکار طول موج اور مساوات 10.118 سے حاصل قریبی طول موج میں طویل فاصلہ ہو۔ مندرجہ بالا مساوات میں m کی مختلف قیمتیں مختلف طول موج دیتی ہیں۔ ایسے دو عدد قریبی طول موج جنہیں اس مساوات میں m اور $m-1$ پر کرنے سے حاصل کیا گیا ہو میں فرق

$$(10.119) \quad \lambda_{m-1} - \lambda_m = \Delta\lambda = \frac{2l}{m-1} - \frac{2l}{m} = \frac{2l}{m(m-1)} \approx \frac{2l}{m^2}$$

ہو گا۔ یاد رہے کہ m شیشے میں نصف طول موج کی گنتی

$$(10.120) \quad m = \frac{2l}{\lambda} = \frac{2ln}{\lambda_0}$$

ہے۔ یوں

$$(10.121) \quad \Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{2l}$$

لکھا جاسکتا ہے جسے خالی خلاء میں طول موج λ_0 کی صورت میں

$$(10.122) \quad \Delta\lambda_0 = \frac{\lambda_0^2}{2ln}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ درکار طول موج λ_0 سے قریب تر طول موج، جو شیشے سے گزر پائے گا، کا فاصلہ $\Delta\lambda_0$ ہے جو طیفی حد⁸² کہلاتی ہے۔ اگر کسی طرح اس فاصلے پر پائے جانے والے طول موج کو علیحدہ کرنا ممکن ہو تب ہم λ_0 کو علیحدہ کرنے میں کامیاب ہوں گے۔ طیف پیمائے کو بطور پٹی گزار فلٹر بھی استعمال کیا جاسکتا ہے جہاں درکار طول موج کے قریبی طول موج شیشے سے گزر پاتے ہیں جبکہ اس سے دور طول موج نہیں گزر پاتے۔

مثال 10.8: سرخ رنگ کی خالی خلاء میں طول موج 600 nm ہے۔ ہمیں اس طول موج پر $\Delta\lambda_0 = 100 \text{ nm}$ فاصلے تک طول موج علیحدہ کرنے ہیں۔ فیبری-پیروٹ طیف پیمائے میں استعمال کردہ شیشے کا انعطافی مستقل $n = 1.45$ ہے۔ شیشے کی موٹائی حاصل کریں۔

حل: ہم چاہیں گے کہ طیف پیا کی $\Delta\lambda_0$ درکار قیمت سے قدر زیادہ ہو یعنی

$$l < \frac{\lambda_0^2}{2n\Delta\lambda_0} = \frac{600 \times 10^{-9} \times 600 \times 10^{-9}}{2 \times 1.45 \times 100 \times 10^{-9}} = 1.241 \mu\text{m}$$

اتنی باریک موٹائی کا شیشہ بنانا یا اسے استعمال کرنا ناممکن سی بات ہے۔ اس کا بہتر حل یہ ہو گا کہ دو شیشوں کے درمیان تقریباً یہی فاصلہ رکھا جائے۔ ان دو عدد شیشوں کے قریبی سطحوں کے مابین فاصلہ کم یا زیادہ کرتے ہوئے کسی بھی طول موج کو گزارا جاسکتا ہے۔ شیشوں کے بیرونی جانب سطحوں پر غیر انعکاس تہ⁸³ چڑھائی جاتی ہے۔

$$10.8.2 \quad Z_1 \neq Z_3 \text{ کی صورت میں ہم رکاوٹ صورت کا حصول}$$

اس حصے میں ہم مساوات 10.113 میں $Z_1 \neq Z_3$ کی صورت میں $Z_{\text{داخلی}} = Z_1$ کے حصول پر غور کرتے ہیں جس سے $\Gamma = 0$ حاصل ہوتا ہے۔

$$\beta_2 l = (2m - 1) \frac{\pi}{2} \quad (m = 1, 2, 3, \dots)$$

یعنی

$$\frac{2\pi}{\lambda_2} l = (2m - 1) \frac{\pi}{2} \quad (m = 1, 2, 3, \dots)$$

کی صورت میں

$$(10.123) \quad l = (2m - 1) \frac{\lambda_2}{4}$$

لکھا جاسکتا ہے جس کے مطابق دوسرے خطے کی موٹائی، طول موج کے چوتھائی حصے کے طاق گنا ہے۔ ایسی صورت میں مساوات 10.113 سے

$$(10.124) \quad Z_{\text{داخلی}} = \frac{Z_2^2}{Z_3}$$

حاصل ہوتا ہے۔ ہم دوسرے خطے کی موٹائی کے ذریعہ پہلے خطے کو تیسرے خطے کے ہم رکاوٹ بنا سکتے ہیں۔ ایسی صورت میں $Z_1 = Z_2$ ہو گا لہذا مندرجہ بالا مساوات سے

$$(10.125) \quad Z_2 = \sqrt{Z_1 Z_3}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ مساوات 10.123 اور مساوات 10.125 چوتھائی طول موج⁸⁴ سے ہم رکاوٹ بنا نا ممکن بناتا ہے۔ غیر انعکاسی تہ⁸⁵ کا دارومدار اسی اصول پر ہے۔

مثال 10.9: ہم 660 nm طول موج کی شعاع کے لئے $n_3 = 1.45$ انعطافی مستقل کے شیشے کو خالی خلاء کے $n_1 = 1$ کے ہم رکاوٹ بذریعہ غیر انعکاسی تہ بنا نا چاہتے ہیں۔ اس تہ کی کم سے کم موٹائی اور انعطافی مستقل n_2 دریافت کریں۔

حل: خالی خلاء اور شیشے کے قدرتی رکاوٹ

$$Z_1 = 377 \Omega$$

$$Z_3 = \frac{377}{1.45} = 260 \Omega$$

ہیں۔ یوں مساوات 10.125 سے غیر انعکاسی تہ کی قدرتی رکاوٹ

$$Z_2 = \sqrt{377 \times 260} = 313 \Omega$$

حاصل ہوتی ہے۔ یوں تہ کا انعطافی مستقل

$$n = \frac{377}{313} = 1.2$$

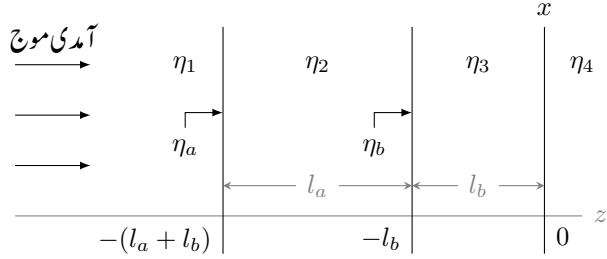
ہو گا۔ دوسرے خطے یعنی ذو برق تہ میں طول موج

$$\lambda_2 = \frac{660}{1.2} = 550 \text{ nm}$$

ہو گا جس سے تہ کی کم سے کم موٹائی

$$l = \frac{\lambda_2}{4} = 0.1375 \mu\text{m}$$

حاصل ہوتی ہے۔



شکل 10.14: متعدد سرحدی صورت میں شرح انعکاس۔

10.8.3 متعدد سرحدی مسئلہ

ہم تو مختلف خطوں کے درمیان سرحد پر انعکاس کو تفصیلاً دیکھ چکے ہیں۔ اسی طرح ہم نے دو سرحدی صورت حال پر بھی غور کیا۔ آئیں اس حصے میں متعدد سرحدی صورت میں شرح انعکاس حاصل کریں۔ شکل 10.14 میں تین سرحدی مسئلہ دکھایا گیا ہے جس پر غور کرتے ہوئے متعدد سرحدی مسئلے کا حل تلاش کیا جائے گا۔

ہمیں آمدی طاقت کا وہ حصہ دریافت کرنا ہے جو تین سرحدی تہہ سے گزر نہیں پاتا بلکہ یہ انعکاس پذیر ہو کر آمدی موج کے الٹ سمت میں واپس چلے جاتا ہے۔ اسی طرح ہمیں آمدی طاقت کا وہ حصہ دریافت کرنا ہے جو تینوں سرحدوں کو عبور کرتے ہوئے چوتھے خطے میں ترسیل کر پاتا ہے۔ ایسا کرنے کی خاطر ہمیں پہلی سرحد پر داخلی قدرتی رکاوٹ Z_a درکار ہوگی۔ مسئلے کو حل کرنے کی خاطر ہمیں اختتامی سرحد سے ابتدائی سرحد کی جانب چلتے ہوئے ہر سرحد پر داخلی قدرتی رکاوٹ حاصل کرنے ہوں گے۔ یوں ہم پہلے Z_b حاصل کریں گے۔ یوں تیسرے اور چوتھے خطے کے اثرات کو Z_b سے ظاہر کرتے ہوئے ہم پہلی سرحد پر پہنچیں گے۔

مساوات 10.113 استعمال کرتے ہوئے

$$(10.126) \quad Z_b = Z_3 \frac{Z_4 \cos \beta_3 l_b + j Z_3 \sin \beta_3 l_b}{Z_3 \cos \beta_3 l_b + j Z_4 \sin \beta_3 l_b}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس طرح ہم تبادلہ رکاوٹ Z_b کی مدد سے تین سرحدی مسئلے کو دو سرحدی مسئلہ بنا پائے ہیں جہاں دوسری سرحد کے دائیں جانب جو کچھ بھی ہے اسے Z_b سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ اب پہلے سرحد پر مساوات 10.113 کے استعمال سے

$$(10.127) \quad Z_a = Z_2 \frac{Z_b \cos \beta_2 l_a + j Z_2 \sin \beta_2 l_a}{Z_2 \cos \beta_2 l_a + j Z_b \sin \beta_2 l_a}$$

لکھا جاسکتا ہے۔

آمدی طاقت کا Γ^2 حصہ انعکاسی طاقت ہو گا جہاں

$$(10.128) \quad \Gamma = \frac{Z_a - Z_1}{Z_a + Z_1}$$

کے برابر ہے۔ آمدی طاقت کا بقایا حصہ یعنی $1 - \Gamma^2$ حصہ چوتھے خطے میں ترسیل ہو گا۔ تبادلہ رکاوٹ کی ترکیب متعدد سرحدی مسئلے پر لاگو کیا جاسکتا ہے۔

کیمرے⁸⁷ کے عدسہ⁸⁸ پر متعدد تہہ چڑھا کر اس کی کارکردگی بہتر کی جاتی ہے۔ یوں عدسہ پر پہلی تہہ کا انعطافی مستقل عدسے کے شیشے کے انعطافی مستقل کے برابر ہو گا۔ اگلی تہہ کا انعطافی مستقل قدر کم ہو گا۔ اسی طرح آخری تہہ کا انعطافی مستقل عین خالی خلاء کے انعطافی مستقل کے برابر ہو گا۔ یوں ایک تہہ سے دوسرے تہہ میں موج بغیر انعکاس کے داخل ہو گی۔ موج کو سرحد نظر ہی نہیں آتی۔

10.9 خطی، بیضوی اور دائری تقطیب

اس حصے میں تقطیب موج⁸⁹ پر غور کیا جائے گا۔ خطی تقطیب اور بیضوی تقطیب کے بعد دائری تقطیب پر تبصرہ کیا جائے گا۔

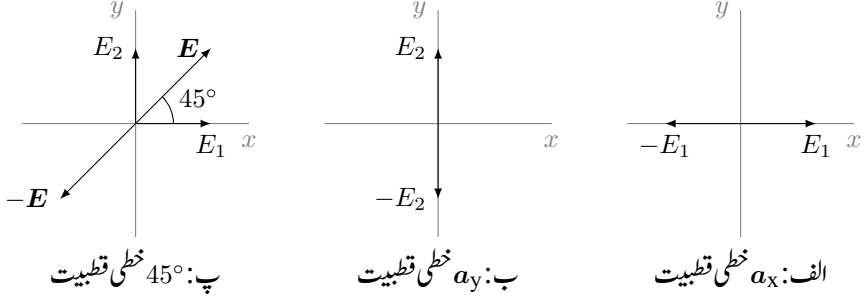
اب تک اٹل سمت کے امواج پر غور کیا گیا۔ یوں a_z جانب حرکت کرتا a_x سمت کا میدان

$$(10.129) \quad E_x = E_{x0} \cos(\omega t - \beta z)$$

لکھا گیا۔ یہ مساوات خطی تقطیب کی مثال ہے جہاں میدان تمام اوقات صرف x سمت میں پایا جاتا ہے۔ عموماً a_z جانب حرکت کرتے موج میں a_x کے علاوہ a_y جزو بھی پایا جائے گا۔ ایسی صورت میں موج کے اجزاء

$$(10.130) \quad \begin{aligned} E_x &= E_1 \cos(\omega t - \beta z) \\ E_y &= E_2 \cos(\omega t - \beta z - \delta) \end{aligned}$$

camera⁸⁷
lens⁸⁸
wave polarization⁸⁹



شکل 10.15: خطی، دائری اور بیضوی قطبیت۔

ہو سکتے ہیں جہاں دونوں اجزاء کے حیطے مختلف ممکن ہیں جبکہ ان میں زاویائی فاصلہ δ بھی پایا جا سکتا ہے۔ ان اجزاء کا مجموعہ

$$(10.131) \quad E = E_1 \cos(\omega t - \beta z) \mathbf{a}_x + E_2 \cos(\omega t - \beta z - \delta) \mathbf{a}_y$$

ایسی موج کو ظاہر کرے گا۔ یہ مساوات غور طلب ہے۔ آئیں خلاء میں کسی بھی اٹل نقطے پر وقت تبدیل ہونے سے ایسے میدان پر غور کریں۔ ہم خلاء میں $z = 0$ کو اٹل نقطہ لیتے ہوئے میدان حاصل کرتے ہیں۔

اگر $E_2 = 0$ ہو تب وقت t کے تبدیلی سے میدان کی قیمت $-E_1 \mathbf{a}_x$ تا $+E_1 \mathbf{a}_x$ تبدیل ہوتی ہے۔ اس میدان کو تمام t کے لئے شکل 10.15-الف میں دکھایا گیا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ میدان کی نوک $-E_1$ تا $+E_1$ خطی لکیر پر رہتی ہے۔ اسی حقیقت سے ایسے موج کی قطبیت کو خطی قطبیت⁹⁰ کہتے ہیں۔ یہ موج \mathbf{a}_x سمت میں خطی قطبیت رکھتی ہے۔ اس کے برعکس اگر مساوات 10.131 میں $E_1 = 0$ ہو تب یہ \mathbf{a}_y خطی قطبیت کی موج ہوگی جسے شکل 10.15-ب میں دکھایا گیا ہے۔ اگر $E_1 = E_2 = E_{12}$ اور $\delta = 0$ ہوں تب بھی خطی قطبیت کی موج حاصل ہوتی ہے البتہ یہ موج افقی محد کے ساتھ 45° کا زاویہ بناتی ہے۔ شکل 10.15-پ میں اس موج کو دکھایا گیا ہے۔

آئیں اب ذرا دلچسپ صورت حال دیکھیں۔ نقطہ $z = 0$ پر مساوات 10.130

$$(10.132) \quad \begin{aligned} E_x &= E_1 \cos \omega t \\ E_y &= E_2 \cos(\omega t - \delta) \end{aligned}$$

صورت اختیار کر لیتے ہیں جس میں E_y کو

$$E_y = E_2 (\cos \omega t \cos \delta + \sin \omega t \sin \delta)$$

لکھنا ممکن ہے۔ اس مساوات میں، E_x کی مساوات استعمال کرتے ہوئے

$$\cos \omega t = \frac{E_x}{E_1}$$

$$\sin \omega t = \sqrt{1 - \left(\frac{E_x}{E_1}\right)^2}$$

پر کر کے

$$E_y = E_2 \left[\frac{E_x}{E_1} \cos \delta + \sqrt{1 - \left(\frac{E_x}{E_1}\right)^2} \sin \delta \right]$$

ملتا ہے جسے

$$(10.133) \quad \frac{E_x^2}{E_1^2} - 2 \frac{E_x E_y}{E_1 E_2} \cos \delta + \frac{E_y^2}{E_2^2} = \sin^2 \delta$$

یا

$$(10.134) \quad aE_x^2 - bE_x E_y + cE_y^2 = 1$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں

$$(10.135) \quad a = \frac{1}{E_1^2 \sin^2 \delta} \quad b = \frac{2 \cos \delta}{E_1 E_2 \sin^2 \delta} \quad c = \frac{1}{E_2^2 \sin^2 \delta}$$

لئے گئے ہیں۔ مساوات 10.134 بیضوی تقطیب⁹¹ کی عمومی مساوات ہے۔

مساوات 10.133 میں $E_1 = E_2 = E_0$ اور $\delta = \mp 90^\circ$ کی صورت میں

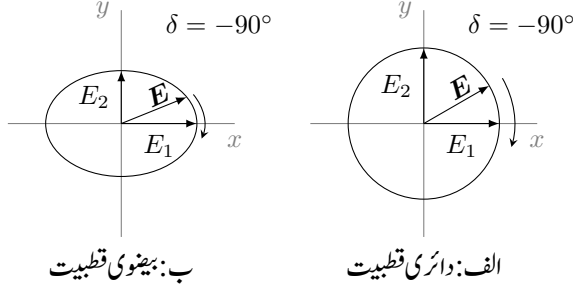
$$(10.136) \quad E_x^2 + E_y^2 = E_0^2$$

حاصل ہوتا ہے جو دائرے کی مساوات ہے اور جسے شکل 10.16-الف میں دکھایا گیا ہے۔ شکل میں E_1 اور E_2 بھی ظاہر کئے گئے ہیں جن کی لمبائی برابر ہے۔ مساوات 10.132 سے $\delta = +90^\circ$ کی صورت میں $\omega t = 0$ پر

$$E_x = E_0 \cos 0 = E_0$$

$$E_y = E_0 \cos(0 - 90^\circ) = 0 \quad (\delta = +90^\circ)$$

⁹¹ elliptic polarization



شکل 10.16: دائری اور بیضوی قطبیت۔

حاصل ہوتے ہیں جبکہ کچھ ہی لمحے بعد $\omega t = 30^\circ$ کی صورت میں

$$E_x = E_0 \cos 30^\circ = 0.866E_0$$

$$E_y = E_0 \cos(30^\circ - 90^\circ) = 0.5E_0 \quad (\delta = +90^\circ)$$

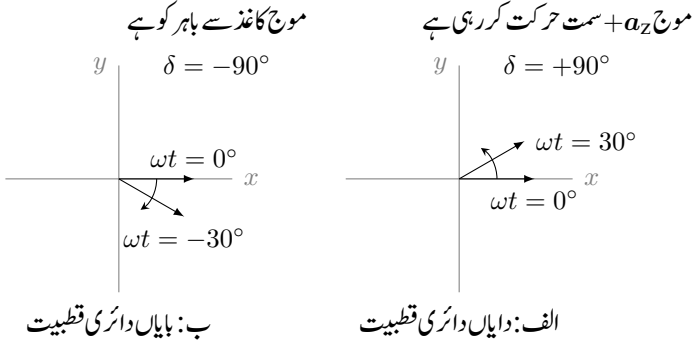
حاصل ہوتا ہے۔ شکل 10.17-الف میں دونوں اوقات پر موج دکھائی گئی ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ بڑھتے وقت کے ساتھ میدان کی نوک دائرے پر گھڑی کے الٹ سمت میں حرکت کرتی ہے۔ اس شکل میں موج کے حرکت کی سمت a_z کاغذ سے باہر کو ہے۔ اگر دائیں ہاتھ کے انگوٹھے کو موج کی حرکت کی سمت میں رکھا جائے تو اس ہاتھ کی بقایا چار انگلیاں دائرے پر میدان کی نوک کی حرکت کی سمت دیتی ہیں۔ یوں $\delta = +90^\circ$ کی صورت میں مساوات 10.136 دائیں دائری قطبیت⁹² کی موج کو ظاہر کرتی ہے۔

اسی طرح $\delta = -90^\circ$ کی صورت میں بائیں دائری قطبیت⁹³ حاصل ہوتی ہے جسے شکل 10.17-ب میں دکھایا گیا ہے۔

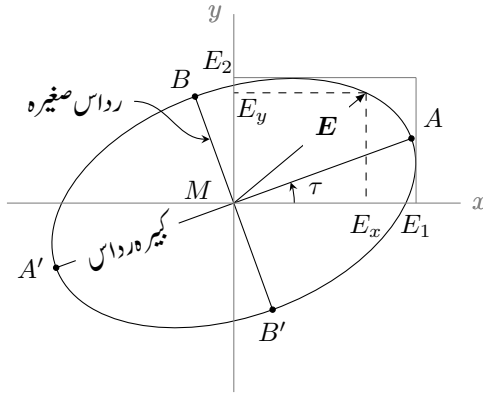
دائیں ہاتھ قطبی موج سے مراد وہ موج ہے جو آپ کی طرف حرکت کرتی ہوئی آپ کو گھڑی کے الٹ گھومتی نظر آئے۔ کسی موج کی قطبیت سے مراد وہ قطبیت ہے جو دیکھنے والے کی طرف حرکت کرتی موج کی قطبیت ہوگی۔

جہاں بھی غلطی کی گنجائش ہو وہاں بہتر ہوتا ہے کہ قطبیت کا ذکر کرتے وقت حرکت کی سمت کا بھی ذکر کیا جائے۔

مساوات 10.133 میں $\delta = \mp 90^\circ$ اور $E_1 \neq E_2$ کی صورت میں بیضوی موج حاصل ہوتی ہے جسے شکل 10.16-ب میں دکھایا گیا ہے۔



شکل 10.17: دائیں ہاتھ اور بائیں ہاتھ کی دائری قطبیت۔



شکل 10.18 میں مساوات 10.133 کی عمومی شکل دکھائی گئی ہے جس میں $\delta \neq 90^\circ$ اور $E_1 \neq E_2$ ہیں۔ اس شکل میں ترخیم⁹⁴ افقی محدود کے ساتھ τ زاویہ بناتا ہے۔ یوں $\tau = 15^\circ$ کی صورت میں یہ 15° قطبی موج کہلائے گی۔ شکل 10.18 میں رداس کبیرہ MA اور رداس صغیرہ MB کی شرح کو شرح رداس⁹⁵

$$(10.137) \quad \text{شرح رداس} = \frac{AA'}{BB'}$$

کہا جاتا ہے جبکہ τ موج کا زاویہ جھکاؤ⁹⁶ کہلاتا ہے۔ AA' محور کبیرہ اور BB' محور صغیرہ کہلاتے ہیں۔

مثال 10.10: برقی موج $E = 3 \cos(\omega t - \beta z - 45^\circ) \mathbf{a}_x - 4 \cos(\omega t - \beta z + 30^\circ) \mathbf{a}_y$ کا شرح رداس اور $z = 0$ پر زاویہ جھکاؤ حاصل کریں۔

حل: پہلے موج کا زیادہ سے زیادہ حیظہ اور کم سے کم حیظہ دریافت کرتے ہیں۔ کسی بھی تقابل $f(x)$ کی زیادہ سے زیادہ یا کم سے کم قیمت دریافت کرنے کی خاطر پہلے وہ نقطہ x_0 دریافت کیا جاتا ہے جہاں درکار قیمت پائی جائے گی۔ یہ نقطہ $\frac{df}{dx} = 0$ سے حاصل ہوتا ہے۔

دی گئی برقی موج کی عمومی صورت

$$(10.138) \quad \mathbf{E} = E_x \cos \theta + E_y \cos(\theta + \delta)$$

ہے جس سے

$$|\mathbf{E}|^2 = E_x^2 \cos^2 \theta + E_y^2 \cos^2(\theta + \delta)$$

لکھا جاسکتا ہے۔ ہمیں متغیرہ θ کی وہ قیمت درکار ہے جس پر $|\mathbf{E}|^2$ زیادہ سے زیادہ یا کم سے کم پایا جائے گا۔ اس تقابل کا تفرق صفر کے برابر پر کرتے ہیں۔

$$-2E_x^2 \cos \theta \sin \theta - 2E_y^2 \cos(\theta + \delta) \sin(\theta + \delta) = 0$$

right circular polarization⁹²

left circular polarization⁹³

ellipse⁹⁴

axial ratio⁹⁵

tilt angle⁹⁶

اس میں $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ استعمال کرتے ہوئے یوں لکھا جا سکتا ہے۔

$$E_x^2 \sin 2\theta + E_y^2 \sin[2(\theta + \delta)] = 0$$

اب $\sin(2\theta + 2\delta) = \sin 2\theta \cos 2\delta + \cos 2\theta \sin 2\delta$ پر کرتے ہیں۔

$$E_x^2 \sin 2\theta + E_y^2 [\sin 2\theta \cos 2\delta + \cos 2\theta \sin 2\delta] = 0$$

اس سے یوں لکھا جا سکتا ہے

$$\tan 2\theta = \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} = \frac{-E_y^2 \sin 2\delta}{E_x^2 + E_y^2 \cos 2\delta}$$

جس سے

$$(10.139) \quad \theta_{01} = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{-E_y^2 \sin 2\delta}{E_x^2 + E_y^2 \cos 2\delta} \right)$$

حاصل ہوتا ہے۔ محور کبیرہ اور محور صغیرہ میں 90° کا فرق پایا جاتا ہے لہذا دوسرا محور

$$(10.140) \quad \theta_{02} = 90^\circ + \theta_{01}$$

پر ہو گا۔ ان میں ایک نقطے پر تفاعل کی کم سے کم قیمت حاصل ہوگی جبکہ دوسرے نقطے پر تفاعل کی زیادہ سے زیادہ قیمت حاصل ہوگی۔

سوال میں دی گئی موج میں $\omega t - \beta z - 45^\circ = \theta$ پر کرنے سے اسے

$$E = 3 \cos \theta - 4 \cos(\theta + 75^\circ)$$

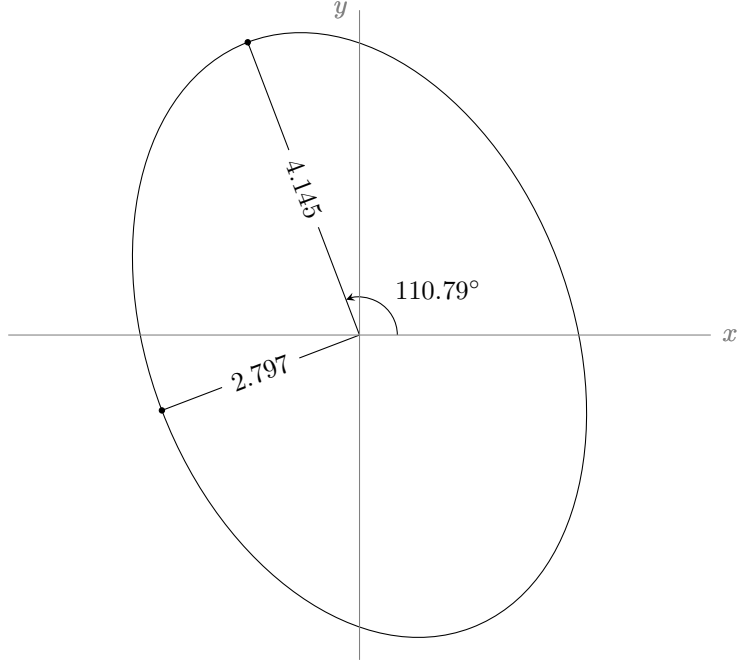
لکھا جا سکتا ہے۔ یوں مساوات 10.139 اور مساوات 10.140 سے

$$\theta_{01} = \omega t - \beta z - 45^\circ = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{-(-4)^2 \sin(2 \times 75^\circ)}{3^2 + (-4)^2 \cos(2 \times 75^\circ)} \right) = 29.37^\circ$$

$$\theta_{02} = 90^\circ + 29.37^\circ = 119.37^\circ$$

حاصل ہوتے ہیں۔ پہلے نقطے پر محور

$$\begin{aligned} E &= 3 \cos 29.37^\circ \mathbf{a}_x - 4 \cos(29.37^\circ + 75^\circ) \mathbf{a}_y \\ &= 2.6144 \mathbf{a}_x + 0.9927 \mathbf{a}_y \\ &= 2.797 / 20.792^\circ \end{aligned}$$



شکل 10.19: مثال 10.10 کی بیضوی قطبی موج۔

جبکہ دوسرے نقطے پر محور

$$\begin{aligned} E &= -1.471\mathbf{a}_x + 3.875\mathbf{a}_y \\ &= 4.145/110.79^\circ \end{aligned}$$

پایا جائے گا۔ دوسرے محور کی لمبائی زیادہ ہے لہذا یہ محور کبیرہ ہے۔ شرح رداس

$$\frac{4.145}{2.797} = 1.42$$

ہے جبکہ محور کبیرہ کا زاویہ جھکاؤ 110.79° یا -69.11° دیتا ہے۔ شکل 10.19 میں نتائج دکھائے گئے ہیں۔

مثال 10.11: صفحہ کتاب کے عمودی باہر کی جانب موج کے اجزاء درج ذیل ہیں۔

$$E_x = 5 \cos \omega t$$

$$E_y = 15 \cos(\omega t + 90^\circ)$$

موج کی شرح رداس، تقطیب اور زاویہ جھکاؤ حاصل کریں۔

حل:

$$\text{شرح رداس} = \frac{15}{5} = 3$$

کبیرہ اور صغیرہ رداس برابر نہ ہونے کی وجہ سے بیضوی موج پائی جائے گی۔ گھومنے کی سمت دریافت کرنے کی خاطر ہم کسی بھی دو قریبی لمحات پر موج کو دیکھتے ہیں۔ یوں لمحہ $\omega t = 0$ پر

$$E_x = 5 \cos 0^\circ = 5$$

$$E_y = 15 \cos 90^\circ = 0$$

ہوں گے جبکہ $\omega t = 30^\circ$ پر

$$E_x = 5 \cos 30^\circ = 4.33$$

$$E_y = 15 \cos(30^\circ + 90^\circ) = -7.5$$

ہوں گے۔ ان نتائج سے صاف ظاہر ہے کہ موج گھڑی کی سمت گھوم رہی ہے لہذا یہ بائیں بیضوی قطبی موج کہلائے گی۔

چونکہ کبیرہ رداس y محدود جبکہ صغیرہ رداس x محدود ہیں لہذا زاویہ جھکاؤ 90° ہے۔

مثال 10.12: موج کی دوری سمتی مساوات $E_s = E_0(a_x - ja_y)e^{-j\beta z}$ ہے۔ موج کی حقیقی مساوات حاصل کرتے ہوئے اس کی تقطیب دریافت کریں۔

حل: موج کو حقیقی شکل میں لکھنے کی خاطر دوری سمتی مساوات کو $e^{j\omega t}$ سے ضرب دیتے ہوئے پولر مماثل کا استعمال کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} E &= E_0(\mathbf{a}_x - j\mathbf{a}_y)e^{j(\omega t - \beta z)} \\ &= E_0(\mathbf{a}_x - j\mathbf{a}_y)[\cos(\omega t - \beta z) + j\sin(\omega t - \beta z)] \\ &= E_0[\mathbf{a}_x \cos(\omega t - \beta z) + \mathbf{a}_y \sin(\omega t - \beta z)] \\ &\quad + jE_0[\mathbf{a}_x \sin(\omega t - \beta z) - \mathbf{a}_y \cos(\omega t - \beta z)] \end{aligned}$$

اس کا حقیقی جزو

$$E = E_0[\mathbf{a}_x \cos(\omega t - \beta z) + \mathbf{a}_y \sin(\omega t - \beta z)]$$

یعنی

$$(10.141) \quad E = E_0[\mathbf{a}_x \cos(\omega t - \beta z) + \mathbf{a}_y \cos(\omega t - \beta z - 90^\circ)] \quad \text{دایاں دائری قطبی}$$

ہے جو حقیقی موج کی مساوات ہے۔

کسی بھی نقطے مثلاً $z = 0$ پر دو قریبی لمحات پر موج کو دیکھتے ہوئے، اس کے گھومنے کی سمت دیکھی جاسکتی ہے۔ لمحہ $\omega t = 0$ پر موج \mathbf{a}_x سمت میں ہے جبکہ لمحہ $\omega t = 90^\circ$ پر موج \mathbf{a}_y سمت میں ہے۔ یوں موج الٹ گھڑی گھوم رہی ہے۔ چونکہ رداں کبیرہ اور رداں صغیرہ برابر ہیں لہذا یہ دائری موج ہے۔ اس موج کو دائیں دائری قطبی موج کہا جائے گا۔ سوال 10.48 میں آپ سے گزارش کی گئی ہے کہ بائیں دائری قطبی موج کی مساوات

$$(10.142) \quad E = E_0[\mathbf{a}_x \cos(\omega t - \beta z) + \mathbf{a}_y \cos(\omega t - \beta z + 90^\circ)] \quad \text{بایاں دائری قطبی}$$

حاصل کریں۔

مشق 10.8: موج کی دوری سمتی مساوات $E_s = E_0(\mathbf{a}_x - j\mathbf{a}_y)e^{j\beta z}$ ہے۔ موج کی حقیقی مساوات حاصل کرتے ہوئے اس کی قطبیت دریافت کریں۔

جواب: دھیان رہے کہ یہ موج منفی z محور کی جانب حرکت کر رہی ہے۔ یوں یہ بائیں دائری قطبی موج ہے۔

مثال 10.13: دائیں دائری قطبی موج $E_0(\mathbf{a}_x - j\mathbf{a}_y)e^{-j\beta z}$ اور بائیں دائری قطبی موج $E_0(\mathbf{a}_x + j\mathbf{a}_y)e^{-j\beta z}$ میں δ زاویائی فرق پایا جاتا ہے۔ ان کا مجموعہ دریافت کریں۔

حل: ان کا مجموعہ

$$\begin{aligned} E &= E_0(\mathbf{a}_x - j\mathbf{a}_y)e^{-j\beta z} + E_0(\mathbf{a}_x + j\mathbf{a}_y)e^{-j\beta z}e^{j\delta} \\ &= E_0[(1 + e^{j\delta})\mathbf{a}_x - j(1 - e^{j\delta})\mathbf{a}_y]e^{-j\beta z} \end{aligned}$$

ہوگا۔ اس سے $e^{j\frac{\delta}{2}}$ باہر نکالتے ہوئے

$$E = E_0 e^{j\frac{\delta}{2}} [(e^{-j\frac{\delta}{2}} + e^{j\frac{\delta}{2}})\mathbf{a}_x - j(e^{-j\frac{\delta}{2}} - e^{j\frac{\delta}{2}})\mathbf{a}_y] e^{-j\beta z}$$

لکھا جاسکتا ہے جس میں $e^{j\frac{\delta}{2}} + e^{-j\frac{\delta}{2}} = 2\cos\frac{\delta}{2}$ اور $e^{j\frac{\delta}{2}} - e^{-j\frac{\delta}{2}} = j2\sin\frac{\delta}{2}$ پر کرنے سے

$$(10.143) \quad E = 2E_0 \left[\cos\left(\frac{\delta}{2}\right)\mathbf{a}_x + \sin\left(\frac{\delta}{2}\right)\mathbf{a}_y \right] e^{-j(\beta z - \frac{\delta}{2})}$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 10.143 خطی قطبی موج ہے جو x محدد کے ساتھ $\frac{\delta}{2}$ زاویے پر ہے۔ اس مثال سے ثابت ہوا کہ کسی بھی خطی قطبی موج کو دو عدد دائری قطبی امواج کا مجموعہ تصور کیا جاسکتا ہے۔

10.10 بیضوی یاداری قطبی امواج کا پوزیشننگ سمتیہ

کسی بھی موج کی اوسط طاقت مساوات 10.56

$$\mathcal{P}_{\text{اوسط}} = \frac{1}{2} [\mathbf{E}_s \times \mathbf{H}_s^*]_{\text{حقیقی}}$$

سے حاصل کی جاسکتی ہے۔ شکل 10.18 کے عمومی بیضوی قطبی موج کے x اور y اجزاء

$$(10.144) \quad E_{sx} = E_1 e^{j(\omega t - \beta z)}$$

$$(10.145) \quad E_{sy} = E_2 e^{j(\omega t - \beta z + \delta)}$$

میں δ زاویائی فرق پایا جاتا ہے۔ کسی بھی نقطے پر کل برقی میدان ان اجزاء کا سمتی مجموعہ ہو گا جسے نقطہ $z = 0$ پر

$$(10.146) \quad \mathbf{E}_s = \mathbf{a}_x E_1 e^{j\omega t} + \mathbf{a}_y E_2 e^{j(\omega t + \delta)}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ چونکہ

$$\frac{\mathbf{E}}{H} = Z = |Z| e^{j\theta z}$$

ہوتا ہے لہذا مساوات 10.144 کی جوڑی مقناطیسی موج

$$H_{sy} = \frac{E_{sx}}{|Z|} e^{-j\theta z} = \frac{E_1}{|Z|} e^{j(\omega t - \beta z - \theta z)} = H_1 e^{j(\omega t - \beta z - \theta z)}$$

ہو گی۔ اسی طرح مساوات 10.145 کی جوڑی

$$(10.147) \quad H_{sx} = -H_2 e^{j(\omega t - \beta z + \delta - \theta z)}$$

ہو گی۔ کسی بھی نقطے پر مقناطیسی میدان ان اجزاء کا سمتی مجموعہ ہو گا جسے نقطہ $z = 0$ پر

$$(10.148) \quad \mathbf{H}_s = -\mathbf{a}_x H_2 e^{j(\omega t + \delta - \theta z)} + \mathbf{a}_y H_1 e^{j(\omega t - \theta z)}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ جوڑی دار مخلوط \mathbf{H}_s کی قیمت مندرجہ بالا مساوات میں مثبت z کو منفی اور منفی z کو مثبت لکھ کر حاصل ہوتا ہے یعنی

$$(10.149) \quad \mathbf{H}_s^* = -\mathbf{a}_x H_2 e^{-j(\omega t + \delta - \theta z)} + \mathbf{a}_y H_1 e^{-j(\omega t - \theta z)}$$

مخلوط پوسٹنگ سمتیہ سے اوسط طاقت

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\text{اوسط}} &= \frac{1}{2} \left(\mathbf{a}_x E_1 e^{j\omega t} + \mathbf{a}_y E_2 e^{j(\omega t + \delta)} \right) \times \left(-\mathbf{a}_x H_2 e^{-j(\omega t + \delta - \theta z)} + \mathbf{a}_y H_1 e^{-j(\omega t - \theta z)} \right) \Big|_{\text{حقیقی}} \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{a}_z \left[E_1 H_1 e^{j\theta z} + E_2 H_2 e^{j\theta z} \right] \end{aligned}$$

یعنی

$$(10.150) \quad \mathcal{P}_{\text{اوسط}} = \frac{1}{2} \mathbf{a}_z (E_1 H_1 + E_2 H_2) \cos \theta_z$$

حاصل ہوتی ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ طاقت δ پر بالکل منحصر نہیں ہے۔

بے ضیاع خطے میں برقی اور مقناطیسی میدان ہم قدم ہوتے ہیں۔ ان میں $Z_0 = \frac{E_1}{H_1} = \frac{E_2}{H_2}$ کے برابر ہوتا ہے جہاں حقیقی قدرتی رکاوٹ کا زاویہ $\theta_z = 0$ ہے۔ ایسے خطے میں

$$(10.151) \quad \begin{aligned} \mathcal{P}_{\text{اوسط}} &= \frac{1}{2} \mathbf{a}_z (E_1 H_1 + E_2 H_2) \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{a}_z (H_1^2 + H_2^2) Z_0 = \frac{1}{2} \mathbf{a}_z H^2 Z_0 \end{aligned}$$

ہو گا جہاں $H = \sqrt{H_1^2 + H_2^2}$ کے برابر ہے۔ اس مساوات کو

$$(10.152) \quad \begin{aligned} \mathcal{P}_{\text{اوسط}} &= \frac{1}{2} \mathbf{a}_z (E_1 H_1 + E_2 H_2) \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{a}_z \frac{E_1^2 + E_2^2}{Z_0} = \frac{1}{2} \frac{E^2}{Z_0} \mathbf{a}_z \end{aligned}$$

بھی لکھا جا سکتا ہے جہاں $E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2}$ کے برابر ہے۔

جس بیضوی موج کے اجزاء مساوات 10.144 اور مساوات 10.145 میں دئے گئے ہیں، اس موج کی طاقت مساوات 10.152 دیتی ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مجموعی بیضوی موج کی طاقت دونوں اجزاء کی علیحدہ علیحدہ طاقت $\frac{E_1^2}{2Z_0}$ اور $\frac{E_2^2}{2Z_0}$ کے مجموعے کے برابر ہے۔

مثال 10.14: خلاء میں بیضوی قطبی موج کے اجزاء

$$\begin{aligned} E_x &= 2 \cos(\omega t - \beta z) \\ E_y &= 3 \cos(\omega t - \beta z + 75^\circ) \end{aligned}$$

ڈولٹ فی میٹر ہیں۔ موج کی فی مربع میٹر اوسط طاقت دریافت کریں۔

حل: خالی خلاء کی قدرتی رکاوٹ $Z = 120\pi$ لیتے ہوئے مساوات 10.152 سے

$$\mathcal{P}_{\text{اوسط}} = \frac{1}{2} \frac{2^2 + 3^2}{120\pi} = 17.24 \frac{\text{mW}}{\text{m}^2}$$

حاصل ہوتا ہے۔

سوالات

سوال 10.1: خالی خلاء میں a_z سمت میں حرکت کرتی، 600 MHz تعدد کے مستوی برقی موج E کی چوٹی لمحہ $t = 1 \text{ ns}$ پر $z = 0.3 \text{ m}$ پر پائی جاتی ہے۔ یہ چوٹی $\frac{310 \text{ V}}{\text{m}}$ کے برابر ہے۔ الف) برقی میدان a_x سمت میں ہونے کی صورت میں سائن نما E اور H امواج کی مساوات لکھیں۔ ب) میدان سمتیہ $5a_x - 2a_y$ کی سمت میں ہونے کی صورت میں سائن نما E_s اور H_s امواج کی مساوات لکھیں۔

جواب: $H = \frac{31}{12\pi} a_y \cos(12\pi \times 10^8 t - 4\pi z)$ ، $E = 310 a_x \cos(12\pi \times 10^8 t - 4\pi z)$
 $H_s = \frac{31}{12\pi} \left[\frac{2}{\sqrt{29}} a_x + \frac{5}{\sqrt{29}} a_y \right] e^{-j4\pi z}$ ، $E_s = 310 \left[\frac{5}{\sqrt{29}} a_x - \frac{2}{\sqrt{29}} a_y \right] e^{-j4\pi z}$

سوال 10.2: خالی خلاء میں نقطہ $N(3, -2, 5)$ پر a_z جانب حرکت کرتی، 200 MHz تعدد کے برقی میدان کی سائن نما مستوی موج کی چوٹی لمحہ $t = 0$ پر $E_0 = 150a_x + 210a_y \frac{\text{V}}{\text{m}}$ پائی جاتی ہے۔ الف) λ ، β ، a_E ، a_H ، H_0 اور مقناطیسی موج H_s حاصل کریں۔ ب) لمحہ $t = 0$ پر نقطہ N پہ برقی میدان کی شدت حاصل کریں۔ پ) لمحہ $t = 1.5 \text{ ns}$ پر نقطہ N پہ برقی میدان کی شدت حاصل کریں۔ ت) نقطہ $P(5, 3, 7)$ پہ لمحہ $t = 2 \text{ ns}$ پر برقی میدان کی شدت حاصل کریں۔

جوابات: $\lambda = \frac{3}{2} \text{ m}$ ، $\beta = 4.2 \frac{\text{rad}}{\text{m}}$ ، $a_H = -0.86a_x + 0.51a_y$ ، $a_E = 0.51a_x + 0.86a_y$ ، $H_0 = 0.7733 \frac{\text{A}}{\text{m}}$ ، $H_s = 0.7733(-0.86a_x + 0.51a_y)e^{-j4.2z}$ ، $E_0 = 150 \frac{\text{V}}{\text{m}}$ ، $292 \frac{\text{V}}{\text{m}}$ ، $-90 \frac{\text{V}}{\text{m}}$ ، $266 \frac{\text{V}}{\text{m}}$

سوال 10.3: خالی خلاء میں مستوی موج $E_s = E_0 e^{-j6z}$ دی گئی ہے۔ الف) موج کی تعدد ω حاصل کریں۔ ب) برقی میدان کا حیظہ بالترتیب $E_0 = 50a_x$ ، $E_0 = (5 + j10)a_x$ ، $E_0 = 50a_x$ اور $E_0 = (30/45^\circ)a_x$ ہونے کی صورت میں لمحہ $t = 0$ پر نقطہ $N(0, 0, 0)$ پہ $|E|$ حاصل کریں۔

جوابات: $1.8 \frac{\text{Grad}}{\text{s}}$ ، $50 \frac{\text{V}}{\text{m}}$ ، $11.18 \frac{\text{V}}{\text{m}}$ ، $94.3 \frac{\text{V}}{\text{m}}$ ، $11.18 \frac{\text{V}}{\text{m}}$ ، $21.2 \frac{\text{V}}{\text{m}}$ ،

سوال 10.4: خالی خلاء میں 350 MHz تعدد کی مستوی موج $E_s = (5 + j2)(3a_x - j4a_y)e^{j\beta z} \frac{\text{V}}{\text{m}}$ پائی جاتی ہے۔ λ اور β کی قیمتیں دریافت کریں۔ لمحہ $t = 1.4 \text{ ns}$ پر نقطہ $z = 40 \text{ cm}$ پہ E حاصل کریں۔ موج کا حیظہ حاصل کریں۔

جواب: $\lambda = \frac{6}{7} \text{ m}$ ، $\beta = \frac{7\pi}{3} \frac{\text{rad}}{\text{m}}$ ، $E(z = 40\text{cm}, t = 1.4 \text{ ns}) = 13.96\mathbf{a}_x - 10.84\mathbf{a}_y \frac{\text{V}}{\text{m}}$ ، $|\mathbf{E}|_{\text{مقدار}} = 26.9 \frac{\text{V}}{\text{m}}$ ،

سوال 10.5: ایسا خطہ جس کے مستقل $\mu_R = 1$ ، $\epsilon_R = 4.4$ اور $\sigma = 0$ ہیں میں بڑھتے x محدود کی جانب حرکت کرتی، 250 MHz تعدد کی مستوی برقی موج پائی جاتی ہے۔ برقی میدان \mathbf{a}_y سمت میں ہے۔ مندرجہ ذیل حاصل کریں۔ v_p ، β ، λ ، Z ، \mathbf{E}_s ، \mathbf{H}_s اور اوسط \mathcal{P} ؛

جوابت: $v_p = 1.429 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ، $\beta = 10.99 \frac{\text{rad}}{\text{m}}$ ، $\lambda = 57.2 \text{ cm}$ ، $Z = 179.6 \Omega$ ، $\mathcal{P}_{\text{اوسط}} = \frac{E_0^2}{359.2} \mathbf{a}_x \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$ ، $\mathbf{H}_s = \frac{E_0}{179.6} e^{-j10.99x} \mathbf{a}_z \frac{\text{A}}{\text{m}}$ ، $\mathbf{E}_s = E_0 e^{-j10.99x} \mathbf{a}_y \frac{\text{V}}{\text{m}}$

سوال 10.6: مستوی برقی موج $\mathbf{E} = E_0 e^{-\alpha z} \sin(\omega t - \beta z) \mathbf{a}_y \frac{\text{V}}{\text{m}}$ اور $Z = |Z_0| e^{j\phi}$ دئے گئے ہیں۔ (الف) دوری سمتیت \mathbf{E}_s اور \mathbf{H}_s حاصل کریں۔ (ب) اوسط \mathcal{P} حاصل کریں۔

جوابت: $\mathbf{E}_s = E_0 e^{-\alpha z} e^{-j(\beta z + \pi)} \mathbf{a}_y \frac{\text{V}}{\text{m}}$ ، $\mathbf{H}_s = -\frac{E_0}{|Z_0|} e^{-\alpha z} e^{-j(\beta z + \pi + \phi)} \mathbf{a}_x \frac{\text{A}}{\text{m}}$ ، $\mathcal{P}_{\text{اوسط}} = \frac{E_0^2}{2|Z_0|} e^{-2\alpha z} \cos \phi \mathbf{a}_z \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$

سوال 10.7: خالی خلاء میں $\mathbf{E} = (30\mathbf{a}_y + 22\mathbf{a}_z) \cos(\omega t - 60x) \frac{\text{V}}{\text{m}}$ پایا جاتا ہے۔ (الف) λ اور ω حاصل کریں۔ (ب) دوری سمتیت \mathbf{E}_s اور \mathbf{H}_s لکھیں۔ (پ) اوسط \mathcal{P} حاصل کریں۔

جوابت: $\lambda = \frac{\pi}{30} \text{ m}$ ، $\omega = 1.8 \times 10^{10} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ ، $\mathbf{E}_s = (30\mathbf{a}_y + 22\mathbf{a}_z) e^{-j60x} \frac{\text{V}}{\text{m}}$ ، $\mathcal{P}_{\text{اوسط}} = \frac{173}{30\pi} \mathbf{a}_x \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$ ، $\mathbf{H}_s = \frac{1}{120\pi} (-22\mathbf{a}_y + 30\mathbf{a}_z) e^{-j60x} \frac{\text{A}}{\text{m}}$

سوال 10.8: مستوی مقناطیسی موج کا دوری سمتیت $\mathbf{H}_s = (5\mathbf{a}_x + j4\mathbf{a}_z) e^{j20y} \frac{\text{V}}{\text{m}}$ اور تعدد 200 MHz ہے۔ برقی موج کا زیادہ سے زیادہ حیظ $1200 \frac{\text{V}}{\text{m}}$ ہے۔ حاصل کریں β ، λ ، Z ، v_p ، ϵ_R ، μ_R اور $\mathbf{H}(x, y, z, t)$ ؛

جوابت: $\beta = 20 \frac{\text{rad}}{\text{m}}$ ، $\lambda = \frac{\pi}{10} \text{ m}$ ، $Z = 187.4 \Omega$ ، $v_p = 6.28 \times 10^7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ، $\epsilon_R = 9.6$ ، $\mu_R = 2.4$ ، $\mathbf{H} = 5 \cos(2\pi \times 200 \times 10^6 t + 20y) \mathbf{a}_x - 4 \sin(2\pi \times 200 \times 10^6 t + 20y) \mathbf{a}_z \frac{\text{A}}{\text{m}}$

سوال 10.9: میدان $\mathbf{E}(y, t) = 700 \cos(2.5 \times 10^7 t - \beta y) \mathbf{a}_x \frac{\text{V}}{\text{m}}$ اور $\mathbf{H}(y, t) = 1.5 \cos(2.5 \times 10^7 t - \beta y) \mathbf{a}_y \frac{\text{A}}{\text{m}}$ مستوی موج کو ظاہر کرتے ہیں۔ یہ موج $1.7 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ رفتار سے حرکت کر رہی ہے۔ حاصل کریں β ، λ ، Z ، ϵ_R اور μ_R ؛

جوابات: $\mu_R = 2.2$ ، $\epsilon_R = 1.4$ ، $Z = 467 \Omega$ ، $\lambda = 42.7 \text{ m}$ ، $\beta = 0.147 \frac{\text{rad}}{\text{m}}$

سوال 10.10: بے ضیاع خطے کے مستقل $\mu_R = 1.2$ اور $\epsilon_R = 5.4$ ہیں۔ لمحہ $t = 10 \text{ ns}$ پر نقطہ $N(2, 0.5, 1.5)$ پہ 15 MHz تعدد اور $E_x = 350 \frac{\text{V}}{\text{m}}$ کی خطی قطبی موج $E_z = 0$ ، $E_y = 0$ ، $E_x = 350 \frac{\text{V}}{\text{m}}$ کی خطی قطبی موج سمت میں حرکت کر رہی ہے۔ حاصل کریں β ، λ ، v_p ، Z ، E_0 ، $E(x, y, z, t)$:

جوابات: $\beta = 0.25\pi \frac{\text{rad}}{\text{m}}$ ، $\lambda = 7.85 \text{ m}$ ، $v_p = 1.18 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ، $Z = 178 \Omega$ ، $E_0 = 408.6 \frac{\text{V}}{\text{m}}$ ، $E(x, y, z, t) = 408.6 \cos(3\pi \times 10^7 t - 0.25\pi y) \mathbf{a}_x$

سوال 10.11: خطی قطبی موج $E_s = (E_{y0} \mathbf{a}_y + E_{z0} \mathbf{a}_z) e^{\alpha x} e^{j\beta x} \frac{\text{V}}{\text{m}}$ ایسے ضیاع کار خطے میں پائی جاتی ہے جہاں $Z = |Z_0| e^{j\phi}$ ہے۔ $H(x, y, z, t)$ ، $E(x, y, z, t)$ ، H_s اور اوسط \mathcal{P} کے مساوات لکھیں۔

جوابات: $H_s = \frac{1}{|Z_0|} (E_{z0} \mathbf{a}_y - E_{y0} \mathbf{a}_z) e^{\alpha x} e^{j(\beta x - \phi)} \frac{\text{A}}{\text{m}}$ ، $E(x, y, z, t) = (E_{y0} \mathbf{a}_y + E_{z0} \mathbf{a}_z) e^{\alpha x} \cos(\omega t + \beta x) \frac{\text{V}}{\text{m}}$ ، $H(x, y, z, t) = \frac{1}{|Z_0|} (E_{z0} \mathbf{a}_y - E_{y0} \mathbf{a}_z) e^{\alpha x} \cos(\omega t + \beta x - \phi) \frac{\text{A}}{\text{m}}$ ، $\mathcal{P}_{\text{اوسط}} = \frac{1}{2|Z_0|} (E_{y0}^2 + E_{z0}^2) e^{2\alpha x} \cos \phi \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$

سوال 10.12: کامل موصل سے بنی $\rho = 5 \text{ mm}$ اور $\rho = 12 \text{ mm}$ رداں کے نلکیوں کا محور z محدود ہے۔ دو نلکیوں کے درمیان ذو برق کے مستقل $\mu_R = 1$ اور $\epsilon_R = 3.2$ ہیں۔ اس ذو برق میں میدان $E = \frac{1200}{\rho} \cos(\omega t - 5z) \mathbf{a}_\rho \frac{\text{V}}{\text{m}}$ پایا جاتا ہے۔ الف) میکس ویل کے مساوات استعمال کرتے ہوئے ω حاصل کریں۔ ب) H کی مساوات حاصل کریں۔ پ) اوسط \mathcal{P} اور اوسط \mathcal{P} حاصل کریں۔ ت) دونوں نلکیوں کے درمیانی خطے میں \mathbf{a}_z جانب کتنی طاقت منتقل ہو رہی ہے۔

جوابات: $\omega = 8.38 \times 10^8 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ ، $H = \frac{5.7}{\rho} \cos(8.38 \times 10^8 t - 5z) \mathbf{a}_\phi \frac{\text{A}}{\text{m}}$ ، $\mathcal{P}_{\text{اوسط}} = \frac{3418.6}{\rho^2} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$ ، $\mathcal{P} = \frac{6837}{\rho^2} \cos^2(8.38 \times 10^8 t - 5z) \mathbf{a}_z \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$ ، 2.5 MW

سوال 10.13: کروی محدود میں $E_s = \frac{60}{r} \sin \theta e^{-j2r} \mathbf{a}_\theta \frac{\text{V}}{\text{m}}$ اور $H_s = \frac{1}{4\pi r} \sin \theta e^{-j2r} \mathbf{a}_\phi \frac{\text{A}}{\text{m}}$ دیے گئے ہیں۔ الف) اوسط \mathcal{P} حاصل کریں۔ ب) رداں $r = 5 \text{ cm}$ پر سطح $0 < \phi < 2\pi$ ، $0 < \theta < \frac{\pi}{3}$ سے خارج طاقت حاصل کریں۔

جوابات: $\mathcal{P}_{\text{اوسط}} = \frac{15 \sin^2 \theta}{2\pi r^2} \mathbf{a}_r \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$ ، 3.13 W

سوال 10.14: 12 GHz تعدد پر فیراٹ کے مستقل $\mu_R = 5$ ، $\epsilon_R = 8$ اور $\sigma = 15 \frac{\text{mS}}{\text{m}}$ ہیں۔ آپ سے گزارش ہے کہ α ، β ، v ، λ اور Z حاصل کریں۔

جوابات: $\alpha = 2.23 \frac{\text{NP}}{\text{m}}$ یا $19.4 \frac{\text{dB}}{\text{m}}$ ، $\beta = 1590 \frac{\text{rad}}{\text{m}}$ ، $v = 4.74 \times 10^7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ، $\lambda = 3.95 \text{ mm}$ ، $Z = 297.83 + j0.418 \Omega$ ،

سوال 10.15: ایسے خطے کے مستقل μ_R ، ϵ_R اور σ حاصل کریں جس میں 100 MHz تعدد پر طول موج 1 m ، قدرتی رکاوٹ کی حتمی قیمت 200Ω اور تضعیف مستقل $2 \frac{\text{NP}}{\text{m}}$ ہو۔

جوابات: $\sigma = 19.06 \frac{\text{mS}}{\text{m}}$ ، $\epsilon_R = 4.84$ ، $\mu_R = 1.67$

سوال 10.16: 330 MHz تعدد کی مستوی موج ایسے غیر مقناطیسی خطے میں حرکت کر رہی ہے جس کے مستقل $\epsilon_R = 2.8$ اور $\frac{\sigma}{\omega\epsilon} = 3.6 \times 10^{-4}$ ہیں۔ الف) اس خطے کی σ حاصل کریں۔ ب) α ، β اور λ حاصل کریں۔ پ) موج کی چوٹی کتنا فاصلہ طے کرنے کے بعد آدھی رہ جائے گی؟ ت) موج کی طاقت کتنا فاصلہ طے کرنے کے بعد آدھا رہ جائے گا؟ ٹ) کتنے فاصلے پر موج کے زاویے میں 30° تبدیلی رونما ہوگی؟

جوابات: $\sigma = 1.85 \times 10^{-5} \frac{\text{S}}{\text{m}}$ ، $\alpha = 0.04 \frac{\text{NP}}{\text{m}}$ ، $\beta = 11.57 \frac{\text{rad}}{\text{m}}$ ، $\lambda = 0.54 \text{ m}$ ، 17.1 m ، 4.52 cm ، 8.55 m ،

سوال 10.17: برق گیر (کپیسٹر) C میں طاقت کے ضیاع کو برق گیر (کپیسٹر) کے متوازی مزاحمت R سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ ایسے متوازی دور کی برقی رکاوٹ Z ہے۔ برقی رکاوٹ کے زاویہ θ کا کوسائن، یعنی $\cos \theta$ ، جزو ضربی طاقت کہلاتا ہے جبکہ برق گیر (کپیسٹر) کی خاصیت Q سے مراد ωRC ہے۔ متوازی چادر برق گیر (کپیسٹر) جس کے مستقل σ ، ϵ اور μ ہیں کے جزو ضربی طاقت اور Q کے مساوات کو مماس ضیاع $\frac{\sigma}{\omega\epsilon}$ استعمال کرتے ہوئے لکھیں۔

جوابات: $Q = \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^{-1}$ ، $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^{-2}}}$

سوال 10.18: تانبے کی ہم محوری تار کے اندرونی تار کا رداس 5 mm اور بیرونی تار کا اندرونی رداس 8 mm ہیں۔ دونوں تار گہرائی جلد δ سے بہت زیادہ موٹائی رکھتے ہیں جبکہ ذو برق بے ضیاع ہے۔ 550 MHz تعدد پر فی میٹر اندرونی تار، فی میٹر بیرونی تار اور فی میٹر مکمل ترسیلی تار کی مزاحمت دریافت کریں۔ تانبے کے مستقل کتاب کے آخر میں صفحہ 831 پر دیے ضمیمے سے حاصل کئے جاسکتے ہیں۔

جوابات: $195 \frac{\text{m}\Omega}{\text{m}}$ ، $122 \frac{\text{m}\Omega}{\text{m}}$ ، $316 \frac{\text{m}\Omega}{\text{m}}$

سوال 10.19: الموئیم سے نکلے نماتار بنائی جاتی ہے جس کا اندرونی رداس 5 mm اور بیرونی رداس 6 mm ہیں۔ ایک کلو میٹر تار کی مزاحمت مندرجہ ذیل تعدد پر حاصل کریں۔ الف) یک سمتی رو۔ ب) 30 MHz (پ) 1.2 GHz

جوابات: 295Ω ، 46.7Ω ، $758 \text{ m}\Omega$

سوال 10.20: کھانا جلد گرم کرنے کی خاطر عموماً برقی خورد موج چوہا⁹⁷ (مائیکرو ویو تندور) استعمال کیا جاتا ہے جو عموماً 2.45 GHz کے تعدد پر کام کرتا ہے۔ اس چولھے کے دیوار سٹینلس سٹیل کے بنے ہوتے ہیں۔ سٹینلس سٹیل کے مستقل $\epsilon_R = 1$ اور $\mu_R = 1$ ، $\sigma = 1.1 \times 10^6 \frac{\text{S}}{\text{m}}$ لیتے ہوئے گہرائی جلد δ حاصل کریں۔ سٹینلس سٹیل چادر کی سطح پر $E_s = 64/0^\circ \frac{\text{V}}{\text{m}}$ لیتے ہوئے چادر کے اندر میدان کی مساوات لکھیں۔

جوابات: $E_s(z) = 64e^{-1.03 \times 10^{-7} z(1+j)} \frac{\text{V}}{\text{m}}$ ، $\delta = 9.69 \mu\text{m}$

سوال 10.21: ایک غیر مقناطیسی موصل میں رفتار موج $4.5 \times 10^5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ اور طول موج 0.25 mm ہے۔ تعدد f ، گہرائی جلد δ اور موصل کی موصلیت σ حاصل کریں۔

جوابات: $\sigma = 8.89 \times 10^4 \frac{\text{S}}{\text{m}}$ ، $\delta = 39.8 \mu\text{m}$ ، $f = 1.8 \text{ GHz}$

سوال 10.22: برقی موج $E = \frac{270}{r} \sin \theta \cos[\omega(t - \frac{r}{c})] \mathbf{a}_\theta \frac{\text{V}}{\text{m}}$ دی گئی ہے۔ رداس r کے کرہ سے کتنی طاقت خارج ہو رہی ہے۔

جواب: 810 W

سوال 10.23: برقی موج $E_s = 3\mathbf{a}_x - 5\mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z \frac{\text{kV}}{\text{m}}$ اور مقناطیسی موج $H_s = 14\mathbf{a}_x + 13\mathbf{a}_y - 16\mathbf{a}_z \frac{\text{A}}{\text{m}}$ ہیں۔ الف) حرکت موج کی سمت میں اکائی سمتیہ حاصل کریں۔ ب) موج کی اوسط کشاف طاقت حاصل کریں۔ پ) $\mu_R = 1$ کی صورت میں ϵ_R حاصل کریں۔

جوابات: $\epsilon_R = 2.32$ ، $71.7 \frac{\text{kW}}{\text{m}^2}$ ، $\mathbf{a} = 0.38\mathbf{a}_x + 0.53\mathbf{a}_y + 0.76\mathbf{a}_z$

سوال 10.24: ضیاع کار خطہ $x < 0$ کے مستقل $\mu_R = 1$ ، $\epsilon_R = 1$ اور $\sigma = 1500 \frac{S}{m}$ ہیں جبکہ $x > 0$ خالی خلاء ہے۔ خلاء میں نقطہ $N(0^+, 0, 0)$ پر مقناطیسی میدان $H = 300 \cos 5 \times 10^8 t a_y \frac{A}{m}$ پایا جاتا ہے۔ الف) نقطہ $(0^-, 0, 0)$ پر H حاصل کریں۔ ب) خالی خلاء میں a_z سمت حرکت کرتی موج تصور کرتے ہوئے نقطہ $(0^+, 0, 0)$ پر E حاصل کریں۔ خطہ $z < 0$ میں $-a_x$ جانب حرکت کرتی موج تصور کرتے ہوئے نقطہ $(0^-, 0, 0)$ پر E حاصل کریں۔

جوابات: $E = 238 \cos(5 \times 10^8 t - 45^\circ) a_z \frac{V}{m}$ ، $E = 113 \cos 5 \times 10^8 t a_x \frac{kV}{m}$ ، $H = 300 \cos 5 \times 10^8 t a_y \frac{A}{m}$

سوال 10.25: آمدی مستوی موج جس کی تعدد $\omega = 4.2 \times 10^8 \frac{rad}{s}$ ہے خطہ-ا، $z < 0$ ، $\sigma_1 = 0$ ، $\epsilon_{R2} = 12$ ، $\mu_{R2} = 2.6$ ، $\sigma_2 = 0$ ، $z > 0$ ، $\epsilon_{R1} = 3.2$ ، $\mu_{R1} = 1$ سے خطہ-2، $z > 0$ ، $\sigma_1 = 0$ ، $\epsilon_{R2} = 12$ ، $\mu_{R2} = 2.6$ ، $\sigma_2 = 0$ ، $z > 0$ ، $\epsilon_{R1} = 3.2$ ، $\mu_{R1} = 1$ ہوتی ہے۔ آمدی برقی موج کا حیثہ $z = 0$ ، $t = 0$ پر $5.6 \frac{V}{m}$ ہے۔ الف) Z_2 ، Z_1 ، β_1 اور β_2 حاصل کریں۔ ب) Γ اور τ حاصل کریں۔ پ) $E_1(t)$ اور $E_2(t)$ حاصل کریں۔ ت) $H_1(t)$ حاصل کریں۔ ٹ) لمحہ $t = 4 \text{ ns}$ پر نقطہ $(0, 0, -1.5)$ پہ H_1 حاصل کریں۔

جوابات: $\Gamma = -0.0913$ ، $\beta_2 = 7.8 \frac{rad}{m}$ ، $\beta_1 = 2.5 \frac{rad}{m}$ ، $Z_2 = 175 \Omega$ ، $Z_1 = 211 \Omega$ ، $\tau = 0.9087$ ، $E_1 = 5.6 \cos(4.2 \times 10^8 t - 2.5z) - 0.511 \cos(4.2 \times 10^8 t + 2.5z) \frac{V}{m}$ ، $E_2 = 5.09 \cos(4.2 \times 10^8 t - 7.8z) \frac{V}{m}$ ، $H_1 = 26.59 \cos(4.2 \times 10^8 t - 2.5z) + 2.43 \cos(4.2 \times 10^8 t + 2.5z) \frac{mA}{m}$ ، $H_1 = 16.49 \frac{mA}{m}$

سوال 10.26: تھیلا بنانے والے پلاسٹک میں 14 GHz تعدد کی مستوی موج a_x سمت میں حرکت کرتے ہوئے $x = 0.3 \text{ cm}$ پر پائے جانے والے کامل موصل سطح سے انعکاس پذیر ہوتی ہے۔ الف) وہ سطحیں دریافت کریں جن پر $E = 0$ ہوگا۔ ب) اس پلاسٹک میں بلند تر برقی چوٹی اور بلند تر مقناطیسی چوٹی کی شرح حاصل کریں۔

جوابات: $Z = 251 \Omega$ ، جہاں $n = 0, 1, 2, \dots$ ہے، $x = 0.3 - 0.71n \text{ cm}$

سوال 10.27: خطہ $z < 0$ بے ضیاع خالی خلاء ہے جبکہ ضیاع کار خطہ $z > 0$ کے مستقل $\epsilon = 30 \frac{PF}{m}$ اور $\mu = 4.2 \frac{\mu H}{m}$ ، $\sigma = 4.6 \frac{mS}{m}$ ہیں۔ خالی خلاء سے سرحد پر آمدی موج کی مساوات $E_{x1}^+ = 340 e^{-\alpha_1 z} \cos(2 \times 10^8 t - \beta_1 z) \frac{V}{m}$ ہے۔ الف) α_1 اور β_1 حاصل کریں۔ ب) انعکاسی مستقل حاصل کریں۔ پ) انعکاسی موج E_{x1}^- کی مساوات حاصل کریں۔ ت) ترسیلی موج E_{x2}^+ کی مساوات حاصل کریں۔

جوابت: $\alpha_1 = 0$ ، $\beta_1 = 0.667 \frac{\text{rad}}{\text{m}}$ ، $\Gamma = 0.176/111^\circ$ ، $E_{x1}^- = 59.8 \cos(2 \times 10^8 t + \dots)$
 $E_{x2}^+ = 324e^{-0.81z} \cos(2 \times 10^8 t - 2.39z + 9.9^\circ) \frac{\text{V}}{\text{m}}$ ، $(0.667z + 111^\circ) \frac{\text{V}}{\text{m}}$

سوال 10.28: المونیم کی سطح $y = 0$ پر خالی خلاء سے عمودی آمدی موج $E_{x1}^+ = E_{x10}^+ \cos(4 \times 10^8 t - \dots)$
 $\beta y) \frac{\text{V}}{\text{m}}$ ہے۔ آمدی طاقت کا کتنا فی صد سطح سے انعکاس پذیر ہوتا ہے۔

جواب: 99.997%

سوال 10.29: مستوی موج خطہ-1 سے خطہ-2 پر عمودی پڑتی ہے۔ ان خطوں کے مستقل $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ ،
 $\epsilon_{R1} = \mu_{R1}^3$ اور $\epsilon_{R2} = \mu_{R2}^3$ ہیں۔ آمدی طاقت کا 40% سرحد سے واپس لوٹتا ہے۔ $\frac{\mu_{R2}}{\mu_{R1}}$ حاصل
 کریں۔

جوابت: $\frac{\mu_{R2}}{\mu_{R1}} = 0.225$ اور $\frac{\mu_{R2}}{\mu_{R1}} = 4.442$

سوال 10.30: خالی خلاء سے مستوی موج ضیاع کار خطہ $\mu_R = 1.8$ اور $\epsilon_R = 8.2$ ، $\sigma = 0.002 \frac{\text{S}}{\text{m}}$
 پر عمودی پڑتی ہے۔ آمد موج کی تعدد 100 MHz اور کثافت طاقت $12 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$ ہے۔ الف) ابتدائی تریسلی کثافت
 طاقت حاصل کریں۔ ب) ضیاع کار خطے میں کی قیمت حاصل کریں۔ پ) دوسرے خطے میں کتنا فاصلہ طے کرنے
 کے بعد تریسلی کثافت طاقت $0.2 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$ رہ جائے گی۔

جوابت: $10.42 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$ ، $\alpha_2 = 0.1765 \frac{\text{Np}}{\text{m}}$ ، 11.2 m

سوال 10.31: خالی خلاء $z < 0$ میں برقی موج $E_s = 100e^{-j15z} a_y + 28/30^\circ e^{j15z} a_y \frac{\text{V}}{\text{m}}$ پائی جاتی
 ہے۔ الف) موج کی تعدد حاصل کریں۔ ب) خطہ $z > 0$ کی قدرتی رکاوٹ حاصل کریں۔ پ) دو خطوں کے
 سرحد کے قریب کس مقام پر برقی موج کی چوٹی پائی جاتی ہے؟

جوابت: 715.7 MHz ، $Z = 585 + j178 \Omega$ ، $z = -1.75 \text{ cm}$

سوال 10.32: بے ضیاع خطہ $z < 0$ کے مستقل $\sigma_1 = 0$ ، $\mu_1 = 30 \frac{\mu\text{H}}{\text{m}}$ اور $\epsilon_1 = 120 \frac{\text{pF}}{\text{m}}$
 ہیں جبکہ ضیاع کار خطہ $z > 0$ کے مستقل $\sigma_1 = 0.02 \frac{\text{S}}{\text{m}}$ اور $\mu_1 = 50 \frac{\mu\text{H}}{\text{m}}$ ، $\epsilon_1 = 260 \frac{\text{pF}}{\text{m}}$
 ہیں۔ آمدی موج $E_s = 10e^{-\alpha_1 z} \cos(9 \times 10^8 t - \beta_1 z) \frac{\text{V}}{\text{m}}$ ہے۔ الف) α_1 اور β_1 حاصل کریں۔
 ب) اوسط \mathcal{P}_{1+} اور اوسط \mathcal{P}_{1-} حاصل کریں۔ پ) اوسط \mathcal{P}_{2+} کی مساوات حاصل کریں۔

جوابت: $\mathcal{P}_{1\text{وسط}}^- = -0.486a_z \frac{\text{mW}}{\text{m}^2}$ ، $\mathcal{P}_{1\text{وسط}}^+ = 100a_z \frac{\text{mW}}{\text{m}^2}$ ، $\beta_1 = 54 \frac{\text{rad}}{\text{m}}$ ، $\alpha_1 = 0 \frac{\text{Np}}{\text{m}}$ ،

$$\mathcal{P}_{2\text{وسط}}^+ = 99.514e^{-8.76z} a_z \frac{\text{mW}}{\text{m}^2}$$

سوال 10.33: خطہ $0 < z < 1.5 \text{ m}$ میں بے ضیاع ذو برق پایا جاتا ہے جس کے مستقل $\sigma_2 = 0$ ، $\mu_{R2} = 1$ اور $\epsilon_{R2} = 6$ ہیں۔ اس خطے کو دونوں جانب خالی خلاء پائی جاتی ہے۔ مستوی موج جس کی تعدد $\omega = 6 \times 10^8 \frac{\text{rad}}{\text{m}}$ ہے سرحد $z = 0$ کی جانب a_z سمت میں حرکت کر رہی ہے۔ الف) ذو برق میں β_2 حاصل کرتے ہوئے سرحد $z = 0$ پر داخل Z حاصل کریں۔ ب) خطہ $z < 0$ میں Γ_1 اور s_1 حاصل کریں۔ پ) ذو برقی میں $z = 1.5 \text{ m}$ پر سرحد سے منعکس موج کو استعمال کرتے ہوئے Γ_2 اور s_2 حاصل کریں۔ ت) خطہ $z > 1.5 \text{ m}$ میں s_3 حاصل کریں۔ ٹ) خطہ $z < 0$ میں سرحد کے قریب ترین ایسا نقطہ حاصل کریں جہاں بلند تر برقی میدان پایا جاتا ہے۔

جوابت: $Z_{\text{داخل}} = 77.69 - j66.76 \Omega$ ، $\beta_2 = 2 \frac{\text{rad}}{\text{m}}$ ،

$$\Gamma_1 = -0.623 - j0.238 = 0.667e^{-j2.776}$$

$$z = -0.924 \text{ m} ، s_3 = 1 ، s_2 = 2.45 ، \Gamma_2 = 0.42 ، s_1 = 5$$

سوال 10.34: ضیاع کار خطہ جہاں $\alpha = 0.4 \frac{\text{Np}}{\text{m}}$ ہو میں موج 100 m چلنے کے بعد سرحد سے منعکس ہو کر واپس اسی ابتدائی نقطے تک پہنچتی ہے۔ انعکاسی مستقل $\Gamma = 0.4 - j0.5$ ہے۔ واپس آتی موج اور ابتدائی موج کے طاقت کی شرح حاصل کریں۔

جواب: 1.33×10^{-70}

سوال 10.35: خطہ $z < 0$ اور خطہ $z > 0$ کامل ذو برق پر مشتمل ہیں جہاں $\sigma = 0$ اور $\mu_R = 1$ ہیں۔ تعدد $2 \times 10^{10} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ کی موج a_z سمت میں حرکت کرتے ہوئے دونوں خطوں سے گزرتی ہے۔ ان خطوں میں طول موج بالترتیب 8 cm اور 6 cm ہیں۔ الف) Γ حاصل کریں۔ ب) کتنی فی صد طاقت منعکس پذیر ہوتی ہے۔ پ) کتنی فی صد طاقت ترسیل ہوتی ہے۔ ت) شرح ساکن موج s حاصل کریں۔

جوابت: $\Gamma = 0.143e^{j\pi}$ ، 2.04% ، 97.96% ، $s = 1.333$

سوال 10.36: کامل ذو برقی $\sigma = 0$ سے خالی خلاء میں موج داخل ہوتی ہے۔ مندرجہ ذیل صورتوں میں ذو برق کی جزوی برقی مستقل ϵ_R حاصل کریں۔ الف) منعکس موج کی چوٹی آمدی موج کے چوٹی کی آدھی ہے۔ ب) منعکس موج کا طاقت آمدی موج کے طاقت کا آدھا ہے۔ پ) ذو برقی میں سمٹر $|E|$ کی قیمت بلندتر $|E|$ کی آدھی ہے۔

جوابات: $\epsilon_R = 4$ ، $\epsilon_R = 34$ ، $\epsilon_R = 9$

سوال 10.37: ایک ایسا خطہ جس کے مستقل ہمیں معلوم نہیں ہیں پر خالی خلاء سے 330 MHz تعدد کی موج پڑتی ہے۔ خالی خلاء میں سرحد کے قریب $s = 3$ حاصل ہوتا ہے جبکہ موج کی پہلی کمتر قیمت سرحد سے 0.3λ فاصلے پر پائی جاتی ہے۔ انعکاسی مستقل کا زاویہ ϕ اور اس کی حتمی قیمت $|\Gamma|$ حاصل کرتے ہوئے خطے کی قدرتی رکاوٹ حاصل کریں۔

جوابات: $Z = 641 + j501 \Omega$ ، $|\Gamma| = 0.5$ ، $\phi = 0.2\pi$

سوال 10.38: سمندری پانی کے مستقل $\sigma = 5 \frac{S}{m}$ اور $\epsilon_R = 78$ ہیں۔ خالی خلاء سے اس پر 100 MHz تعدد کی موج پڑتی ہے۔ آمدی طاقت کا کتنا حصہ واپس خلاء میں لوٹتا ہے۔

جواب: 90.7%

سوال 10.39: خالی خلاء میں 242Ω قدرتی رکاوٹ کی $\frac{\lambda}{8}$ موٹی تہہ پائی جاتی ہے۔ آمدی طاقت کا کتنا حصہ اس تہہ سے گزر پاتا ہے؟

جوابات: $Z_{داخلی} = 220 - j101 \Omega$ ، $\Gamma = 0.308 / -2.4 \text{ rad}$ ، 91%

سوال 10.40: آمدی موج کی تعدد تبدیل کئے بغیر سوال 10.39 کو مندرجہ ذیل صورتوں میں دوبارہ حل کریں۔
الف) تہہ کی موٹائی دگنی کر دی جاتی ہے۔ ب) تہہ کی موٹائی آدھی کر دی جاتی ہے۔ پ) تہہ کی موٹائی چار گنا کر دی جاتی ہے۔

جوابات: 82.7% ، 97% ، 100%

سوال 10.41: مستوی موج کا برقی جزو $E_s = 10e^{-j\beta x} a_z + 15e^{-j\beta x} a_y \frac{V}{m}$ ہے۔ الف) اس موج کی قطبیت دریافت کریں ب) H_s حاصل کریں۔ پ) اوسط \mathcal{P} حاصل کریں۔

جوابات: الف) موج خطی قطبی ہے۔ یہ موج yz سطح میں رہتے ہوئے y محور کے ساتھ 33.7° زاویہ بناتی ہے۔

ب) $H_s = -26.5e^{-j\beta x} a_y + 39.8e^{-j\beta x} a_z \frac{mA}{m}$ ؛ پ) $\mathcal{P}_{اوسط} = 0.43 a_x \frac{W}{m^2}$

سوال 10.42: بائیں قطبی $E_s = E_0(a_x + ja_y)e^{-j\beta z}$ دی گئی ہے۔ الف) H_s دریافت کریں۔ ب) اوسط \mathcal{P} حاصل کریں۔

جوابات: $\mathcal{P}_{\text{اوسط}} = \frac{E_0^2}{Z_0} \mathbf{a}_z \frac{W}{m^2}$ ، $\mathbf{H}_s = \frac{E_0}{Z_0} (\mathbf{a}_y - j\mathbf{a}_x) e^{-j\beta z}$

سوال 10.43: مستوی برقی موج $\mathbf{E}_s = 10(\mathbf{a}_z + j\mathbf{a}_x) e^{-j50y}$ ہے۔ الف) تعدد حاصل کریں۔ ب) مقناطیسی موج حاصل کریں۔ پ) $\mathcal{P}_{\text{اوسط}}$ حاصل کریں۔ ت) موج کی قطبیت دریافت کریں

جوابات: 2.39 GHz ، $\mathbf{H}_s = \frac{10}{377} (\mathbf{a}_x - j\mathbf{a}_z) e^{-j50y}$ ، $\mathcal{P}_{\text{اوسط}} = 0.27 \mathbf{a}_y \frac{W}{m^2}$ ، بائیں قطبی

سوال 10.44: برقی موج $\mathbf{E}_s = 15e^{-j\beta z} \mathbf{a}_x + 18e^{-j\beta z} \mathbf{a}_y \frac{V}{m}$ ایسے خطے سے گزرتی ہے جس کی قدرتی رکاوٹ Z مخلوط عدد ہے۔ الف) \mathbf{H}_s حاصل کریں۔ ب) $\mathcal{P}_{\text{اوسط}}$ حاصل کریں۔

جوابات: $\mathcal{P}_{\text{اوسط}} = \frac{275}{Z^*} |$ حقیقی ، $\mathbf{H}_s = \frac{1}{Z} (-18e^{j\phi} \mathbf{a}_x + 15\mathbf{a}_y) e^{-j\beta z} \frac{A}{m}$

سوال 10.45: شیشے کی چادر کے بائیں سطح پر موج عمودی آمد ہے۔ شیشے کی انعطافی مستقل $n = 1.45$ ہے جبکہ اس کی دائیں سطح کامل موصل کے ساتھ جڑی ہے۔ شیشے کی موٹائی $\frac{\lambda}{2}$ ، $\frac{\lambda}{4}$ اور $\frac{\lambda}{8}$ ہونے کی صورت میں بائیں سطح پر انعکاسی موج کے زاویے میں فرق دریافت کریں۔

جوابات: 0° ، 71° ، -69.2°

سوال 10.46: برقی موج کی دوری سمتی مساوات $\mathbf{E}_s = (5\mathbf{a}_x + j20\mathbf{a}_y) e^{j\beta z}$ ہے۔ اس کی قطبیت، شرح رداس اور جھکاؤ دریافت کریں۔

جواب: دایاں بیضوی قطبی موج۔ شرح رداس 4 ہے۔ جھکاؤ 90° ہے۔

سوال 10.47: برقی موج $\mathbf{E} = (3\angle -15^\circ \mathbf{a}_x - 4\angle 30^\circ \mathbf{a}_y) e^{j\beta z}$ کی حقیقی مساوات حاصل کرتے ہوئے اس کی قطبیت دریافت کریں۔

جوابات: $\mathbf{E} = 3\mathbf{a}_x \cos(\omega t + \beta z - 15^\circ) - 4\mathbf{a}_y \cos(\omega t + \beta z + 30^\circ)$ ، دایاں بیضوی قطبی

سوال 10.48: مثال 10.12 کے طرز پر بائیں دائری قطبی موج کی مساوات حاصل کریں جسے مساوات 10.142 میں پیش کیا گیا ہے۔

باب 11

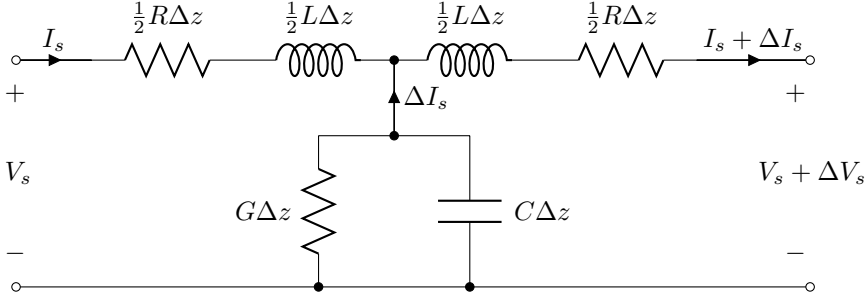
ترسیلی تار

ترسیلی تار ایک نقطے سے دوسرے نقطے تک توانائی اور اشارات منتقل کرتے ہیں۔ بالکل سادہ صورت میں ترسیلی تار منبع طاقت کو برقی بوجھ کے ساتھ منسلک کرتا ہے۔ یہ موسل (ٹرانسمیٹر)¹ اور اینٹینا² یا پھر ڈیم میں نسب جزیئر اور اس سے دور کسی شہر کا برقی بوجھ ہو سکتے ہیں۔

مستوی برقی و مقناطیسی امواج عرضی امواج ہیں۔ ترسیلی تار پر بھی عرضی امواج ہی پائی جاتی ہیں۔ ہم دیکھیں گے کہ اس مشابہت کی بنا پر برقی و مقناطیسی امواج کے لئے حاصل کردہ مساوات ترسیلی تار کے لئے بھی قابل استعمال ہوں گے البتہ ترسیلی نظام میں برقی اور مقناطیسی میدان کے بجائے عموماً برقی دباؤ اور برقی رو کی استعمال کئے جاتے ہیں۔ اسی طرح کشاف طاقت کی جگہ طاقت کی بات کی جاتی ہے۔

اس باب میں ترسیلی تجزیے پر خاص زور دیا جائے گا جو عرضی برقی و مقناطیسی مستوی امواج کے لئے بھی قابل استعمال ہو گا۔

transmitter¹
antenna²



شکل 11.1: یکساں ترسیلی تار کا چھوٹا حصہ۔ متغیرات R, L, C اور G تار کی شکل اور مادوں پر منحصر ہیں۔

11.1 ترسیلی تار کے مساوات

ہم ترسیلی تار کی عمومی مساوات حاصل کرنے کی خاطر ہم محوری تار کو ذہن میں رکھ کر آگے چلتے ہیں۔ یہ تار z محور پر پڑی ہے۔ ہم محوری تار کے اندرونی اور بیرونی موصل تار بہتر موصلیت σ_c رکھتے ہیں۔ ان تاروں کے درمیان مادے کے مستقل μ, ϵ (عموماً μ_0) اور σ ہیں۔ ہم محوری تار کی جسامت اور اشارات کی تعدد جانتے ہوئے ہم اکائی لمبائی تار کے مستقل R, L, C اور G حاصل کر سکتے ہیں۔

یہاں بھی ہم موج کی حرکت az جانب تصور کرتے ہیں۔ یوں تار کے چھوٹی لمبائی Δz کی مزاحمت $R\Delta z$ ، امالہ $L\Delta z$ ، برقی گنجائش $C\Delta z$ اور ایصالیت $G\Delta z$ ہوں گے۔ شکل 11.1 میں ترسیلی تار کے اس چھوٹے لمبائی کو دکھایا گیا ہے۔ چونکہ تار کا یہ چھوٹا ٹکڑا دونوں اطراف سے بالکل ایک جیسے معلوم ہوتا ہے لہذا اس کے سلسلہ وار اجزاء کو آدھے آدھے ٹکڑوں میں کرتے ہوئے متوازی اجزاء کے دونوں طرف دکھایا گیا ہے۔ ہم متوازی اجزاء کو دو برابر ٹکڑوں میں کرتے ہوئے سلسلہ وار اجزاء کے دونوں جانب بھی جوڑ سکتے تھے۔

ہم فرض کرتے ہیں کہ شکل 11.1 میں بائیں طرف برقی دباؤ

$$V = V_0 \cos(\omega t - \beta z + \psi)$$

پائی جاتی ہے۔ یہ حرکت کرتے موج کی عمومی مساوات ہے۔ پولر مماثل استعمال کرتے ہوئے اس مساوات کو

$$V = [V_0 e^{i(\omega t - \beta z + \psi)}]_{\text{حقیقی}}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس مساوات میں $e^{j\omega t}$ اور زیر نوشت میں حقیقی کو پوشیدہ رکھتے ہوئے دوری سمتیہ کی صورت میں یوں لکھا جاسکتا ہے

$$V_s = V_0 e^{j\psi} e^{-\beta z}$$

جہاں مساوات کے بائیں ہاتھ V_s لکھتے ہوئے زیر نوشت میں s یاد دلاتی ہے کہ یہ مساوات دوری سمتیہ کی شکل میں ہے۔

شکل 11.1 کے گرد گھومتے ہوئے کرخوف کے برقی دباؤ کے قانون سے

$$V_s = \left(\frac{R\Delta z}{2} + j\frac{\omega L\Delta z}{2} \right) I_s + \left(\frac{R\Delta z}{2} + j\frac{\omega L\Delta z}{2} \right) (I_s + \Delta I_s) + V_s + \Delta V_s$$

یا

$$\frac{\Delta V_s}{\Delta z} = - (R + j\omega L) I_s - \frac{1}{2} (R + j\omega L) \Delta I_s$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اگر Δz کو صفر کے قریب تر کیا جائے تب ΔI_s بھی صفر کے قریب تر ہوگا۔ یوں $\Delta z \rightarrow 0$ کی صورت میں اس مساوات کے آخری جزو کو نظر انداز کیا جاسکتا ہے۔ یوں اسے

$$(11.1) \quad \frac{dV_s}{dz} = - (R + j\omega L) I_s$$

لکھا جاسکتا ہے۔

متوازی اجزاء پر برقی دباؤ

$$V_s - \left(\frac{R\Delta z}{2} + j\frac{\omega L\Delta z}{2} \right) I_s$$

ہے جسے استعمال کرتے ہوئے شکل کو دیکھ کر متوازی اجزاء میں تفرقی رو کے لئے

$$-\Delta I_s = \left[V_s - \left(\frac{R\Delta z}{2} + j\frac{\omega L\Delta z}{2} \right) I_s \right] (G\Delta z + j\omega C\Delta z)$$

یا

$$\frac{\Delta I_s}{\Delta z} = - (G + j\omega C) V_s + \frac{1}{2} (R + j\omega L) (G + j\omega C) I_s \Delta z$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اگر $\Delta z \rightarrow 0$ کیا جائے تب اس مساوات کے آخری جزو کو نظر انداز کیا جاسکتا ہے اور یوں

$$(11.2) \quad \frac{dI_s}{dz} = - (G + j\omega C) V_s$$

حاصل ہوتا ہے۔

یہاں رک کر ذرا برقی و مقناطیسی امواج کے مساوات کو دوبارہ پیش کرتے ہیں۔ میکس ویل کی مساوات

$$\nabla \times \mathbf{E}_s = -j\omega\mu\mathbf{H}_s$$

میں $\mathbf{E}_s = E_{xs}\mathbf{a}_x$ اور $\mathbf{H}_s = H_{ys}\mathbf{a}_y$ پر کرنے سے

$$(11.3) \quad \frac{dE_{xs}}{dz} = -j\omega\mu H_{ys}$$

ملتا ہے اور اسی طرح

$$\nabla \times \mathbf{H}_s = (\sigma + j\omega\epsilon) \mathbf{E}_s$$

سے

$$(11.4) \quad \frac{dH_{ys}}{dz} = - (\sigma + j\omega\epsilon) E_{xs}$$

ملتا ہے۔

مساوات 11.2 کا مساوات 11.4 کے ساتھ موازنہ کریں۔ غور کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ پہلے مساوات میں I_s کی جگہ H_{ys} لکھنے اور اسی طرح G کی جگہ σ ، C کی جگہ ϵ اور V_s کی جگہ E_{xs} لکھتے ہوئے دوسری مساوات حاصل کی جاسکتی ہے۔ دونوں مساوات بہت قریبی مشابہت رکھتے ہیں۔

اسی طرح مساوات 11.1 اور مساوات 11.3 کو دیکھتے ہوئے یہی جوڑے یہاں بھی پائے جاتے ہیں، البتہ یہاں L اور μ کی جوڑی بھی پائی جاتی ہے۔ ہاں ظاہری طور پر R کی جوڑی موجود نہیں ہے۔ یوں ہم $j\omega\mu$ کی جوڑی $R + j\omega L$ لے سکتے ہیں۔

لامحدود یکساں مستوی امواج اور لامحدود لمبائی کی یکساں ترسیلی تار کے سرحدی شرائط ایک جیسے ہیں۔ دونوں میں سرحد پایا ہی نہیں جاتا لہذا ہم گزشتہ باب میں حاصل حل

$$E_{xs} = E_{x0}e^{-\gamma z}$$

کی طرز پر اب

$$(11.5) \quad V_s = V_0 e^{-\gamma z}$$

بطور ترسیلی تار کے مساوات کا حل لکھ سکتے ہیں۔ یہ برقی دباؤ کے موج کی مساوات ہے۔ یہ موج مثبت z جانب حرکت کر رہی ہے اور $z = 0$ پر اس کا جیٹہ V_0 ہے۔ مساوات 10.12 میں دیا گیا حرکی مستقل

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)}$$

ترسیلی تار کے لئے

$$(11.6) \quad \gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)}$$

لکھا جائے گا۔ طول موج اب بھی

$$(11.7) \quad \lambda = \frac{2\pi}{\beta}$$

ہو گا۔ موج کی رفتار اب بھی

$$(11.8) \quad v = \frac{\omega}{\beta}$$

ہے۔

کامل ترسیلی تار طاقت ضائع نہیں کرتا۔ ایسی تار کے مستقل $R = G = 0$ ہوتے ہیں لہذا

$$\gamma = j\beta = j\omega\sqrt{LC}$$

اور

$$(11.9) \quad v = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

ہوں گے۔

اسی طرح مقناطیسی موج

$$H_{ys} = \frac{E_{x0}}{Z_0} e^{-\gamma z}$$

سے

$$(11.10) \quad I_s = \frac{V_0}{Z_0} e^{-\gamma z}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ ترسیلی تار کی قدرتی رکاوٹ Z_0 کو مستوی موج کی قدرتی رکاوٹ یعنی مساوات 10.31

$$Z = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}}$$

سے

$$(11.11) \quad Z_0 = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}}$$

لکھا جاسکتا ہے۔

خطہ-1 میں آمدی موج جب خطہ-2 کے سرحد سے ٹکراتی ہے تو اس کا کچھ حصہ بطور انعکاسی موج خطہ-1 میں واپس ہو جاتی ہے۔ اس انعکاسی موج اور آمدی موج کی شرح کو شرح انعکاس کہتے ہیں۔ مستوی موج کی شرح انعکاس مساوات 10.83

$$\Gamma = \frac{E_{x0}^-}{E_{x0}^+} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}$$

دیتی ہے۔ اسی طرح اگر Z_{01} قدرتی رکاوٹ کی ترسیلی تار پر آمد موج Z_{02} قدرتی رکاوٹ کی ترسیلی تار میں داخل ہونا چاہے تو ان کے سرحد سے انعکاسی موج واپس ہوگی۔ ایسی انعکاسی موج اور آمدی موج کی شرح

$$(11.12) \quad \Gamma = \frac{V_0^-}{V_0^+} = \frac{Z_{02} - Z_{01}}{Z_{02} + Z_{01}}$$

ہوگی۔ انعکاسی شرح جانتے ہوئے شرح ساکن موج

$$(11.13) \quad s = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|}$$

لکھی جاسکتی ہے۔ آخر میں اگر $z > 0$ پر $Z = Z_2$ ہو تب $z = -l$ پر E_{xs} اور H_{ys} کی شرح

$$Z_{داخلی} = Z_1 \frac{Z_2 + jZ_1 \tan \beta_1 l}{Z_1 + jZ_2 \tan \beta_1 l}$$

کو داخلی قدرتی رکاوٹ کہتے ہیں۔ اس سے $z > 0$ پر Z_{02} کی صورت میں ترسیلی تار کے لئے $z = -l$ پر V_s اور I_s کی شرح، یعنی اس کی داخلی قدرتی رکاوٹ کو

$$(11.14) \quad Z_{\text{داخلی}} = Z_{01} \frac{Z_{02} + jZ_{01} \tan \beta_1 l}{Z_{01} + jZ_{02} \tan \beta_1 l}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ یہاں سے ہم غیر ضروری علامت لکھنے سے گریز کرتے ہوئے Z_{01} کو عموماً Z_1 اور Z_{02} کو عموماً Z_2 لکھیں گے۔

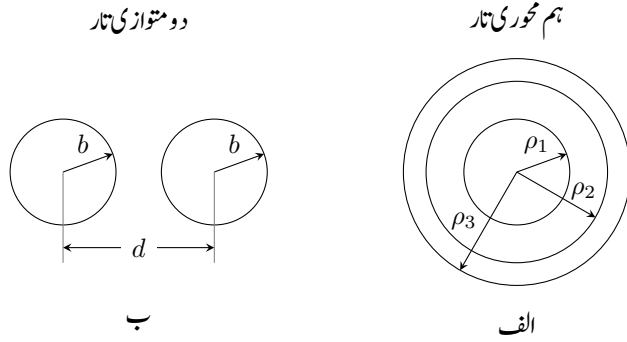
محدود لمبائی کے ترسیلی تار میں لمحہ $t = 0$ پر داخلی سرے سے اختتامی سرے کی جانب امواج روانہ ہوتی ہیں۔ ان امواج کا کچھ حصہ اختتامی سرے پر نسب برقی بوجھ سے انعکاس پذیر ہو کر واپس لوٹیں گی۔ اب تار میں آمدی موج کے ساتھ ساتھ انعکاسی امواج بھی پائی جائیں گی۔ انعکاسی موج ترسیلی تار کے داخلی سرے پر پہنچ کر یہاں سے منعکس ہوں گی۔ یوں تار میں اب اصل آمدی موج کے ساتھ ساتھ دو مرتبہ انعکاس پذیر امواج بھی اختتامی جانب رواں ہوں گی۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ جلد ہی ترسیلی تار کے دونوں سروں سے بار بار منعکس، لامحدود تعداد کے امواج تار میں پائے جائیں گے۔ بجائے یہ کہ ہم تار میں ہر موج پر نظر رکھیں، ہم داخلی جانب سے اختتامی جانب رواں تمام امواج کے مجموعے کو آمدی موج تصور کرتے ہیں۔ اسی طرح اختتامی جانب سے داخلی جانب تمام امواج کے مجموعے کو انعکاسی موج تصور کیا جاتا ہے۔ ایسی ہی تصور کرتے ہوئے مساوات 11.14 حاصل کیا گیا ہے۔

مشق 11.1: ایک ترسیلی تار کے مستقل $R = 0.15 \frac{\Omega}{\text{m}}$ ، $L = 0.25 \frac{\mu\text{H}}{\text{m}}$ ، $G = 8 \frac{\mu\text{S}}{\text{m}}$ اور $C = 80 \frac{\text{pF}}{\text{m}}$ ہیں۔
تعداد $\omega = 5 \times 10^8 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ پر α ، β ، λ اور v اور Z_0 حاصل کریں۔

جوابات: $1.57 \frac{\text{Np}}{\text{m}}$ ، $2.236 \frac{\text{rad}}{\text{m}}$ ، 2.81 m اور $2.23 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ اور $\Omega / -0.029^\circ$

11.2 ترسیلی تار کے مستقل

اس حصے میں مختلف اشکال کے ترسیلی تار کے مستقل کیجا کرتے ہیں۔ ان میں سے عموماً مستقل کو ہم پہلے حاصل کر چکے ہیں، بس انہیں ایک جگہ لکھنا باقی ہو گا۔ سب سے پہلے ہم محوری تار کے مستقل اکٹھے کرتے ہیں۔



شکل 11.2: ہم محوری ترسیلی تار اور دو متوازی ترسیلی تار۔

11.2.1 ہم محوری تار کے مستقل

شکل 11.2-الف میں ہم محوری تار دکھائی گئی ہے جس میں اندرونی تار کا رداس ρ_1 ہے۔ بیرونی تار کا اندرونی رداس ρ_2 اور اس کا بیرونی رداس ρ_3 ہیں۔ تاروں کے درمیان ذو برق کے مستقل ϵ ، μ اور σ ہیں۔ صفحہ 215 پر مساوات میں تار کی لمبائی $L = 1 \text{ m}$ پر کرنے سے اس کی فی میٹر برقی گنجائش

$$(11.15) \quad C = \frac{Q}{V} = \frac{2\pi\epsilon}{\ln \frac{\rho_2}{\rho_1}}$$

حاصل ہوتی ہے جبکہ فی میٹر امالہ صفحہ 384 پر مساوات 8.67 دیتا ہے۔

$$(11.16) \quad L_{\text{بیرونی}} = \frac{\mu I}{2\pi} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

یہ تار کی بیرونی امالہ ہے۔ بلند تعدد پر تار میں برقی رو صرف گہرائی جلد تک محدود رہتی ہے لہذا ایسی صورت میں تار کے اندر نہایت کم مقناطیسی بہاؤ پایا جاتا ہے اور یوں اس کی اندرونی امالہ قابل نظر انداز ہوتی ہے۔ کسی بھی ترسیلی تار کے لئے

$$(11.17) \quad L_{\text{بیرونی}} C = \mu\epsilon$$

درست ثابت ہوتا ہے۔ یوں دونوں ہم محوری تاروں کے درمیان میں بھری ذو برق کا ϵ اور فی میٹر تار کی برقی گنجائش جانتے ہوئے اندرونی امالہ اس مساوات سے حاصل کی جاسکتی ہے۔

کم تعدد پر تار کی اندرونی امالہ کو نظر انداز نہیں کیا جا سکتا۔ ایسی صورت میں مساوات 8.71

$$(11.18) \quad L = \frac{\mu I}{2\pi} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1} + \frac{\mu}{8\pi} + \frac{\mu}{2\pi (\rho_3^2 - \rho_2^2)^2} \left(\rho_3^4 \ln \frac{\rho_3}{\rho_2} - \frac{\rho_2^4}{4} - \frac{3\rho_3^4}{4} + \rho_2^2 \rho_3^2 \right)$$

میں دی گئی فی میٹر تار کی امالہ استعمال کی جائے گی۔ یاد رہے کہ یہ امالہ حاصل کرتے ہوئے فرض کیا گیا تھا کہ برقی رویکساں موصل تار میں گزرتی ہے۔ اب ہم جانتے ہیں کہ بلند تعدد پر رو صرف گہرائی جلد تک محدود رہتی ہے لہذا کم تعدد پر ہی اس امالہ کو استعمال کیا جا سکتا ہے۔

آئیں ایسی تعدد پر بھی صورت حال دیکھیں جب اندرونی امالہ کی قیمت قابل نظر انداز نہ ہو لیکن گہرائی جلد کے اثر کو بھی نظر انداز نہیں کیا جا سکتا۔ گہرائی جلد کے اثر کی وجہ سے مساوات 11.18 قابل قبول نہیں ہوگی۔ اب فرض کرتے ہیں کہ گہرائی جلد δ اندرونی تار کے رداس ρ_1 سے بہت کم ہے۔ یوں اندرونی تار کے بیرونی باریک تہہ میں برقی رو پائی جائے گی۔ برقی رو α_z سمت میں ہے اور چونکہ $J_s = \sigma_c E_s$ ہوتا ہے لہذا تار کی سطح پر E_s کا مماثل جزو بھی α_x سمت میں ہوگا۔ موصل تار کی موصلیت کو یہاں σ_c لکھا گیا ہے۔ مقناطیسی میدان کی شدت تار کی سطح پر

$$(11.19) \quad H_{\phi s} = \frac{I_s}{2\pi\rho_1}$$

ہوگی۔ اب تار کی سطح پر E_{zs} اور H_{ys} کی شرح، مستوی برقی و مقناطیسی موج کی قدرتی رکاوٹ ہوگی۔ اگرچہ ہم نکلے اشکال کی بات کر رہے ہیں لیکن $\rho_1 \ll \delta$ کی بنا پر برقی رو گزارتے باریک تہہ کو δ موٹائی اور $2\pi\rho_1$ چوڑائی کا موصل تصور کیا جا سکتا ہے۔ یوں صفحہ 478 پر مساوات 10.69 سے

$$\left. \frac{E_{zs}}{H_{ys}} \right|_{\rho_1} = \frac{1+j}{\sigma_c \delta}$$

لکھا جا سکتا ہے جس میں مساوات 11.19 پر کرنے سے

$$\left. \frac{E_{zs}}{I_s} \right|_{\rho_1} = \frac{1+j}{2\pi\rho_1\delta\sigma_c}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ چونکہ E_{zs} دراصل فی میٹر برقی دباؤ ہے لہذا مندرجہ بالا شرح فی میٹر قدرتی رکاوٹ

$$(11.20) \quad Z = \left. \frac{E_{zs}}{I_s} \right|_{\rho_1} = R + j\omega L = \frac{1}{2\pi\rho_1\delta\sigma_c} + j \frac{1}{2\pi\rho_1\delta\sigma_c}$$

کے برابر ہے۔ یہ امالہ تار کی اندرونی امالہ ہے جو تار کے موصلیت σ_c پر منحصر ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کامل موصل کی صورت میں قدرتی رکاوٹ صفر ہوگی۔ یوں اندرونی تار کی اندرونی امالہ

$$L_{\rho_1, \text{اندرونی}} = \frac{1}{2\pi\rho_1\delta\sigma_c\omega}$$

ہوگی۔ صفحہ 476 پر مساوات 10.66 کو $\sigma_c = \frac{1}{\pi f\mu\delta^2}$ لکھتے ہوئے اس میں پر کرنے سے

$$(11.21) \quad L_{\rho_1, \text{اندرونی}} = \frac{\mu\delta}{4\pi\rho_1} \quad (\delta \ll \rho_1)$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طریقہ کار سے بیرونی تار کے لئے

$$(11.22) \quad L_{\rho_2, \text{اندرونی}} = \frac{\mu\delta}{4\pi\rho_2} \quad (\delta \ll \rho_3 - \rho_2)$$

لکھا جا سکتا ہے۔ یوں بلند تعدد پر ہم محوری تار کی کل امالہ

$$(11.23) \quad L_{\text{بلند تعدد}} = \frac{\mu}{2\pi} \left[\ln \frac{\rho_2}{\rho_1} + \frac{\sigma_c}{2} \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right) \right] \quad (\delta \ll \rho_1, \delta \ll \rho_3 - \rho_2)$$

ہوگا۔ مساوات 11.20 بلند تعدد پر قدرتی رکاوٹ کا مزاحمتی حصہ یعنی فی میٹر مزاحمت بھی دیتا ہے جس سے اندرونی اور بیرونی تاروں کا سلسلہ وار مجموعہ

$$(11.24) \quad R = \frac{1}{2\pi\delta\sigma_c} \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right) \quad (\delta \ll \rho_1, \delta \ll \rho_3 - \rho_2)$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اس مزاحمت کے ساتھ شعاعی اخراج سے پیدا مزاحمتی جزو بھی شامل کیا جا سکتا ہے۔ بے پودہ³ تار یا ہم محوری تار کے کھلے سر سے شعاعی اخراج ہوتا ہے۔

ایسی تعدد جس پر گہرائی جلد کی قیمت رداس سے بہت کم نہ ہو حل کرتے ہوئے⁴ استعمال ہوتے ہیں۔ یہاں انہیں حل نہیں کیا جائے گا۔

قدرتی رکاوٹ کو عموماً بیرونی امالہ اور برقی گنجائش کی صورت میں

$$(11.25) \quad Z_0 = \sqrt{\frac{L_{\text{بیرونی}}}{C}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

لکھا جاتا ہے۔

اندرونی اور بیرونی تار کے مابین ذو برق میں سے گزرتی یک سمتی برقی رو $I = GV$ سے حاصل ہوتی ہے۔ اندرونی تار پر ρ_L اور بیرونی تار پر $-\rho_L$ کثافت لکیری بار تصور کرتے ہوئے تاروں کے مابین برقی دباؤ صفحہ 142 پر مساوات 4.18

$$V = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

دیتی ہے۔ تاروں کے درمیان ذو برق میں میدان مساوات 4.17

$$E_\rho = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon\rho}$$

دیتی ہے۔ ذو برق کی موصلیت σ لکھتے ہوئے، صفحہ 182 پر اوہم کے قانون کی نقطہ شکل یعنی مساوات 5.11 کی مدد سے یوں رداس ρ پر کثافت برقی رو

$$J_\rho = \sigma E_\rho = \frac{\sigma\rho_L}{2\pi\epsilon\rho}$$

لکھی جائے گی۔ اندرونی تار کے گرد رداس ρ پر L لمبائی کی نیکی سطح کا رقبہ $2\pi\rho L$ ہو گا۔ ایسی اکائی لمبائی کی سطح کے رقبہ $2\pi\rho$ سے کل

$$I = J_\rho 2\pi\rho = \frac{\sigma\rho_L}{\epsilon}$$

برقی رو گزرے گی۔ یوں

$$(11.26) \quad G = \frac{I}{V} = \frac{2\pi\sigma}{\ln \frac{\rho_2}{\rho_1}}$$

حاصل ہوتا ہے۔

یہاں G کی قیمت C کے قیمت سے حاصل کرنا دیکھتے ہیں۔ ایک تار سے دوسرے تار تک E کی لکیری کھلم سے برقی دباؤ V حاصل ہوتا ہے۔ صفحہ 189 پر مساوات 5.18 کے تحت کسی بھی موصل پر سطحی کثافت بار، سطح کے عمودی برقی بہاؤ کے برابر ہوتی ہے، یعنی عمودی $D = \rho_S$ ۔ یوں تار پر کل بار

$$Q = \int_S \rho_S dS = \epsilon \int_S E_{\text{عمودی}} dS$$

لکھی جاسکتی ہے جہاں S تار کا سطحی رقبہ ہے اور $D = \epsilon E$ لکھا گیا گا۔ یوں

$$(11.27) \quad C = \frac{Q}{V} = \frac{\epsilon \int_S E_{\text{عمودی}} dS}{V}$$

ہو گا۔ اب موصل کے سطح پر عمودی E جانتے ہوئے یہاں کثافت برقی رو عمودی $J = \sigma E$ لکھی جاسکتی ہے لہذا تار کے سطح سے خارج کل برقی رو

$$I = \sigma \int_S E_{\text{عمودی}} dS$$

ہو گی۔ یوں دو تاروں کے مابین ایصالیت

$$(11.28) \quad G = \frac{I}{V} = \frac{\sigma \int_S E_{\text{عمودی}} dS}{V}$$

ہو گی۔ مساوات 11.27 اور مساوات 11.28 کو دیکھ کر

$$(11.29) \quad G = \frac{\sigma}{\epsilon} C$$

لکھا جاسکتا ہے جو کسی بھی تریسلی تار کے لئے درست ہے

مشق 11.2: ایک ہم محوری تار جس کے $\rho_1 = 1 \text{ mm}$ ، $\rho_2 = 3.49 \text{ mm}$ اور $\sigma_c = 3.82 \times 10^7 \frac{\text{S}}{\text{m}}$ ہیں کے ذوق برق کے مستقل $\mu_R = 1$ ، $\epsilon_R = 2.25$ اور $\sigma = 10 \frac{\mu\text{S}}{\text{m}}$ ہیں۔ اس کی فی میٹر برقی گنجائش، بیرونی اور اندرونی امالہ حاصل کریں۔ تریسلی تار کے α ، β اور Z_0 بھی حاصل کریں۔

جوابات: $0.1 \frac{\text{nF}}{\text{m}}$ ، $0.25 \frac{\mu\text{H}}{\text{m}}$ ، $1.29 \frac{\text{nH}}{\text{m}}$ ، $0.014 \frac{\text{Np}}{\text{m}}$ ، $15.1 \frac{\text{rad}}{\text{m}}$ اور $50/0.055^\circ \Omega$

11.2.2 دو متوازی تار کے مستقل

شکل 11.2-ب میں دو متوازی ترسیلی تار دکھائی گئی ہے۔ تار کا رداس b ، تاروں کے مابین فاصلہ d جبکہ تار کی موصلیت σ_c ہے۔ تاروں کے گرد ذوبرق کے مستقل ϵ ، μ اور σ ہیں۔ اس تار کی برقی گنجائش صفحہ 222 پر مساوات 5.75 کی نصف ہوگی۔ اس کی وجہ وہیں پر مساوات کے نیچے سمجھائی گئی ہے۔ یوں فی میٹر تار کی برقی گنجائش

$$(11.30) \quad C = \frac{\pi\epsilon}{\cosh^{-1} \frac{d}{2b}}$$

ہوگی۔ اگر $d \ll b$ ہو تب مساوات 5.76 سے

$$C = \frac{\pi\epsilon}{\ln \frac{d}{b}} \quad (b \ll d)$$

لکھا جاسکتا ہے۔ مساوات 11.17 سے تار کی فی میٹر بیرونی امالہ

$$L_{\text{بیرونی}} = \frac{\mu}{\pi} \cosh^{-1} \frac{d}{2b}$$

یا

$$L_{\text{بیرونی}} = \frac{\mu}{\pi} \ln \frac{d}{b} \quad (b \ll d)$$

لکھی جاسکتی ہے جبکہ بلند تعدد پر فی میٹر کل امالہ

$$(11.31) \quad L_{\text{بلند تعدد}} = \frac{\mu}{\pi} \left(\frac{\delta}{2b} + \cosh^{-1} \frac{d}{2b} \right) \quad (\delta \ll b)$$

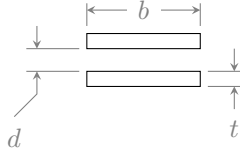
ہے۔ تار کی بیرونی δ تہہ برقی رو گزرتی ہے۔ اس تہہ کا رقبہ عمودی تراش $S = 2\pi b\delta$ ہے لہذا فی میٹر مزاحمت

$$(11.32) \quad R = \frac{l}{\sigma_c S} = \frac{1}{\pi b \delta \sigma_c}$$

ہوگی جہاں دونوں تاروں کی مزاحمت سلسلہ وار جڑے ہیں۔ مساوات 11.29 سے فی میٹر تار کی ایصالیت

$$(11.33) \quad G = \frac{\pi\sigma}{\cosh^{-1} \frac{d}{2b}}$$

حاصل ہوتی ہے۔



شکل 11.3: سطح مستوی تریسلی تار۔

بیرونی امالہ اور برقی گنجائش استعمال کرتے ہوئے قدرتی مزاحمت

$$(11.34) \quad Z_0 = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \cosh^{-1} \frac{d}{2b}$$

حاصل ہوتا ہے۔

11.2.3 سطح مستوی تریسلی تار

شکل 11.3 میں سطح مستوی تریسلی تار⁵ دکھایا گیا ہے جس میں b چوڑائی اور t موٹائی کے دو متوازی موصل چادر دکھائے گئے ہیں جن کے مابین فاصلہ d ہے۔ موصل چادر کی موصلیت σ_c جبکہ ارد گرد کے ذو برق کے مستقل ϵ ، μ اور σ ہیں۔

اگر $d \gg b$ ہو تب ان چادروں کی فی میٹر برقی گنجائش

$$(11.35) \quad C = \frac{\epsilon \text{ رقبہ}}{\text{فاصلہ}} = \frac{\epsilon b}{d}$$

ہو گی۔ یوں مساوات 11.17 سے فی میٹر بیرونی امالہ

$$(11.36) \quad L_{\text{بیرونی}} = \frac{\mu \epsilon}{C} = \frac{\mu d}{b}$$

ہو گی۔ امید کی جاتی ہے کہ آپ گہرائی جلد استعمال کرتے ہوئے اندرونی امالہ حاصل کر سکتے ہیں۔ یوں کل امالہ

$$(11.37) \quad L = \frac{\mu d}{b} + \frac{2}{\sigma_c \delta b w} = \frac{\mu}{b} (d + \delta) \quad (\delta \ll t)$$

ہو گی جہاں گہرائی جلد کو چادر کی موٹائی سے بہت کم تصور کیا گیا ہے۔

بلند تعدد پر برقی رو چادروں کے آمنے سامنے سطحوں پر گہرائی جلد تک محدود ہوگی۔ یوں برقی رو رقبہ $b\delta$ سے گزرے گی جس سے ایک تار کے اکائی لمبائی کی مزاحمت $\frac{1}{\sigma_c b \delta}$ حاصل ہوتی ہے۔ یوں اکائی لمبی تار کے دونوں حصوں کی سلسلہ وار جڑی کل مزاحمت

$$(11.38) \quad R = \frac{2}{\sigma_c b \delta} \quad (\delta \ll t)$$

ہوگی۔

مساوات 11.29 سے

$$(11.39) \quad G = \frac{\sigma b}{d}$$

لکھی جاسکتی ہے۔

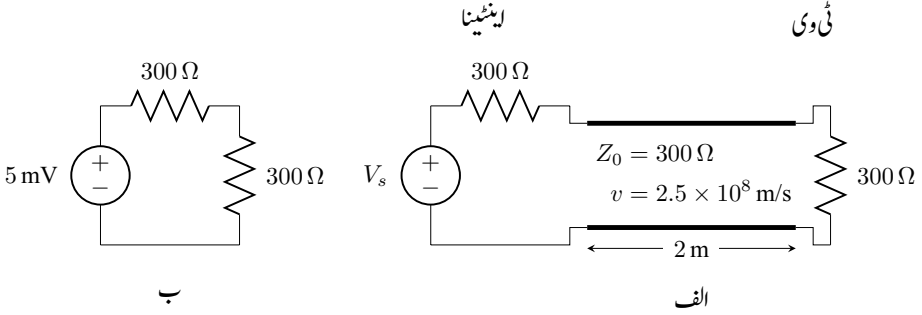
ان معلومات سے سطح مستوی ترسیلی تار کی قدرتی رکاوٹ

$$(11.40) \quad Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon} \frac{d}{b}}$$

لکھی جاسکتی ہے۔

مشق 11.3: مندرجہ بالا تینوں اقسام کے ترسیلی تار 400 MHz پر کام کر رہے ہیں۔ ان میں طاقت کے ضیاع کو نظر انداز کرتے ہوئے تمام کے لئے λ اور Γ حاصل کریں۔ ہم محوری تار کا $\rho_1 = 0.5 \text{ mm}$ ، $\rho_2 = 2.8 \text{ mm}$ ، $\mu_R = 1$ اور $\epsilon_R = 3.1$ ہیں۔ متوازی تار کے $b = 0.5 \text{ mm}$ ، $d = 9 \text{ mm}$ ، $\mu_R = 1$ اور $\epsilon_R = 5$ ہیں۔ مستوی سطح کے $b = 5 \text{ mm}$ ، $d = 0.2 \text{ mm}$ ، $\mu_R = 1$ اور $\epsilon_R = 2.2$ ہیں۔

جوابات: 0.816، 50.6 cm، -0.215، 33.5 cm، 0.26، 42.6 cm



شکل 11.4: ترسیلی تار اینٹینا کوئی وی سے جوڑی ہے۔

11.3 ترسیلی تار کے چند مثال

اس حصے میں گزشتہ حصوں کے نتائج استعمال کرتے ہوئے چند مثال کرتے ہیں۔ یہاں تمام ترسیلی تاروں کو بے ضیاع تار تصور کیا جائے گا۔

شروع دو متوازی ترسیلی تار سے کرتے ہیں جس کی قدرتی رکاوٹ 300Ω ہے۔ ایسی تار فی وی⁶ کے اینٹینا اور ٹی وی کے مابین لگائی جاتی ہے۔ شکل 11.4-الف میں اس طرح جوڑے ترسیلی نظام کو دکھایا گیا ہے۔ اینٹینا کا تھون 7 مساوی دور استعمال کیا گیا ہے جو ایک عدد منبع برقی دباؤ V_s اور اس کے ساتھ سلسلہ وار جڑی 300Ω کی مزاحمت پر مشتمل ہے۔ ترسیلی تار ٹی وی کے برقیاتی دور کے بالکل شروع میں نسب ابتدائی ایمپلی فائر سے جڑتی ہے جس کا داخلی مزاحمت 300Ω ہے۔ ٹی وی کو اسی مزاحمت سے ظاہر کیا گیا ہے۔ اس مثال میں ٹی وی بطور برقی بوجھ کردار ادا کرتا ہے۔ ٹی وی اسٹیشن سے خارج 100 MHz کے برقی و مقناطیسی امواج اس اینٹینا میں 5 mV کا اشارہ پیدا کرتی ہیں۔ ترسیلی تار کے مستقل ایسے ہیں کہ اس میں اشارات کی رفتار $2.5 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ہے۔

چونکہ برقی بوجھ کی مزاحمت اور ترسیلی تار کی قدرتی مزاحمت برابر ہیں لہذا ترسیلی تار اور برقی بوجھ ہمہ رکاوٹ ہیں۔ یوں برقی بوجھ پر انعکاس نہیں پایا جائے گا لہذا شرح انعکاس

$$\Gamma = \frac{300 - 300}{300 + 300} = 0$$

TV, television⁶
Thevenin⁷

صفر اور شرح ساکن موج

$$s = \frac{1 - |\Gamma|}{1 + |\Gamma|} = \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1$$

ایک کے برابر ہوں گے۔ اشارے کے تعدد پر تریسلی تار میں طول موج

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{2.5 \times 10^8}{100 \times 10^6} = 2.5 \text{ m}$$

اور زاویائی مستقل

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{2.5} = 0.8\pi \frac{\text{rad}}{\text{m}}$$

ہیں۔ تریسلی تار کی برقی لمبائی

$$\beta l = 0.8\pi \times 2 = 1.6\pi \text{ rad}$$

یا 288° ہے جسے 0.8 طول موج بھی کہا جاتا ہے۔

شکل 11.4-ب میں داخلی جانب کا صورت حال دکھایا گیا ہے۔ داخلی جانب چونکہ اینٹینا کی مزاحمت 300Ω ہے اور تریسلی تار کی قدرتی رکاوٹ بھی 300Ω ہے لہذا اینٹینا اور تریسلی تار ہمہ رکاوٹ ہیں۔ اینٹینا میں پیدا 5 mV کا اشارہ تریسلی تار کے قدرتی رکاوٹ پر

$$\frac{5 \times 10^{-3} \times 300}{300 + 300} = 2.5 \text{ mV}$$

پیدا کرے گا۔ اینٹینا اور تریسلی تار ہمہ رکاوٹ ہیں لہذا منبع طاقت V_s تریسلی تار میں زیادہ سے زیادہ طاقت بھیجے گا۔ تریسلی تار کے داخلی جانب پیدا 2.5 mV کا اشارہ تار میں سے گزرتے ہوئے برقی بوجھ تک پہنچے گا البتہ یہ داخلی اشارے سے 1.6π ریڈیئن پیچھے ہو گا۔ یوں اگر تریسلی تار کا داخلی اشارہ

$$V_{\text{داخلی}} = 2.5 \cos 2\pi 10^8 t \quad \text{mV}$$

ہو تب برقی بوجھ پر اشارہ

$$V_{\text{ب}} = 2.5 \cos(2\pi 10^8 t - 1.6\pi) \quad \text{mV}$$

ہو گا۔ داخلی برقی رو

$$I_{\text{داخلی}} = \frac{V_{\text{داخلی}}}{300} = 8.33 \cos 2\pi 10^8 t \quad \mu\text{A}$$

اور برقی بوجھ پر برقی رو

$$I_{\text{ب}} = \frac{V_{\text{داخلی}}}{300} = 8.33 \cos(2\pi 10^8 t - 1.6\pi) \quad \mu\text{A}$$

ہوں گے۔ چونکہ ترسیلی تار بے ضیاع تار ہے لہذا جو طاقت اسے داخلی جانب فراہم کی جاتی ہے وہی طاقت خارجی جانب برقی بوجھ کو مہیا کر دی جاتی ہے۔

$$P_{\text{داخلی}} = P_{\text{ب}} = V_{\text{موثر}} I_{\text{موثر}} = \frac{2.5 \times 10^{-3}}{\sqrt{2}} \times \frac{8.33 \times 10^{-6}}{\sqrt{2}} = 10.41 \text{ nW}$$

مزاحمتی بوجھ کی طاقت کا حساب لگاتے وقت یاد رہے کہ $P = VI$ میں برقی دباؤ اور برقی رو کے موثر⁸ قیمتیں استعمال کی جاتی ہیں۔ سائن نما موج کی موثر قیمت موج کی چوٹی تقسیم $\sqrt{2}$ کے برابر ہوتی ہے۔

اب پہلے ٹی وی کے متوازی دوسرا ٹی وی نسب کرنے کے اثرات پر غور کرتے ہیں۔ دوسرے ٹی وی کا داخلی مزاحمت بھی 300Ω ہے۔ یوں اب ترسیلی تار کے خارجی جانب کل 150Ω کا بوجھ پایا جاتا ہے۔ اس طرح شرح انعکاس

$$\Gamma = \frac{150 - 300}{150 + 300} = -\frac{1}{3}$$

یا

$$(11.41) \quad \Gamma = \frac{1}{3} \angle \pi$$

حاصل ہوتی ہے اور شرح ساکن موج

$$s = \frac{1 + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = 2$$

ہوں گے۔ ترسیلی تار کی داخلی مزاحمت اب 300Ω کے بجائے

$$\begin{aligned} Z_{\text{داخلی}} &= Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan \beta l}{Z_0 + jZ_L \tan \beta l} = 300 \frac{150 + j300 \tan 288^\circ}{300 + j150 \tan 288^\circ} \\ &= 509.7 \angle -23.79^\circ = 466.39 - j205.6 \quad \Omega \end{aligned}$$

RMS, effective⁸

ہوگی جو برقی گیر (کپیسٹر) کی خاصیت رکھتی ہے۔ برقی گیر (کپیسٹر) کی خاصیت کا مطلب یہ ہے کہ ترسیلی تار کے برقی میدان میں مقناطیسی میدان سے زیادہ توانائی ذخیرہ ہے۔ داخلی رو

$$I_{s, داغی} = \frac{0.005}{300 + 466.39 - j205.6}$$

$$= 6.3013 / 15.017^\circ \quad \mu A$$

ہے اور یوں ترسیلی تار کو داخلی جانب

$$P_{داغی} = \frac{1}{2} (6.3013 \times 10^{-6})^2 \times 466.39$$

$$= 9.2593 \text{ nW}$$

طاقت فراہم کی جا رہی ہے۔ بے ضیاع تار تمام کی تمام طاقت خارجی جانب منتقل کرے گا لہذا 150Ω کے برقی بوجھ کو 9.2593 nW حاصل ہو گا جو گزشتہ جواب یعنی 10.41 nW سے قدر کم ہے۔ یہ کمی انعکاس کی وجہ سے پیدا ہوئی۔ کہانی یہاں ختم نہیں ہوتی۔ یہ طاقت دونوں ٹی وی میں برابر تقسیم ہو گا لہذا ہر ٹی وی کو صرف 4.6297 nW طاقت مہیا ہو گا۔ چونکہ ایک ٹی وی 300Ω مزاحمت رکھتا ہے لہذا ٹی وی پر پیدا ہوتی دباو

$$4.6297 \times 10^{-9} = \frac{|V_{s, بار}|^2}{2 \times 300}$$

یعنی

$$|V_{s, بار}| = 1.66667 \text{ mV}$$

ہو گا۔ یہ قیمت 2.5 mV سے بہت کم ہے جو اکیلے ٹی وی پر پیدا ہوتی ہے۔

آئیں ترسیلی تار پر برقی دباو کی چوٹی، نشیب اور ان کے مقامات کے علاوہ دیگر معلومات بھی حاصل کریں۔ اگر ہم برقی دباو کے معلومات حاصل کر سکیں تو ظاہر ہے کہ برقی رو کے معلومات بھی حاصل کر پائیں گے۔ گزشتہ باب میں مستوی امواج کے لئے یہی معلومات حاصل کی گئیں تھیں۔ وہاں استعمال کئے گئے ترکیب یہاں بھی کارآمد ثابت ہوں گے۔ برقی دباو موج کے چوٹی کے مقامات مساوات 10.91

$$-\beta_1 z = \frac{\phi}{2} + n\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

دیتا ہے۔ اس میں $\beta = 0.8\pi$ اور $\phi = \pi$ پر کرنے سے

$$\begin{aligned} z_{\text{بلندتر}} &= \frac{1}{-0.8\pi} \left(\frac{\pi}{2} + n\pi \right) \\ &= -1.25 \left(\frac{1}{2} + n \right) \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے جس میں $n = 0$ اور $n = 1$ پر کرنے سے

$$z_{\text{بلندتر}} = -0.625 \text{ m} \quad \text{اور} \quad -1.875 \text{ m}$$

حاصل ہوتے ہیں جو درست جوابات ہیں۔ اگر $n = 2$ پر کیا جائے تو $z_{\text{بلندتر}} = -3.125 \text{ m}$ حاصل ہوتا ہے جبکہ تار کی کل لمبائی صرف دو میٹر ہے لہذا اس جواب کو رد کیا جاتا ہے۔ اسی طرح $n = -1$ پر کرنے سے $z_{\text{بلندتر}} = 0.625 \text{ m}$ حاصل ہوتا ہے جبکہ تار منفی z محدود پر پائی جاتی ہے لہذا اس جواب کو بھی رد کیا جاتا ہے۔

موج کے چوٹی سے $\frac{\lambda}{4}$ فاصلے پر نشیب پائے جاتے ہیں، لہذا ان کے مقامات

$$z_{\text{سر}} = 0 \text{ m} \quad \text{اور} \quad -1.25 \text{ m}$$

ہوں گے۔ آپ نے دیکھا کہ سرحد پر برقی دباؤ کا نشیب پایا جاتا ہے۔ آپ کو یاد ہو گا کہ حقیقی Z_0 اور Z_L کی صورت میں اگر $Z_0 < Z_L$ ہو تب سرحد پر موج کا نشیب ہی پایا جاتا ہے۔

چونکہ سرحد پر موج کا نشیب ہے اور ہم جانتے ہیں کہ \hat{u} دی پر 1.66 mV ہے لہذا دباؤ کی کمتر قیمت یہی ہے اور $s = 2$ سے دباؤ کی چوٹی اس کے دگنا یعنی 3.32 mV حاصل ہوتی ہے۔ ترسیلی تار کے داخلی سرے پر برقی دباؤ

$$\begin{aligned} V_{s, \text{داخلی}} &= I_{s, \text{داخلی}} Z_{s, \text{داخلی}} \\ &= \left(6.3013 \times 10^{-6} / 15.017^\circ \right) (509.7 / -23.79^\circ) \\ &= 0.00321175 / -8.77^\circ \end{aligned}$$

ہو گی جو تقریباً موج کے چوٹی کے برابر ہے۔ ایسا اس لئے ہے کہ سرحد سے $\frac{\lambda}{4}$ فاصلے پر چوٹی پائی جاتی ہے جس سے ہر 0.5λ فاصلے پر چوٹی ہو گی لہذا سرحد سے $\frac{3\lambda}{4}$ فاصلے پر بھی چوٹی متوقع ہے جو تار کے داخلی سرے کے بہت قریب نقطہ ہے۔ آپ ترسیلی تار کی داخلی برقی دباؤ یوں

$$V_{s, \text{داخلی}} = \frac{Z_{s, \text{داخلی}} V_s}{Z_{s, \text{داخلی}} + 300} = \frac{(466.39 - j205.6) \times 0.005}{466.39 - j205.6 + 300} = 0.00321175 / -8.77^\circ$$

بھی حاصل کر سکتے ہیں۔

آخر میں داخلی برقی دباؤ اور برقی بوجھ پر برقی دباؤ کا زاویائی تعلق دیکھتے ہیں۔ اگرچہ ہم دونوں برقی دباؤ کے قیمتیں حاصل کر چکے ہیں، ان کے زاویائی معلومات ابھی تک نہیں حاصل کی گئیں۔ مساوات 10.90 کی مدد سے تار پر کسی بھی نقطے پر برقی دباؤ

$$V_s = (e^{-j\beta z} + \Gamma e^{j\beta z}) V_0^+$$

لکھا جا سکتا ہے۔ چونکہ ہمیں تار کے داخلی سرے پر دباؤ معلوم ہے لہذا اس میں $z = -l$ پر کرنے سے

$$V_{s, داخلی} = (e^{j\beta l} + \Gamma e^{-j\beta l}) V_0^+$$

حاصل ہوتا ہے جسے V_0^+ کے لئے حل کرتے ہیں

$$V_0^+ = \frac{V_{s, داخلی}}{e^{j\beta l} + \Gamma e^{-j\beta l}} = \frac{0.00321175 / -8.77^\circ}{e^{j1.6\pi} - \frac{1}{3}e^{-j1.6\pi}} = 0.0025 / -72^\circ$$

اور یوں برقی بوجھ یعنی $z = 0$ پر برقی دباؤ حاصل کی جا سکتی ہے

$$V_{s, بار} = (1 + \Gamma) V_0^+ = 0.001666 / -72^\circ = 0.001666 / -288^\circ$$

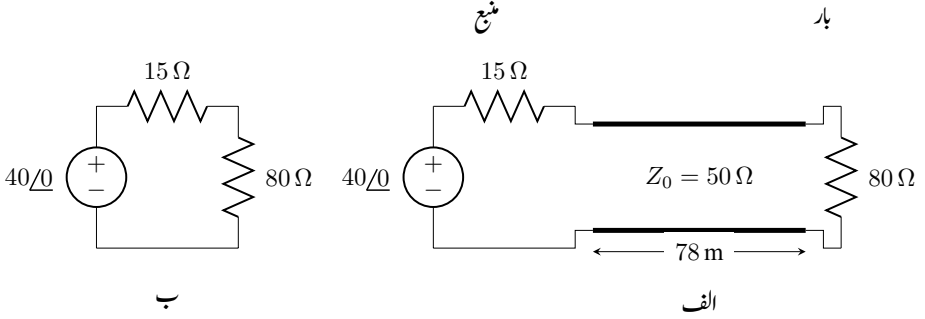
یہاں حاصل جواب کی حتمی قیمت اور کچھ دیر پہلے حاصل کی گئی برقی بوجھ پر برقی دباؤ کی حتمی قیمت برابر ہیں۔ تار کے داخلی سرے پر دباؤ کا زاویہ -8.77° جبکہ تار کے خارجی سرے پر دباؤ کا زاویہ 72° ہے۔ یوں ان کے مابین فرق 80.77° یعنی -279.23° ہے۔ انعکاسی موج کی عدم موجودگی میں یہ فرق 288° یعنی تار کی زاویائی لمبائی جتنا ہوتا ہے۔

آخری مثال کے طور پر ہم اس ترسیلی تار کے خارجی سرے پر صرف برقی گیر (کپیسٹر) $Z_L = -j300 \Omega$ نسب کر کے دیکھتے ہیں۔ برقی گیر (کپیسٹر) میں توانائی ضائع نہیں ہوتی۔ یہ حقیقت شرح انعکاس

$$\Gamma = \frac{-j300 - 300}{-j300 + 300} = -j = 1 / -90^\circ$$

سے صاف ظاہر ہے جو انعکاسی موج کا حیثہ آمدی موج کے برابر دیتا ہے۔ شرح ساکن موج یوں

$$s = \frac{1 + |-j|}{1 - |-j|} = \infty$$



شکل 11.5: ترسیلی تار اور برقی بوجھ۔

ہو گا جس سے موج کا نشیب عین صفر کے برابر حاصل ہوتا ہے۔ ترسیلی تار کی داخلی قدرتی رکاوٹ

$$Z_{\text{داخلی}}, = 300 \frac{-j300 + j300 \tan 288^\circ}{300 + j(-j300) \tan 288^\circ} = j589$$

ہو گی جو خیالی عدد ہے لہذا اسے اوسط طاقت فراہم نہیں کی جاسکتی۔

ترسیلی تار کے مسائل ترسیبی طریقے سے نہایت خوش اسلوبی سے حل ہوتے ہیں۔ ان میں سمٹھہ نقشہ⁹ زیادہ اہم ہے۔ اگلے حصے میں اسی پر غور کیا جائے گا۔

مثال 11.1: شکل 11.5-الف میں 78 m لمبی بے ضیاع ترسیلی تار دکھائی گئی ہے جو $Z_L = 80 \Omega$ برقی بوجھ کو طاقت فراہم کر رہی ہے۔ ترسیلی تار کو منبع $40\angle 0$ برقی دباؤ فراہم کر رہی ہے۔ منبع کی خارجی مزاحمت 15Ω ہے جبکہ ترسیلی تار کی قدرتی رکاوٹ $Z_0 = 50 \Omega$ اور اس میں موج کی رفتار $2 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ہے۔ مندرجہ ذیل صورتوں میں برقی بوجھ پر برقی دباؤ V_L حاصل کریں۔ الف) منبع کی تعدد 500 kHz ہے۔ ب) منبع کی تعدد 50 Hz ہے۔

حل: الف) تریسلی تار میں 500 kHz تعدد پر طول موج اور β مندرجہ ذیل ہیں۔

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{2 \times 10^8}{500000} = 400 \text{ m}$$

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{400} = \frac{\pi}{200} \text{ rad/m}$$

اس تعدد پر تریسلی تار کی لمبائی، طول موج کے 19.5% ہے۔ تریسلی تار کی داخلی قدرتی رکاوٹ

$$Z_{\text{داخلی}} = 50 \frac{80 + j50 \tan\left(\frac{\pi}{200} \times 78\right)}{50 + j80 \tan\left(\frac{\pi}{200} \times 78\right)}$$

$$= 33.599 - j10.441$$

ہے۔ تریسلی تار کے داخلی سرے پر 80Ω کا برقی بوجھ $Z_{\text{داخلی}}$ نظر آتا ہے۔ یوں تریسلی تار کے داخلی سرے پر برقی دباؤ

$$V_{\text{داخلی}} = \frac{40 \times (33.599 - j10.441)}{15 + 33.599 - j10.441} = 28.2 - j2.54$$

ہوگا۔ برقی بوجھ کو $z = 0$ پر تصور کرنے سے تریسلی تار کا داخلی سرا $z = -78 \text{ m}$ پر ہوگا۔ تریسلی تار کے داخلی برقی دباؤ کو تریسلی تار میں موجود آمدی موج $V^+ = V_0^+ e^{-j\beta z}$ اور انعکاسی موج $V^- = V_0^- e^{j\beta z}$ کا نقطہ $z = -78 \text{ m}$ پر مجموعہ

$$V_{\text{داخلی}} = V_0^+ e^{-j\frac{\pi}{200}(-78)} + V_0^- e^{j\frac{\pi}{200}(78)} = V_0^+ e^{j1.22522} + V_0^- e^{-j1.22522}$$

تصور کیا جاسکتا ہے جس میں

$$V_0^- = \Gamma V_0^+ = \left(\frac{80 - 50}{80 + 50} \right) V_0^+ = \frac{3}{13} V_0^+$$

پر کرنے سے

$$28.2 - j2.54 = V_0^+ e^{j1.22522} + \frac{3}{13} V_0^+ e^{-j1.22522}$$

یا

$$V_0^+ = \frac{28.2 - j2.54}{e^{j1.22522} + \frac{3}{13} e^{-j1.22522}} = 33.9 e^{-j1.138}$$

حاصل ہوتا ہے۔ یوں برقی بوجھ پر برقی دباؤ

$$V_L = V_0^+ (1 + \Gamma) = 33.9e^{-j1.138} \left(1 + \frac{3}{13}\right) = 41.7e^{-j1.138} = 41.7 \angle -65.2^\circ$$

ہو گا۔

آئیں برقی بوجھ کو منتقل طاقت بھی حاصل کریں۔ برقی بوجھ پر برقی دباؤ کے استعمال سے اوسط طاقت

$$P_L = \frac{1}{2} \frac{|V_L|^2}{R_L} = \frac{1}{2} \frac{41.7^2}{80} = 10.88 \text{ W}$$

حاصل ہوتی ہے۔

ترسیلی تار کے داخلی سرے پر برقی رو

$$I_{\text{داخلی}} = \frac{V_{\text{داخلی}}}{Z_{\text{داخلی}}} = \frac{28.2 - j2.54}{33.599 - j10.441} = 0.787 + j0.169$$

ہو گی۔ یوں ترسیلی تار کو داخلی سرے پر

$$P_{\text{داخلی}} = \frac{1}{2} V_{\text{داخلی}} I_{\text{داخلی}}^* \Big|_{\text{حقیقی}} = \frac{1}{2} (28.2 - j2.54)(0.787 - j0.169) = 10.88 \text{ W}$$

طاقت منتقل ہو رہی ہے۔ ترسیلی تار بے ضیاع ہے لہذا یہی طاقت برقی بوجھ کو منتقل ہو گی۔

ب) ترسیلی تار میں 50 Hz تعدد پر طول موج اور β مندرجہ ذیل ہیں۔

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{2 \times 10^8}{50} = 4 \times 10^6 \text{ m}$$

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{4 \times 10^6} = 5\pi \times 10^{-7} \frac{\text{rad}}{\text{m}}$$

اس تعدد پر ترسیلی تار کی لمبائی، طول موج سے نہایت کم $\lambda \gg 78 \text{ m}$ ہے۔ ترسیلی تار کی داخلی قدرتی رکاوٹ

$$\begin{aligned} Z_{\text{داخلی}} &= Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan \beta l}{Z_0 + jZ_L \tan \beta l} = 50 \frac{80 + j50 \tan(5\pi \times 10^{-7} \times 78)}{50 + j80 \tan(5\pi \times 10^{-7} \times 78)} \\ &= 50 \frac{80 + j0.0061}{50 + j0.0098} = 79.999998697 \angle -0.00684^\circ \\ &\approx 80 \Omega \end{aligned}$$

ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $\beta l \ll 1$ کی صورت میں $\tan \beta l \rightarrow 0$ ہوتا ہے جس سے تریسلی تار کی داخلی قدرتی رکاوٹ تقریباً برقی بوجھ کے برابر ہی حاصل ہوتی ہے۔ آپ نے دیکھا کہ $l \ll \lambda$ کی صورت میں تریسلی تار کے داخلی سرے پر برقی بوجھ جوں کا توں نظر آتا ہے لہذا تریسلی تار کا ہونا یا نہ ہونا یک برابر ہے۔ ایسی صورت میں تریسلی تار کی موجودگی رد کرتے ہوئے دور کو کرخوف کے قوانین سے حل کیا جاتا ہے۔ ایسا کرنے سے ہمیں شکل 11.5-ب حاصل ہوتی ہے جسے کرخوف کے قوانین کی مدد سے حل کرتے ہوئے برقی بوجھ پر

$$V_L = \frac{40 \times 80}{15 + 80} = 33.7 \text{ V}$$

برقی دباؤ حاصل ہوتی ہے۔

مندرجہ بالا مثال میں آپ نے دیکھا کہ کسی بھی برقی دور میں تار کی لمبائی l طول موج λ سے بہت کم $l \ll \lambda$ ہونے کی صورت میں، تریسلی تار کو رد کرتے ہوئے، دور کو کرخوف کے قوانین سے حل کیا جاتا ہے۔ البتہ جب بھی تار کی لمبائی، طول موج کے ساتھ مطابقت رکھے، ایسی صورت میں کرخوف کے قوانین غیر کارآمد ہوتے ہیں اور میکس ویل کے مساوات سے ہی درست جوابات حاصل ہوتے ہیں۔

پاکستان میں 50 Hz اور 220 V کی برقی طاقت مہیا کی جاتی ہے۔ تار پر موج کی رفتار $3 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ لیتے ہوئے $\lambda = 6000 \text{ km}$ حاصل ہوتی ہے۔ گھر کے اندر فاصلے λ سے بہت کم ہوتے ہیں¹⁰ لہذا گھر میں 484Ω بلب کی برقی رو دریافت کرتے ہوئے تار کی لمبائی رد کرتے ہوئے $0.45 \text{ A} = \frac{220}{484}$ حاصل ہوتی ہے۔ اس کے برعکس تریبلا ڈیم سے کراچی شہر کا فاصلہ تقریباً 1500 km ہے جو λ سے مناسبت رکھتا ہے، لہذا تریبلا ڈیم سے کراچی شہر کو برقی طاقت کے منتقلی کے مسائل حل کرتے ہوئے میکس ویل کے مساوات استعمال کرنا لازم ہوگا۔

مثال 11.2: قدرتی رکاوٹ 50Ω کے تریسلی تار کے اختتام پر $Z_1 = 50 - j100 \Omega$ جڑا ہے جبکہ اختتام سے 0.2λ فاصلے پر $Z_2 = 100 \Omega$ جڑا ہے۔ تریسلی تار کے دونوں حصوں میں شرح ساکن موج s حاصل کریں۔

¹⁰ مجھے اپنا گھر بہت چھوٹا لگنے لگا ہے۔

حل: محدود لمبائی کے ترسیلی تار میں متعدد انعکاسی امواج پائے جاتے ہیں۔ تمام آگے جانب حرکت امواج کو ایک عدد آمدی بڑھتی موج تصور کرتے ہوئے اور اسی طرح تمام واپسی جانب حرکت کرتے ہوئے تمام امواج کو ایک عدد انعکاسی موج تصور کرتے ہوئے حل کرتے ہیں۔

ترسیلی تار کے اختتامی حصے پر

$$\Gamma = \frac{50 - j100 - 50}{50 - j100 + 50} = 0.5 - j0.5$$

ہو گا جس سے $|\Gamma| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ حاصل ہوتا ہے۔ اس قیمت کو استعمال کرتے ہوئے

$$s = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|} = \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}} = 5.83$$

حاصل ہوتا ہے۔

جس نقطے پر 100Ω مزاحمت جڑی ہے اس مقام پر $50 - j100$ سے اختتام پذیر 0.2λ لمبی تار کی داخلی رکاوٹ

$$Z_{\text{داخلی}} = 50 \frac{(50 - j100) + j50 \tan\left(\frac{2\pi}{\lambda} \times 0.2\lambda\right)}{50 + j(50 - j100) \tan\left(\frac{2\pi}{\lambda} \times 0.2\lambda\right)}$$

$$= 8.63 + j3.82$$

ہے۔ اب داخلی Z اور 100Ω متوازی جڑے ہیں جن کا مجموعہ

$$\frac{100 \times (8.63 + j3.82)}{100 + 8.63 + j3.82} = 8.06 + j3.23$$

ہو گا۔ داخلی جانب سے دیکھتے ہوئے ترسیلی تار کو 100Ω کی بجائے $8.06 + j3.23$ برقی بوجھ نظر آئے گا۔ یوں ترسیلی تار کے داخلی حصے پر

$$\Gamma = \frac{8.06 + j3.23 - 50}{8.06 + j3.23 + 50} = -0.717 + j0.096 = 0.723 \angle 171.9^\circ$$

اور

$$s = \frac{1 + 0.723}{1 - 0.723} = 6.22$$

ہوں گے۔

11.4 ترسیبی تجزیہ، سمتھ نقشہ

سمتھ نقشہ¹¹ بنیادی طور پر شرح العکاس

$$\Gamma = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$$

کی مساوات پر منحصر ہے۔ اس نقشے میں برقی بوجھ بمطابق Z_0 یعنی $\frac{Z_L}{Z_0}$ استعمال کی جاتی ہے جسے

$$z = r + jx = \frac{Z_L}{Z_0} = \frac{R_L + jX_L}{Z_0}$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں z کار تیزی محدود کا متغیرہ نہیں بلکہ Z_0 کے مطابقت سے برقی بوجھ کو ظاہر کرتا ہے۔ یوں

$$\Gamma = \frac{z - 1}{z + 1}$$

اور

$$(11.42) \quad z = \frac{1 + \Gamma}{1 - \Gamma}$$

لکھے جاسکتے ہیں۔ شرح العکاس کو حقیقی اور خیالی اجزاء

$$\Gamma = \Gamma_r + j\Gamma_i$$

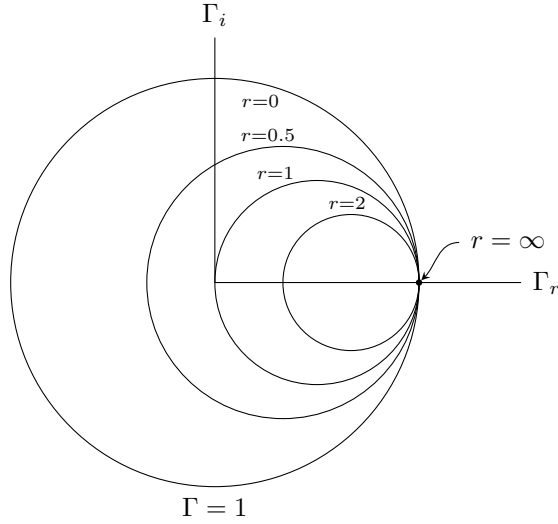
کی صورت میں لکھتے ہوئے

$$r + jx = \frac{1 + \Gamma_r + j\Gamma_i}{1 - \Gamma_r - j\Gamma_i}$$

کے حقیقی اور خیالی اجزاء علیحدہ کرتے ہوئے

$$(11.43) \quad r = \frac{1 - \Gamma_r^2 - \Gamma_i^2}{(1 - \Gamma_r)^2 + \Gamma_i^2}$$

$$(11.44) \quad x = \frac{2\Gamma_i}{(1 - \Gamma_r)^2 + \Gamma_i^2}$$



شکل 11.6: کار تیبسی محد کے متغیرات Γ_r اور Γ_i ہیں جبکہ دائرے کا رداس $\frac{1}{r+1}$ ہے۔

لکھے جاسکتے ہیں جنہیں کچھ الجبرا کے بعد

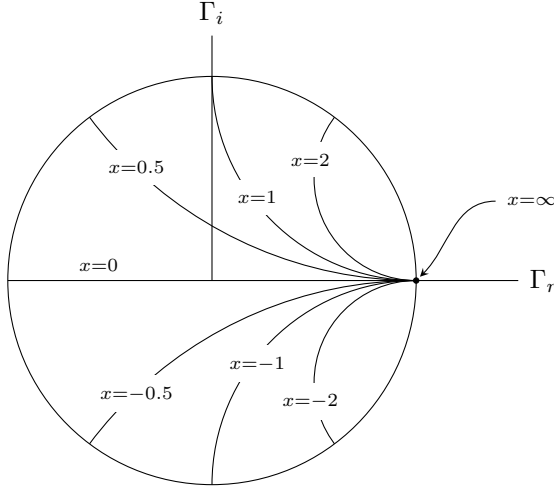
$$(11.45) \quad \left(\Gamma_r - \frac{r}{1+r} \right)^2 + \Gamma_i^2 = \left(\frac{1}{1+r} \right)^2$$

$$(11.46) \quad (\Gamma_r - 1)^2 + \left(\Gamma_i - \frac{1}{x} \right)^2 = \left(\frac{1}{x} \right)^2$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اگر کار تیبسی محد کے متغیرات Γ_r اور Γ_i رکھے جائیں تو مندرجہ بالا دونوں مساوات گول دائروں کے مساوات ہوں گے۔

مساوات 11.45 کے دائروں پر پہلے غور کرتے ہیں۔ اگر $r = 0$ ہو تب یہ مساوات اکائی رداس کا دائرہ دیتی ہے جس کا مرکز محد کے $(0, 0)$ پر ہے۔ خیالی برقی بوجھ کی صورت میں شرح انعکاس کی حتمی قیمت ایک ہی ہوتی ہے۔ اسی طرح $r = \infty$ کی صورت میں دائرے کا رداس صفر جبکہ اس کا مرکز محد پر $(1, 0)$ ہے۔ یوں یہ دائرہ صرف اسی نقطے یعنی $\Gamma = 1$ تک محدود ہے۔ اب $r = \infty$ سے مراد $Z_L - \infty$ ہے جس سے شرح انعکاس $\Gamma = 1$ ہی حاصل ہوتی ہے۔ ایک آخری مثال $r = 1$ کی لیتے ہیں جس سے 0.5 رداس کا دائرہ حاصل ہوتا ہے جس کا مرکز $(0.5, 0)$ ہے۔ شکل 11.6 میں ان دائروں کے علاوہ $r = 0.5$ اور $r = 2$ سے حاصل دائرے بھی دکھایا گیا ہے۔

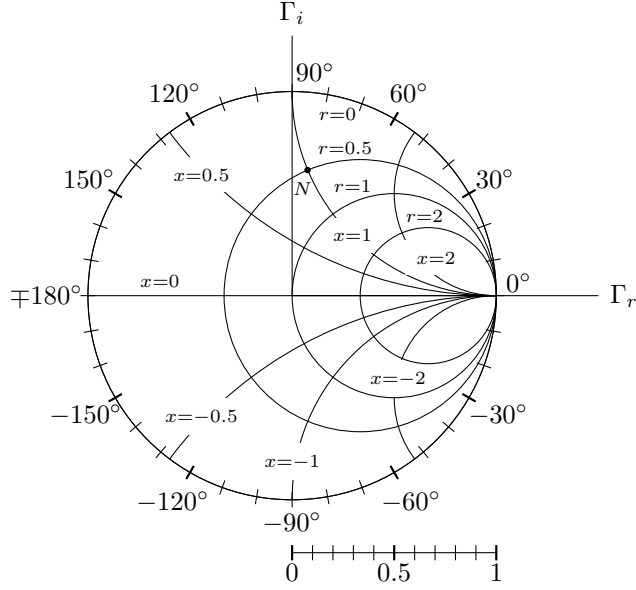
مساوات 11.46 بھی دائرے دیتی ہے البتہ ان دائروں کا رداس $\frac{1}{x}$ اور مراکز $(1, \frac{1}{x})$ ہیں۔ لا محدود x کی صورت میں



شکل 11.7: کار تیسبی محمد پے $\frac{1}{x}$ رداس کے دائروں کے وہ حصے دکھائے گئے ہیں جو اکائی دائرے کے اندر پائے جاتے ہیں۔

دوبارہ $Z = \infty$ اور $\Gamma = 1 + j0$ ہوں گے۔ مساوات 11.46 کے مطابق اس دائرے کا رداس صفر جبکہ اس کا مرکز $(1, 0)$ ہے لہذا یہ $\Gamma = 1$ کو ہی ظاہر کرتا ہے۔ اگر $x = 1$ ہو تب دائرے کا رداس اکائی جبکہ اس کا مرکز $(1, 1)$ ہوں گے۔ جیسا شکل 11.7 میں دکھایا گیا ہے، اس دائرے کا چوتھائی حصہ $|\Gamma| = 1$ دائرے کے اندر پایا جاتا ہے۔ اسی طرح $x = -1$ کی صورت میں دائرے کا چوتھائی حصہ Γ_r محدد کے نیچے پایا جاتا ہے۔ شکل میں $x = 0.5$ ، $x = -0.5$ ، $x = 2$ اور $x = -2$ کے دائرے بھی دکھائے گئے ہیں۔ شکل میں $x = 0$ سے پیدا سیدھی لکیر، یعنی Γ_r محدد بھی دکھایا گیا ہے۔

ان دونوں دائروں کو ایک ہی جگہ شکل 11.8 کے سمتھ نقشے میں دکھایا گیا ہے۔ یوں کسی بھی Z_L کی صورت میں $\frac{Z_L}{Z_0}$ کی شرح لیتے ہوئے z یعنی r اور x حاصل کر کے سمتھ نقشے میں ان کے دائروں کی نشاندہی کریں۔ اگر نقشے پر درکار r اور x (یا x کے دائرے نہ پائے جائیں تب ان کے قریبی قیمتوں کے دائروں سے مطلوبہ دائرے کا مقام اخذ کریں۔ جہاں یہ دائرے ایک دونوں کو کاٹتے ہیں وہاں سے Γ پڑھیں۔ نقشے کے مرکز $(0, 0)$ سے اس نقطے تک فاصلہ $|\Gamma|$ کے برابر ہو گا جبکہ افقی محدد یعنی Γ_r سے گھڑی کے الٹ سمت زاویہ Γ کا زاویہ ہو گا۔ اس زاویے کو اکائی رداس کے دائرے کے باہر دکھایا گیا ہے۔ یوں محدد کے مرکز سے درکار نقطے تک سیدھی لکیر کو اکائی رداس کے دائرے تک بڑھا کر زاویہ ناپا جاتا ہے۔ سمتھ نقشے میں $|\Gamma|$ ناپنے کی غرض سے محدد کے مرکز $(0, 0)$ پر مختلف رداس کے دائرے کھینچے جاسکتے تھے، لیکن ایسا نہیں کیا جاتا۔ آپ کو یہ فاصلہ نقشے میں دئے فیتے کی مدد سے ناپنا ہو گا۔ اب مثال کے طور پر $Z_0 = 50 \Omega$ کی ترسیلی تار پر $Z_L = 25 + j50 \Omega$ کا برقی بوجھ $z = 0.5 + j1$ سے ظاہر کیا جائے گا۔ اس



شکل 11.8: سمتھ نقشے پر اکائی دائرے میں r اور x سے حاصل دائرے دکھائے جاتے ہیں۔

نقطے کو شکل میں بطور نقطہ N دکھایا گیا ہے جو $r = 0.5$ اور $x = 1$ کے دائروں کے نقطہ ملاپ سے حاصل ہوتا ہے۔ شرح انعکاس تقریباً $0.62/83^\circ$ حاصل ہوتا ہے۔

سمتھ نقشہ مکمل کرنے کی خاطر اکائی دائرے کے محیط کے باہر دوسرا فیتہ شامل کیا جاتا ہے جس سے ترسیلی تار پر فاصلہ ناپا جاتا ہے۔ اس فیتے پر فاصلہ طول موج λ کی صورت میں ناپا جاسکتا ہے۔ آئیں دیکھیں کہ اس فیتے سے کس طرح فاصلہ حاصل کیا جاتا ہے۔ ترسیلی تار پر کسی بھی نقطے پر برقی دباؤ

$$V_s = V_0^+ (e^{-j\beta z} + \Gamma e^{j\beta z})$$

کو برقی رو

$$I_s = \frac{V_0^+}{Z_0} (e^{-j\beta z} - \Gamma e^{j\beta z})$$

سے تقسیم کرتے ہوئے Z_0 کے مطابقت سے داخلی قدرتی رکاوٹ

$$Z_{داخلی} = \frac{Z_{داخلی}}{Z_0} = \frac{V_s}{Z_0 I_s} = \frac{e^{-j\beta z} + \Gamma e^{j\beta z}}{e^{-j\beta z} - \Gamma e^{j\beta z}}$$

حاصل کی جاسکتی ہے جس میں $z = -l$ پر کرتے ہوئے

$$(11.47) \quad z_{\text{داخلی}} = \frac{1 + \Gamma e^{-j2\beta l}}{1 - \Gamma e^{j2\beta l}}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس مساوات میں $l = 0$ پر کرنے سے

$$(11.48) \quad z_{\text{داخلی}} \Big|_{l=0} = \frac{1 - \Gamma}{1 + \Gamma} = z$$

حاصل ہوتا ہے جو عین برقی بوجھ پر شرح انعکاس ہے جسے مساوات 11.42 میں پیش کیا گیا ہے۔

یہاں رک کر اس حقیقت پر غور کریں کہ Γ کو $e^{-j2\beta l}$ سے ضرب دینے سے

$$\Gamma e^{-j2\beta l} = |\Gamma| e^{j\phi} e^{-j2\beta l} = |\Gamma| e^{j(\phi - 2\beta l)}$$

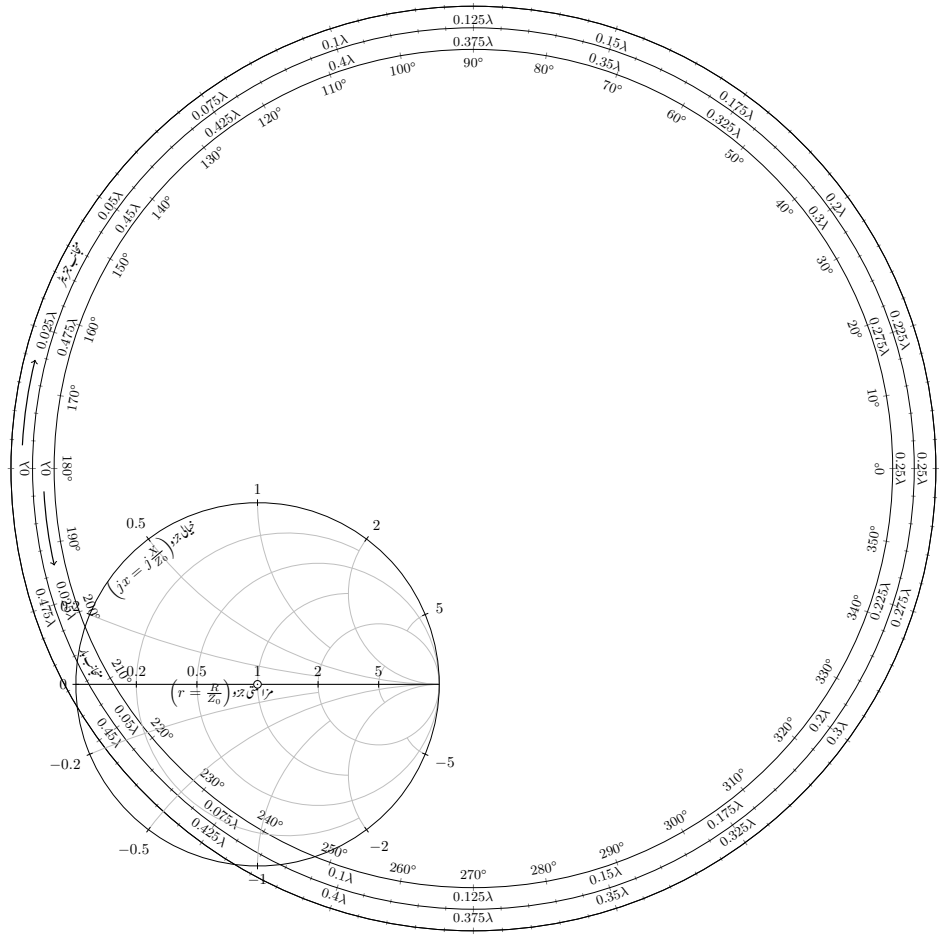
حاصل ہوتا ہے جس کی حتمی قیمت اب بھی $|\Gamma|$ ہی ہے لیکن نیا زاویہ $(\phi - 2\beta l)$ ہے۔ یوں سمٹھ نقشے میں نقطہ z یعنی

$$(11.49) \quad z = r + jx = \frac{1 + \Gamma}{1 - \Gamma}$$

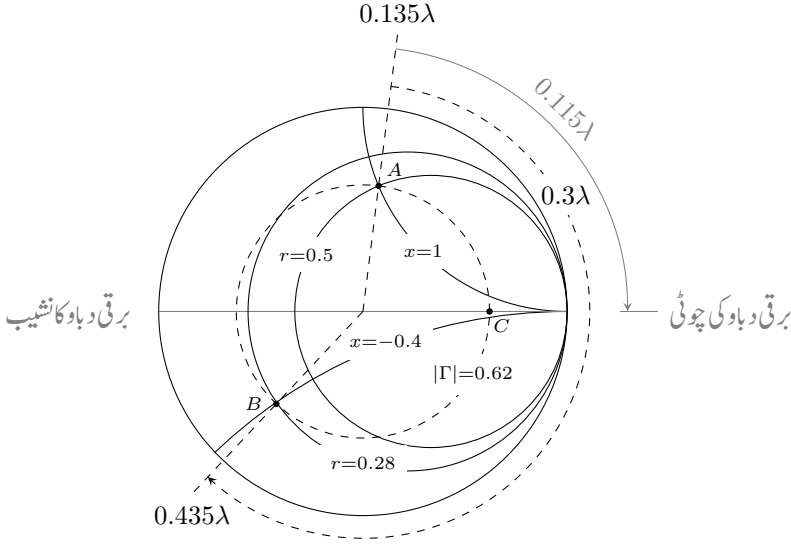
کی نشاندہی کرتے ہوئے ϕ / $|\Gamma|$ ناپیں۔ اب $|\Gamma|$ تبدیل کئے بغیر زاویہ تبدیل کرتے ہوئے $(\phi - 2\beta l)$ تک پہنچیں اور یہاں سے $z_{\text{داخلی}}$ ناپیں۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مساوات 11.49 میں Γ کی جگہ $\Gamma e^{-j2\beta l}$ پر کرنے سے مساوات 11.47 ہی حاصل ہوتا ہے جو برقی بوجھ سے l فاصلے پر بمطابق Z_0 داخلی قدرتی رکاوٹ ہے۔

یوں برقی بوجھ z سے دور $z_{\text{داخلی}}$ کی طرف چلتے ہوئے، ہم منبع طاقت یعنی جزیئر کی طرف چلتے ہیں جبکہ سمٹھ نقشے پر ایسا کرنے سے زاویہ ϕ سے کم ہو کر $\phi - 2\beta l$ ہوتا ہے لہذا نقشے پر ہم گھڑی کے سمت چلتے ہیں۔ یوں $\beta l = \pi$ فاصلہ، یعنی آدھی طول موج، طے کرنے سے نقشے کے گرد ایک چکر مکمل ہو گا۔ اس طرح $\frac{\lambda}{2}$ لمبی بے ضیاع ترسیلی تار کی داخلی قدرتی رکاوٹ عین برقی بوجھ کے رکاوٹ برابر ہو گی۔

یوں سمٹھ نقشے کے حیطے پر ایک مکمل چکر کو 0.5λ دکھایا جاتا ہے۔ جیسے شکل 11.9 میں دکھایا گیا ہے، استعمال میں آسانی کی غرض سے ایک کے بجائے دو ایسے فیتے بنائے جاتے ہیں۔ ایک فیتہ گھڑی کی سمت میں بڑھتا فاصلہ دکھاتا ہے جسے نقشے میں "منجاب جزیئر" سے ظاہر کیا جاتا ہے جبکہ دوسرا فیتہ گھڑی کے الٹ سمت بڑھتا فاصلہ دکھاتا ہے جسے "منجاب بار" لکھ کر ظاہر کیا جاتا ہے۔ ان فیتوں کے ابتدائی نقطے کوئی اہمیت نہیں رکھتے البتہ انہیں نقشے کے بائیں ہاتھ



شکل 11.9: مکمل سمتھ نقشہ



شکل 11.10: سمتھ نقشے سے متغیرات کا حصول۔

پر رکھا جاتا ہے۔ آپ کو یاد ہو گا کہ حقیقی Z_L اور Z_0 کی صورت میں اگر $Z_L < Z_0$ ہو تب برقی دباؤ کا نشیب اسی نقطے پر ہو گا۔

سمتھ نقشے کا استعمال مثال کی مدد سے بہتر سمجھا جا سکتا ہے۔ یوں 50Ω کے ترسیلی تار پر $Z_L = 25 + j50 \Omega$ کے برقی بوجھ پر دوبارہ غور کرتے ہیں۔ شکل 11.10 میں $z = 0.5 + j1$ کو نقطہ A ظاہر کرتا ہے جہاں سے $\Gamma = 0.62e^{j1.45} = 0.62/83^\circ$ حاصل ہوتا ہے۔ مرکز سے A تک لکیر کو اکائی دائرے کے حیطے تک بڑھا کر 0.135λ پڑھا جاتا ہے۔ اگر تار کی لمبائی 60 cm ہو اور اشارے کی تعداد اتنی ہو کہ ترسیلی تار پر طول موج 2 m ہو، تب $\frac{1}{\lambda} = 0.3$ ہو گا لہذا تار 0.3λ لمبی ہو گی۔ یوں بیرونی دائرے پر $0.135\lambda + 0.3\lambda = 0.435\lambda$ سے مرکز تک لکیر اور $|\Gamma|$ دائرے کے ملاپ، یعنی نقطہ B، سے $z = 0.28 - j0.4$ حاصل ہوتا ہے۔ اس طرح $Z_{\text{اغل}} = 14 - j20$ ہو گا۔ تحلیلی طور پر زیادہ درست جواب $Z_{\text{اغل}} = 13.7 - j20.2$ حاصل ہوتا ہے۔

سمتھ نقشے سے موج کے چوٹی یا نشیب کے مقام باآسانی حاصل کئے جاتے ہیں۔ کسی بھی $\Gamma = |\Gamma| \angle \phi$ کے لئے

$z = -l$ پر آمدی اور انعکاسی امواج کے مجموعے

$$\begin{aligned} V_s &= V_0^+ (e^{j\beta l} + \Gamma e^{-j\beta l}) \\ &= V_0^+ e^{j\beta l} \left[1 + |\Gamma| e^{j(\phi - 2\beta l)} \right] \end{aligned}$$

کی حتمی قیمت

$$\begin{aligned} |V_s| &= V_0^+ |e^{j\beta l}| \left| \left[1 + |\Gamma| e^{j(\phi - 2\beta l)} \right] \right| \\ &= V_0^+ \left| 1 + |\Gamma| e^{j(\phi - 2\beta l)} \right| \end{aligned}$$

ہے جہاں $|e^{j\beta l}| = 1$ کے برابر¹² ہے۔ اس کی کم سے کم قیمت $V_0^+ (1 - |\Gamma|)$ ہے جو $\phi - \beta l = (2n + 1)\pi$ کی صورت میں اس شرط کو $\phi = \pi$ لکھا جاسکتا ہے۔ اسی طرح $|V_s|$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت $V_0^+ (1 + |\Gamma|)$ ہے جو $\phi - \beta l = 2n\pi$ کی صورت میں حاصل ہوتی ہے جہاں $n = 0, 1, 2, \dots$ ہے۔ عین برقی بوجھ پر $l = 0$ ہے اور ایسی صورت میں اس شرط کو $\phi = 0$ لکھا جاسکتا ہے۔ یوں $\phi = \pi$ کی صورت میں برقی بوجھ پر V_s کی کم سے کم قیمت ہوگی جبکہ $\phi = 0$ کی صورت میں برقی بوجھ پر V_s کی زیادہ سے زیادہ قیمت ہوگی۔ آئیں دیکھیں کہ ان شرائط کا مطلب کیا ہے۔

مزا حتمی برقی بوجھ R_L اور حقیقی Z_0 کی صورت میں اگر $R_L < Z_0$ ہو تب Γ منفی حقیقی عدد ہوگا جسے $\Gamma = |\Gamma| \angle \pi$ لکھا جاسکتا ہے جبکہ $R_L > Z_0$ کی صورت میں Γ مثبت حقیقی عدد ہوگا جسے $\Gamma = |\Gamma| \angle 0^\circ$ لکھا جاسکتا ہے۔ یوں $R_L < Z_0$ یعنی $\Gamma = |\Gamma| \angle \pi$ کی صورت میں برقی بوجھ پر کمتر V_s ہوگا جبکہ $R_L > Z_0$ یعنی $\Gamma = |\Gamma| \angle 0$ کی صورت میں برقی بوجھ پر بلند تر V_s ہوگا۔ سمٹھ نقشے پر افقی محدود حقیقی Γ دیتا ہے۔ منفی افقی محدود پر $\Gamma = |\Gamma| \angle \pi$ ہوتا ہے لہذا برقی بوجھ پر کمتر V_s کی صورت سمٹھ نقشے میں منفی افقی محدود پر پایا جائے گا۔ اسی طرح مثبت افقی محدود پر $\Gamma = |\Gamma| \angle 0$ ہوتا ہے لہذا برقی بوجھ پر بلند تر V_s کی صورت سمٹھ نقشے میں مثبت افقی محدود پر پایا جائے گا۔

ان نتائج کو آگے بڑھاتے ہیں۔ کسی بھی مخلوط برقی بوجھ $Z_L = R_L + jX_L$ کی صورت میں سمٹھ نقشے میں $z = r + jx$ سے شروع کر کے فاصلہ l بڑھانے سے زاویہ $\phi - 2\beta l$ گھٹتا ہے جو سمٹھ نقشے پر گھڑی کی سمت گھومنے کے مترادف ہے۔ جس فاصلے پر $\phi - 2\beta l = 2n\pi$ ہو وہاں برقی موج کی چوٹی پائی جائے گی اور جس فاصلے پر

$$|e^{j\beta l}| = |\cos \beta l + j \sin \beta l| = \sqrt{\cos^2 \beta l + \sin^2 \beta l} = 1^{12}$$

کا مثبت حصہ جبکہ $(2n + 1)\pi$ سے مراد افقی محدود کا منفی حصہ ہے۔ یوں شکل 11.10 میں نقطہ A سے گھڑی کی سمت 0.115λ گھومتے ہوئے ترسیلی تار پر پہلی چوٹی پائی جائے گی۔ یوں برقی بوجھ سے پہلی چوٹی 0.115λ یعنی $0.115 \times 200 = 23 \text{ cm}$ فاصلے پر ہے۔ اگر ترسیلی تار زیادہ لمبی ہوتی تب برقی بوجھ سے 0.365λ دور پہلا نشیب پایا جاتا۔ چونکہ تار کی لمبائی اس سے کم ہے لہذا تار پر کہیں پر بھی نشیب نہیں پایا جاتا۔

برقی رو کی چوٹی اس نقطے پر پائی جاتی ہے جہاں $\phi - 2\beta l = 2n\pi$ کا شرط پورا ہو۔ برقی رو

$$I_s = \frac{V_0^+}{Z_0} (e^{j\beta l} - \Gamma e^{-j\beta l})$$

کی کمتر قیمت اس نقطے پر پائی جاتی ہے۔ اسی طرح جس نقطے پر برقی دباؤ کی کمتر قیمت پائی جائے، اس نقطے پر برقی رو کی چوٹی پائی جاتی ہے۔ یوں سمتہ نقشے کے افقی محدود کے مثبت حصے پر برقی رو کا نشیب جبکہ اس کے منفی حصے پر برقی رو کی چوٹی پائی جائے گی۔

مزاحمتی برقی بوجھ R_L اور بے ضیاع ترسیلی تار کی صورت میں $\Gamma = \frac{R_L - R_0}{R_L + R_0}$ ہو گا۔ اگر $R_L > R_0$ ہو تب $|\Gamma| = \frac{R_L - R_0}{R_L + R_0}$ ہو گا جبکہ $R_L < R_0$ کی صورت میں $|\Gamma| = \frac{R_0 - R_L}{R_0 + R_L}$ ہو گا۔ یوں $R_L > R_0$ کی صورت میں

$$s = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|} = \frac{1 + \frac{R_L - R_0}{R_L + R_0}}{1 - \frac{R_L - R_0}{R_L + R_0}} = \frac{R_L}{R_0} = r \quad (R_L > R_0)$$

جبکہ $R_L < R_0$ کی صورت میں

$$s = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|} = \frac{1 + \frac{R_0 - R_L}{R_0 + R_L}}{1 - \frac{R_0 - R_L}{R_0 + R_L}} = \frac{R_0}{R_L} \quad (R_L < R_0)$$

ہو گا۔ یاد رہے کہ $s > 1$ ہوتا ہے لہذا $\frac{R_0}{R_L}$ اور $\frac{R_L}{R_0}$ میں جو بھی اکائی سے زیادہ قیمت رکھتا ہو یہی s ہو گا۔ یوں $|\Gamma|$ رداس کے دائرے اور مثبت افقی محدود سے r پڑھ کر s کی قیمت بھی یہی تصور کریں۔ شکل 11.10 میں نقطہ C سے $r = 4.2$ پڑھا جائے گا لہذا $s = 4.2$ ہے۔ مثبت افقی محدود پر $r > 1$ ہوتا ہے لہذا محدود کے اسی حصے سے s کی قیمت پڑھی جاتی ہے۔ آپ تسلی کر لیں کہ $\frac{R_0}{R_L} > 1$ کی صورت میں بھی اسی طریقہ کار سے درست s حاصل ہوتا ہے۔

11.4.1 سمتھ فراوانی نقشہ

اس حصے کو $\frac{\lambda}{4}$ لمبی تار کی داخلی قدرتی رکاوٹ کے حصول سے شروع کرتے ہیں۔ اتنی لمبائی کے تار کا $\beta l = 90^\circ$ ہو گا۔ داخلی قدرتی رکاوٹ کی مساوات

$$Z_{\text{داخلی}} = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan \beta l}{Z_0 + jZ_L \tan \beta l}$$

میں $Z_{\text{داخلی}}$ کو Z_0 سے تقسیم کرتے اور $\beta l = 90^\circ$ پر کرتے ہوئے

$$\frac{Z_{\text{داخلی}}}{Z_0} = \frac{Z_L + jZ_0 \tan 90^\circ}{Z_0 + jZ_L \tan 90^\circ} = \frac{Z_0}{Z_L}$$

یعنی

$$(11.50) \quad \frac{z_{\text{داخلی}}}{0.25\lambda} = \frac{1}{z}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

$$\frac{Z_{\text{داخلی}}}{Z_0} = \frac{z_{\text{داخلی}}}{0.25\lambda}$$

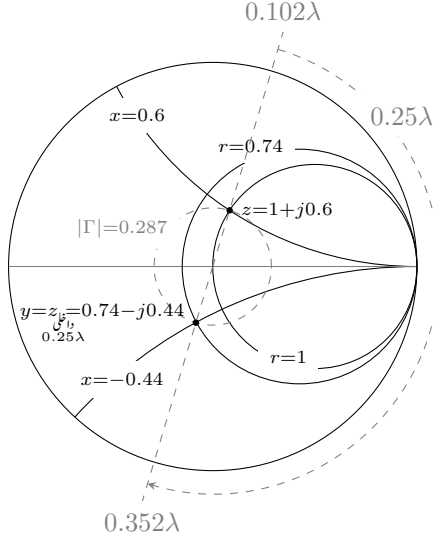
$$\frac{Z_L}{Z_0} = z$$

لکھے گئے ہیں۔ مساوات 11.50 کے تحت برقی بوجھ سے 0.25λ فاصلے پر داخلی قدرتی رکاوٹ $\frac{1}{z}$ کے برابر ہے لیکن $y = \frac{1}{z}$ ہوتا ہے لہذا اسی مساوات کو یوں بھی لکھا جاسکتا ہے

$$(11.51) \quad y = \frac{1}{z} = \frac{\text{منجانب جزیئر}}{0.25\lambda}$$

جہاں 0.25λ تار کی داخلی قدرتی رکاوٹ کی جگہ منجانب جزیئر 0.25λ گھومنے کا ذکر کیا گیا ہے۔ مساوات 11.51 کہتی ہے کہ سمتھ نقشے میں z سے منجانب جزیئر 0.25λ گھوم کر $|\Gamma|$ رداس کے دائرے سے y حاصل ہو گا۔

شکل 11.11 میں $z = 1 + j0.6$ دکھایا گیا ہے جو منجانب جزیئر 0.102λ زاویے پر پایا جاتا ہے۔ یہ رکاوٹ $\Gamma = 0.287/73.7^\circ$ دیتا ہے۔ چوتھائی طول لمبی تار کی داخلی قدرتی رکاوٹ حاصل کرنے کی خاطر منجانب جزیئر 0.25λ



شکل 11.11: چوتھائی طول تار کی داخلی قدرتی رکاوٹ اسی تار کی برقی فراوانی کے برابر ہے۔

چلتے ہوئے 0.352λ سے مرکز تک لکیر اور 0.287 کے دائرے کے ملاپ سے $z_{داخلی} = 0.74 - j0.44$ حاصل ہوتا ہے جو $\frac{1}{2}$ یعنی l کے عین برابر ہے۔

آئیں قصر دور اور کھلے دور تار کے ٹکڑوں کا داخلی قدرتی رکاوٹ حاصل کریں۔ قصر دور تار کی صورت میں $Z_L = 0$ ہو گا لہذا داخلی قدرتی رکاوٹ

$$(11.52) \quad Z_{داخلی} = Z_0 \frac{0 + jZ_0 \tan \beta l}{Z_0 + j0 \tan \beta l} = jZ_0 \tan \beta l$$

حاصل ہوتا ہے جو خیالی عدد ہے۔ چوتھائی طول لمبی قصر دور تار کی داخلی قدرتی رکاوٹ یوں

$$(11.53) \quad Z_{داخلی} = jZ_0 \tan 90^\circ = \infty \quad (\text{قصر دور})$$

حاصل ہوتی ہے۔ یہ تعجب بھرا نتیجہ ہے جس کے مطابق چوتھائی طول لمبی کسے دور تار بطور کھلے دور کردار ادا کرتی ہے۔

کھلے دور تار کی صورت میں $Z_L = \infty$ ہو گا لہذا داخلی قدرتی رکاوٹ

$$(11.54) \quad \begin{aligned} Z_{داخلی} &= Z_0 \frac{\infty + jZ_0 \tan \beta l}{Z_0 + j\infty \tan \beta l} \\ &= -j \frac{Z_0}{\tan \beta l} \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے جو خیالی عدد ہے۔ چوتھائی طول لمبی کھلے دور تار کی داخلی قدرتی رکاوٹ یوں

$$(11.55) \quad Z_{داخلی} = -j \frac{Z_0}{\tan 90^\circ} = 0 \quad (\text{کھلے دور})$$

حاصل ہوتی ہے۔ یہ بھی تعجب بھرا نتیجہ ہے جس کے مطابق چوتھائی طول لمبی کھلے دور تار بطور قصر دور کردار ادا کرتی ہے۔

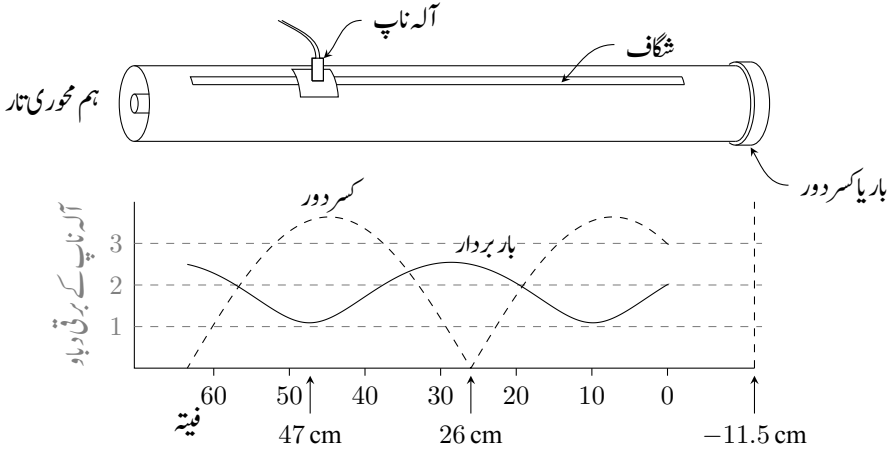
سمتھ مزاحمتی نقشے¹³ کا متبادل سمتھ فراوانی¹⁴ نقشہ بھی استعمال کیا جاتا ہے۔ ان میں $y = \frac{Y_L}{Y_0} = g + jb$ لیا جاتا ہے جہاں $Y_L = \frac{1}{R_L}$ اور $Y_0 = \frac{1}{Z_0}$ کے برابر ہیں۔ اس طرح y برقی فراوانی بمطابق Y_0 کہلائے گی۔ یوں r سے حاصل دائرے اب g کے دائرے کہلاتے ہیں جبکہ x کے دائرے b کے دائرے کہلاتے ہیں۔ اس نقشے میں $g > 1$ اور $b = 0$ کی صورت میں برقی دباؤ کی کمتر قیمت حاصل ہوگی۔ ایصالی سمتھ نقشے سے حاصل Γ کا زاویہ 180° بڑھانا ہوگا۔

11.5 تجرباتی نتائج پر مبنی چند مثال

اس حصے میں دو مثالوں پر غور کیا جائے گا۔ پہلی مثال میں تجرباتی نتائج سے برقی بوجھ کی رکاوٹ حاصل کی جائے گی جبکہ دوسری مثال میں برقی بوجھ کو تار کے ہمہ رکاوٹ بنانے کی ترکیب دکھائی جائے گی۔

ہم محوری ترسیلی تار کے بیرونی تار میں لمبائی کی سمت میں شکاف ڈال کر اس میں مختلف مقامات پر برقی دباؤ کے نمونے لے کر $s = 2.5$ حاصل کیا گیا ہے۔ شکل 11.12 میں ایسی شکاف دار تار¹⁵ دکھائی گئی ہے۔ شکاف کے ساتھ فیتہ رکھ کر بلند تر اور کم تر نمونوں کے مقامات بھی درج کئے گئے۔ ایسے نتائج حاصل کرتے وقت فیتے کا صفر کہیں پر بھی

Smith impedance chart¹³
Smith admittance chart¹⁴
slotted line¹⁵

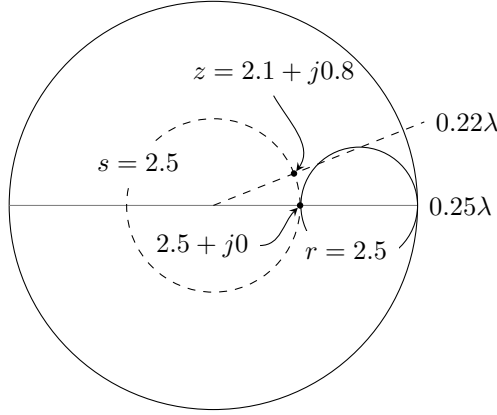


شکل 11.12: ہم محوری تار میں شکاف ڈال کر اس میں آلہ ناپ کی مدد سے مختلف مقامات پر برقی دباؤ کے نمونے لئے جا سکتے ہیں۔

رکھا جا سکتا ہے لہذا اسے برقی بوجھ کا مقام تصور نہیں کریں۔ کمتر برقی دباؤ فیتے پر 47 cm کے نشان کے ساتھ پایا جاتا ہے۔ سائن نما اشارے کی صورت میں سمت کار کے خارجی اشارہ شکل میں دکھایا گیا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اشارے کے کمتر قیمت کا مقام ٹھیک ٹھیک تعین کرنا زیادہ آسان ہے۔ اشارے کی چوٹی نوک دار نہیں ہوتی لہذا اس کا مقام ٹھیک ٹھیک تعین کرنا قدر مشکل ہوتا ہے۔ اسی وجہ سے عموماً موج کی کمتر قیمت کے مقامات حاصل کرتے ہوئے مطلوبہ معلومات دریافت کی جاتی ہیں۔ ہم محوری تار کی قدرتی رکاوٹ 50Ω ہے اور تار میں ہوا بطور ذو برق استعمال کی گئی ہے۔ اشارے کی تعدد 400 MHz ہے لہذا طول موج 75 cm ہے۔ برقی بوجھ کا مقام تعین کرنے کی خاطر برقی بوجھ کو ہٹا کر تار کے ان سروں کو قصر دور کیا جاتا ہے۔ قصر دور تار پر کمتر دباؤ فیتے پر 26 cm کے نشان کے سامنے پایا جاتا ہے۔

ہم جانتے ہیں کہ قصر دور نقطے سے کمتر دباؤ کا فاصلہ $\frac{n\lambda}{2}$ ہو گا۔ ہم فرض کرتے ہیں کہ کمتر دباؤ قصر دور نقطے سے آدھے طول موج کے فاصلے پر ہے۔ ایسی صورت میں قصر دور کا مقام فیتے پر $37.5 - 26 = -11.5$ cm کے نشان کے ساتھ ہو گا۔ چونکہ برقی بوجھ کے مقام پر ہی قصر دور پیدا کیا گیا تھا لہذا برقی بوجھ بھی فیتے پر -11.5 cm کے نشان کے ساتھ ہو گا۔ یوں حاصل نتائج کے تحت برقی بوجھ سے کم تر دباؤ کا نقطہ $47 - (-11.5) = 58.5$ cm فاصلے پر ہے جس سے آدھی طول موج منفی کرتے ہوئے برقی بوجھ سے کمتر دباؤ کا فاصلہ 21 cm حاصل ہوتا ہے۔ بلند تر دباؤ کا برقی بوجھ سے فاصلہ یوں $21 - \frac{37.5}{2} = 2.25$ cm ہو گا جو $\frac{2.25}{75} = 0.03$ طول موج کے برابر ہے۔

ان معلومات کے ساتھ اب شکل 11.13 کے سمتھ نقشے کا سہارا لیتے ہیں۔ بلند تر برقی دباؤ کے نقطے پر داخلی قدرتی

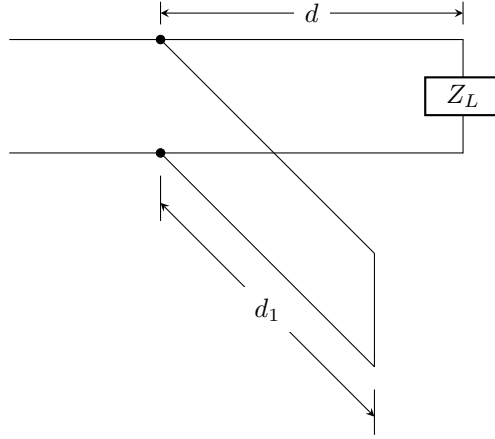


شکل 11.13: اگر 0.03λ لمبی تار پر $s = 2.5 + j0$ ، اعلیٰ z ہو تب $z = 2.1 + j0.8$ ہوگا۔

رکاوٹ حقیقی عدد ہوتا ہے جس کی قیمت sR_0 کے برابر ہوتی ہے، لہذا ایسے نقطے پر $s = 2.5$ ، اعلیٰ z ہو گا۔ ہم یوں سمجھتے ہیں کہ $s = 2.5$ ، اعلیٰ z نقطے پر داخل ہوتے ہیں جہاں سے منجانب جزئی فاصلہ 0.25λ پڑھا جاتا ہے۔ اس سے 0.03λ منفی کرتے ہوئے برقی بوجھ تک پہنچتے ہیں، لہذا 0.22λ سے مرکز تک لکیر اور $s = 2.5$ یعنی $|\Gamma|$ اس کے دائرے کے ملاپ سے $z = 2.1 + j0.8$ پڑھا جاتا ہے۔ یوں $Z_L = 105 + j40 \Omega$ حاصل ہوتا ہے۔ یاد رہے کہ ہم نے برقی بوجھ کو فیتے پر -11.5 cm یا اس نقطے سے $\frac{n\lambda}{2}$ فاصلے پر تصور کیا ہے۔ چونکہ برقی بوجھ کا مقام اب بھی مکمل طور پر معلوم نہیں ہے لہذا بہتر یہ ہوتا ہے کہ تجرباتی نتائج سے حاصل Z_L کی بات کرتے ہوئے برقی بوجھ کا فرض کردہ مقام بھی ساتھ بتلایا جائے۔

آخر میں آئیں اس برقی بوجھ کو 50Ω ترسیلی تار کے ہمہ رکاوٹ بنانے کی ترکیب دیکھیں۔ ایسا d_1 لمبائی کے قصر دور تار کے ٹکڑے کو برقی بوجھ سے d فاصلے پر نسب کرنے سے ممکن بنایا جاتا ہے۔ ایسا شکل 11.14 میں دکھایا گیا ہے۔ برقی بوجھ سے d فاصلے پر z کے متوازی d_1 لمبی قصر دور ٹکڑا نسب کرنے سے کل رکاوٹ $z = 1 + j0$ حاصل کرنے مقصد ہے۔ یہاں d_1 اور d مطلوب ہیں۔ قصر دور ٹکڑے کی قدرتی رکاوٹ ترسیلی تار کے قدرتی رکاوٹ 50Ω کے برابر ہے۔

برقی بوجھ اور قصر دور تار کا ٹکڑا متوازی جڑے ہیں۔ متوازی جڑے رکاوٹوں کی بجائے متوازی جڑے برقی فراوانی کے ساتھ کام کرنا زیادہ آسان ہوتا ہے لہذا ہم ایسا ہی کرتے ہیں۔ برقی فراوانی کی زبان میں موجودہ مسئلہ کچھ یوں ہے۔ ہم d اتار رکھنا چاہتے ہیں کہ داخلی فراوانی $1 + jb$ ، اعلیٰ y ہو۔ اب اگر اعلیٰ y کے متوازی jb - برقی تاثیریت جوڑی

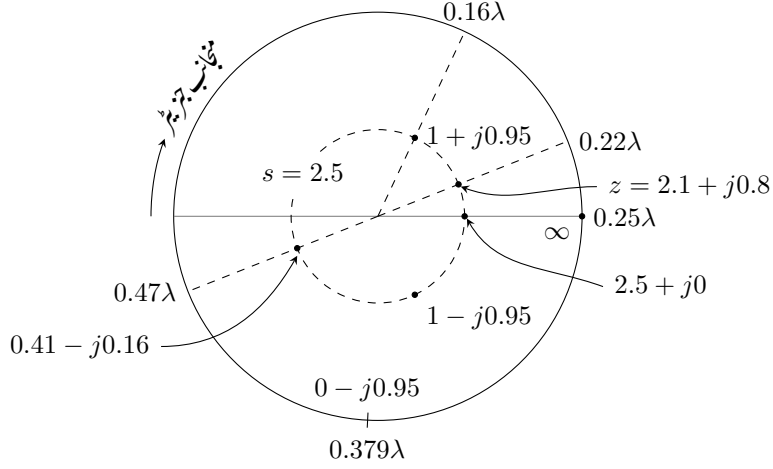


شکل 11.14: برقی بوجھ سے d فاصلے پر d_1 لمبائی کے قصر دور تار کا ٹکڑا جوڑنے سے برقی بوجھ اور ترسیلی تار ہمہ رکاوٹ بنائے جاتے ہیں۔

جائے تو حاصل کل برقی فراوانی $1 + j0$ ہوگی جو ہمارا مقصد ہے۔ یوں d_1 لمبی قصر دور تار کے ٹکڑے کی برقی تاثیریت $-jb$ درکار ہے۔ ان حقائق کو لے کر سمتھ نقشے کی مدد سے d اور d_1 کی قیمتیں حاصل کرتے ہیں۔

سمتھ نقشے میں $z = 2.1 + j0.8$ پر داخلی ہو کر مساوات 11.51 کے تحت منجانب جزیر 0.25λ گھومنے سے $y = \frac{1}{z}$ حاصل ہوتا ہے۔ شکل 11.15 میں ایسا دکھایا گیا ہے۔ سمتھ نقشے میں $z = 2.1 + j0.8$ منجانب جزیر 0.22λ زاویے پر پلایا جاتا ہے۔ یہاں سے منجانب جزیر 0.25λ گھومتے ہوئے 0.47λ تک پہنچا جاتا ہے جہاں $|\Gamma|$ ارداس کے دائرے سے $y = 0.41 - j0.16$ ملتا ہے۔ اب ہم چاہتے ہیں کہ یہاں سے منجانب جزیر گھومتے ہوئے داخلی قدرتی فراوانی $1 + jb$ حاصل ہو۔ جیسا شکل میں دکھایا گیا ہے، ایسا 0.16λ اور 0.34λ زاویوں پر ممکن ہے جہاں سے بالترتیب $y_1 = 1 + j0.95$ اور $y_2 = 1 - j0.95$ حاصل ہوتے ہیں۔ پہلے نقطے تک پہنچنے کے لئے کم لمبی تار درکار ہے لہذا اسی کو جواب تسلیم کرتے ہیں۔ برقی بوجھ سے اس نقطے تک $0.19\lambda = 0.16\lambda + (0.5\lambda - 0.47\lambda)$ تار درکار ہوگی لہذا $d = 0.19\lambda$ یعنی 14.25 cm بنتا ہے۔

اب $1 + j0.95$ کے متوازی $y_{\text{کل}} = -j0.95$ برقی تاثیریت جوڑ کر $1 + j0$ حاصل ہوگا۔ مساوات 11.54 کے تحت قصر دور ٹکڑے کی داخلی رکاوٹ یا داخلی فراوانی خیالی عدد ہوتا ہے لہذا سمتھ نقشے پر ایسے ٹکڑے کا $g = 0$ ہی رہے گا جو نقشے کی بیرونی دائرے کو ظاہر کرتی ہے۔ عین قصر دور پر $y = \infty$ حاصل ہوتا ہے جو منجانب جزیر 0.25λ پر پلایا جاتا ہے۔ ہم دیکھتے ہیں کہ $y_{\text{داخلی}} = -j0.95$ نقشے پر منجانب جزیر 0.379λ پر حاصل ہوتا ہے۔ یوں کسے دور ٹکڑے کی لمبائی $0.129\lambda = 0.379\lambda - 0.25\lambda$ یعنی 9.67 cm حاصل ہوتا ہے۔

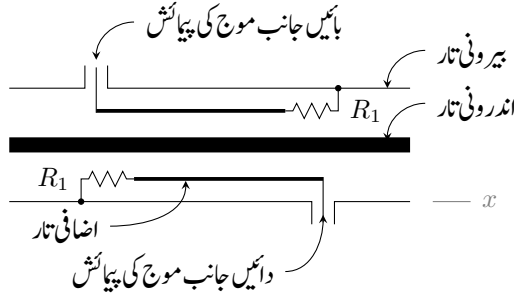


شکل 11.15: برقی بوجھ $z = 2.1 + j0.8$ سے 0.19λ فاصلے پر 0.129λ لمبائی کا قصر دور ٹکڑا جوڑنے سے نظام ہمہ رکاوٹ ہو جاتا ہے۔

مشق 11.4: بے ضیاع 50Ω ترسیلی تار کو قصر دور کرنے سے برقی دباؤ کے دو آپس میں قریبی نشیب اور 12 cm اور 27 cm پر پائے جاتے ہیں۔ قصر دور ختم کرتے ہوئے یہاں برقی بوجھ نسب کرنے سے $0.4 V$ حیطے کے نشیب اور $0.72 V$ حیطے کے چوٹیاں حاصل ہوتی ہیں۔ ایک عدد نشیب 9 cm پر حاصل ہوتا ہے۔ ترسیلی تار میں ہوا بطور ذو برق استعمال ہوا ہے۔ مندرجہ ذیل حاصل کریں۔ λ ، f ، s اور Γ اور Z_L

جوابات: $0.3 m$ ، $1 GHz$ ، 1.8 ، $0.286/108^\circ$ اور $36.5 + j21.6 \Omega$

مشق 11.5: بے ضیاع 50Ω کے ساتھ $Z_L = 100 + j100 \Omega$ کا برقی بوجھ نسب ہے۔ برقی بوجھ سے d فاصلے پر d_1 لمبائی کا قصر دور ٹکڑا جوڑتے ہوئے نظام کو ہمہ رکاوٹ بنایا جاتا ہے۔ اگر تار پر $v = \frac{2}{3}c$ ہو جبکہ اشارے کی تعدد 10 MHz ہو تب مندرجہ ذیل حاصل کریں۔ λ ، چھوٹے سے چھوٹا d_1 اور ایسی صورت میں d



شکل 11.16: پیمائش شرح ساکن موج

جوابات: 20 m، 1.8 m اور 4.4 m

11.6 پیمائش شرح ساکن موج

شرح ساکن موج ناپنے کے لئے شکاف دار تار استعمال کرنا شکل 11.12 میں دکھایا گیا۔ شرح ساکن موج ناپنے کے لئے مخصوص آلہ شکل 11.16 میں دکھایا گیا ہے جسے ہم پیمائش شرح ساکن موج¹⁶ کہیں گے۔ اس شکل میں x محدود پر پڑی، ہم محوری تار کے اندر دو عدد اضافی موصل تار رکھے گئے ہیں۔ بالائی اضافی تار کے دائیں سرے کو مزاحمت R_1 کے ذریعہ بیرونی تار کے ساتھ جوڑا گیا ہے جبکہ اس کا بائیں سرہ بیرونی تار میں سوراخ سے باہر نکالا گیا ہے۔ اس اضافی تار کی لمبائی l جبکہ اس کی قدرتی رکاوٹ R_1 ہے۔ چلی اضافی تار کے بائیں سرے کو مزاحمت R_1 کے ذریعہ بیرونی تار کے ساتھ جوڑا گیا ہے جبکہ اس کا دایاں سرہ بیرونی تار میں سوراخ سے باہر نکالا گیا ہے۔ اس اضافی تار کی لمبائی بھی l اور اس کی قدرتی رکاوٹ R_1 ہے۔

پیمائش کو نفع طاقت اور برقی بوجھ کے درمیان ترسیلی تاروں کے ذریعہ نسبت کیا جاتا ہے۔ تصور کریں کہ نفع طاقت بائیں جانب جڑا ہے جبکہ برقی بوجھ دائیں جانب جڑی ہے۔ یوں ہم محوری تار میں نفع سے برقی بوجھ کی جانب آمدی موج حرکت کرے گی جبکہ برقی بوجھ سے نفع کی جانب انعکاسی موج حرکت کرے گی۔ آمدی موج دونوں اضافی تاروں

directional coupler¹⁶

میں بھی برقی بوجھ کی جانب حرکت کرتی موج پیدا کرے گی۔ بالائی تار میں یہ موج مزاحمت R_1 پر اختتام پذیر ہو گی۔ چونکہ اضافی تار کی قدرتی رکاوٹ بھی R_1 ہے لہذا تار کے دائیں سرے پر انعکاس نہیں ہو پائے گا۔ نچلی اضافی تار میں دائیں جانب حرکت کرتا میدان برقی دباؤ $v_i = E_{xil}$ پیدا کرے گا جو تار کے باہر نکالے گئے سرے پر پایا جائے گا۔ یوں آمدی موج صرف نچلی تار میں برقی دباؤ پیدا کرتی ہے۔ اسی طرح انعکاسی موج بھی دونوں اضافی تاروں میں حرکت کرتی موج پیدا کرتی ہے۔ نچلی اضافی تار میں ایسی موج R_1 پر اختتام پذیر ہوتی ہے جبکہ بالائی اضافی تار میں یہ $v_r = E_{xrl}$ برقی دباؤ پیدا کرتی ہے جسے تار کے باہر نکالے گئے سرے پر ناپا جاسکتا ہے۔ اگر اضافی تاروں کی لمبائی اور موٹائی بالکل برابر ہو اور انہیں ہم محوری تار کے اندر بالکل یکساں جگہوں پر رکھا جائے تب دونوں اضافی تاروں میں پیدا برقی دباؤ آمدی اور انعکاسی امواج کے مماثل ہو گی۔ یوں شرح انعکاس کو

$$(11.56) \quad |\Gamma| = \frac{v_r}{v_i}$$

اور شرح ساکن موج کو

$$(11.57) \quad s = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|}$$

سے ناپا جاسکتا ہے۔

پہا کے استعمال سے تبدیلی مزاحمت کے شرح ساکن موج پر اثرات کو دیکھا جاتا ہے۔ اسی طرح ایسی منبع طاقت جو تعدوی پٹی پر طاقت پیدا کر سکتا ہو کے استعمال سے تعدد بالمقابل s دیکھا جاتا ہے۔

11.7 تجزیہ عارضی حال

اب تک ہم ترسیلی تار میں کسی ایک تعدد پر، برفوار یکساں حال¹⁷ سائن نما امواج کی بات کرتے رہے ہیں۔ اس حصے میں غیر سائن نما امواج کی بات کرتے ہیں۔ آپ جانتے ہیں کہ کسی بھی غیر سائن نما موج کو فوریر تسلسل کی مدد سے متعدد اجزاء کا مجموعہ لکھا جاسکتا ہے جہاں ہر جزو کی تعدد مختلف ہوتی ہے۔ کسی بھی ترسیلی تار کے مستقل R ، L ، C اور G از خود تعدد پر منحصر ہوتے ہیں۔ اس کی مثال، ہم محوری تار کی مزاحمت ہے جو موٹائی جلد پر منحصر ہے جہاں موٹائی جلد کا دارومدار از خود تعدد پر ہے۔ ترسیلی تار میں موج کی رفتار ان مستقل پر منحصر ہے لہذا

¹⁷ steady state

مختلف تعدد کے امواج تار میں مختلف رفتار سے حرکت کریں گے۔ یوں غیر سائن نما موج کے فوریہ اجزاء مختلف رفتار سے حرکت کریں گے جس سے موج کی صورت برقرار نہیں رہ پائے گی۔ حرکت کے دوران موج کی صورت بگڑنے کو انتشار¹⁸ کہا جاتا ہے۔ فوریہ تسلسل کے انفرادی رفتار v_p کو دوری رفتار¹⁹ کہا جاتا ہے جبکہ منتشر ہوتے موج کی رفتار v_g کو مجموعی رفتار²⁰ کہا جاتا ہے۔ اس کتاب میں اثر انتشار سے پاک امواج پر غور کیا جائے گا۔ یوں دوری رفتار اور مجموعی رفتار برابر ہوں گے۔ اس رفتار کو v لکھتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ وقت t میں ایسی موج vt فاصلہ طے کرے گی۔

غیر سائن نما امواج میں مستطیل موج نہایت اہمیت کی حامل ہے۔ عددی²¹ اشارات یعنی صفر اور ایک کو عددی ادوار میں $0V$ اور $5V$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ عددی صفر سے عددی ایک یا عددی ایک سے عددی صفر کو سیڈھی نما تقاضا ظاہر کرتی ہے جبکہ صفر سے ایک اور واپس صفر کو مستطیل تقاضا ظاہر کرتی ہے۔ یہ مستطیل یا سیڈھی نما اشارات، تریسلی تاروں کے ذریعہ ایک جگہ سے دوسری جگہ منتقل ہوتے ہیں۔ یہ اشارات عموماً بلا ترتیب ہوتے ہیں۔ آئیں ایسی ہی ایک عددی سیڈھی نما اشارے کی تریسلی پر غور کریں۔ اس طرز کے تجربے کو عارضی رد عمل²² کہا جاتا ہے۔

شکل 11.17 میں Z_0 قدرتی رکاوٹ کا تریسلی تار Z_0 برقی بوجھ کو طاقت فراہم کرنے کے لئے استعمال کیا جا رہا ہے۔ منبع طاقت کی اندرونی رکاوٹ صفر کے برابر ہے۔ لمحہ $t = 0$ پر سوئچ کو چالو حالت میں کرتے ہوئے منبع کو تریسلی تار کے ساتھ جوڑا جاتا ہے جس سے تریسلی تار کا داخلی سرا V_0 برقی دباؤ پر پہنچ جاتا ہے۔ تریسلی تار کا بقایا حصہ اور برقی بوجھ فی الحال $0V$ پر ہی رہتے ہیں۔ سوئچ کو چالو حالت میں ہی رکھا جاتا ہے۔ تار کے داخلی سرے پر لاگو برقی دباؤ رفتار v سے اختتامی جانب حرکت کرے گی۔ یوں لمحہ t پر یہ موج vt فاصلہ طے کر چکی ہو گی لہذا منبع سے فاصلہ vt تک تریسلی تار پر اب برقی دباؤ V_0 ہو گا جبکہ بقایا تار اب بھی صفر برقی دباؤ پر ہو گا۔ شکل 11.17 میں لمحہ t پر منبع کے ساتھ تریسلی تار کی vt لمبائی حصے کو موٹی لکیر سے دکھایا گیا ہے جبکہ بقایا تار کو پٹی لکیر سے ظاہر کیا گیا ہے۔ نقطہ دار لکیر اس مقام کو ظاہر کر رہی ہے جہاں برقی دباؤ کی موج V^+ پہنچ پائی ہے۔ موج کے حیطے کی قیمت $V^+ = V_0$ ہو گی۔ تار پر برقی دباؤ کی صورت سیڈھی نما تفاعل²³ ہے۔ تریسلی تار کی لمبائی l ہونے کی صورت میں برقی دباؤ کی موج، برقی بوجھ تک $\frac{l}{v}$ دورانیے میں پہنچے گی جہاں v موج کی مجموعی رفتار ہے۔ اس دورانیے میں عارضی صورت حال²⁴ پائی جاتی ہے۔ چونکہ برقی بوجھ کی قیمت عین تریسلی تار

dispersion¹⁸
phase velocity¹⁹
group velocity²⁰
digital²¹
transient response²²
step function²³
transient state²⁴

کے قدرتی رکاوٹ کے برابر ہے لہذا $\Gamma = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = 0$ ہو گا۔ یوں تار کے اختتامی سرے پر انعکاسی موج پیدا نہیں ہوگی۔ اس طرح سوئچ چالو حالت میں کرنے کے ٹھیک $\frac{1}{v}$ دیر بعد برقی بوجھ پر منبع کی برقی دباؤ V_0 پائی جائے گی۔ برقی بوجھ پر اس کے بعد برقی دباؤ برقرار V_0 قیمت پر رہتا ہے۔

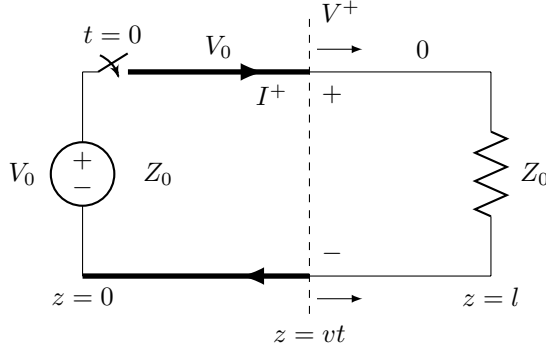
برقی دباؤ کی موج کے ساتھ ساتھ برقی رو کی موج بھی پائی جاتی ہے۔ یوں لمحہ $t = 0$ پر سوئچ چالو حالت میں کرتے ہی ترسیلی تار کے داخلی سرے پر I^+ برقی رو کی موج پیدا ہوگی جہاں $I^+ = \frac{V^+}{Z_0}$ کے برابر ہے۔ اگرچہ موصل تار میں برقی رو، منفی بار کے حرکت سے پیدا ہوتی ہے، روایتی برقی رو²⁵ کو مثبت بار کے حرکت سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ شکل 11.17 میں روایتی برقی رو ہی دکھائی گئی ہے۔ یوں مثبت تار میں برقی رو کی سمت منبع سے برقی بوجھ کی جانب ہے جبکہ منفی تار میں اس کی سمت برقی بوجھ سے منبع کی جانب ہے۔ دھیان رہے کہ برقی رو صرف اور صرف نقطہ دار لکیر کے اس طرف پائی جاتی ہے جس طرف منبع نسب ہے۔ یوں اس شکل میں مثبت تار میں منبع سے لے کر نقطہ دار لکیر تک مثبت برقی رو پائی جائے گی جبکہ نقطہ دار لکیر کے دوسری جانب برقی رو صفر کے برابر ہوگی۔ تار کے اس حصے کو موٹی لکیر سے دکھایا گیا ہے جس میں برقی رو پائی جاتی ہے۔ سوئچ چالو کرنے کے ٹھیک $\frac{1}{v}$ دیر بعد برقی بوجھ میں برقرار $\frac{V_0}{Z_0}$ برقی رو پائی جائے گی۔

شکل 11.17 میں نقطہ دار لکیر کے دائیں جانب برقی دباؤ صفر کے برابر ہے۔ اس جانب ترسیلی تار کو برقی گیر (کپیسٹر) تصور کرتے ہوئے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ تار کا یہ حصہ بے بار ہے۔ اس کے برعکس نقطہ دار لکیر کے بائیں جانب برقی دباؤ V_0 ہے۔ یوں تار کا یہ حصہ بار بردار ہے۔ مثبت تار پر برقی رو، مثبت بار کو نقطہ دار لکیر کے دائیں جانب منتقل کر رہی ہے۔ اسی طرح منفی تار پر برقی رو، نقطہ دار لکیر کے دائیں جانب حصے سے مثبت بار نکال رہی ہے۔ اس طرح نقطہ دار لکیر کے قریب دائیں جانب تار بار بردار ہو رہا ہے جس کی وجہ سے اس حصے کی برقی دباؤ بڑھتی ہے۔ یہی برقی موج ہے۔

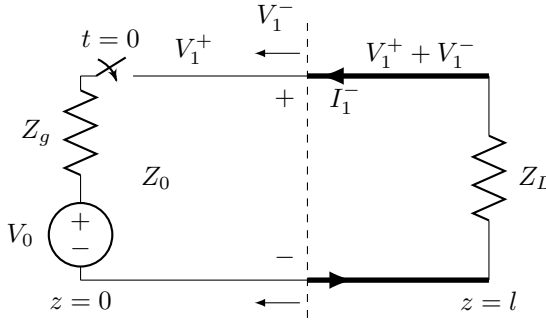
آپ دیکھ سکتے ہیں کہ سوئچ چالو کرنے سے $\frac{1}{v}$ تک کے عارضی دورانیے کے دوران کرحوف²⁶ کے قوانین کارآمد نہیں ہیں۔ عارضی دورانیہ گزرنے کے بعد برقرار یکساں صورت حال پائی جاتی ہے لہذا کرحوف کے قوانین اب قابل استعمال ہوں گے۔ کرحوف کے قانون کے تحت دور میں یک سمتی برقی رو $\frac{V_0}{Z_0}$ پائی جائے گی۔

آئیں اب برقی بوجھ کی قیمت اور ترسیلی تار کی قدرتی رکاوٹ برابر نہ رکھتے ہوئے مسئلے پر دوبارہ غور کریں۔ شکل 11.18 میں ایسا ہی دور دکھایا گیا ہے جس میں منبع کی داخلی رکاوٹ بھی شامل کی گئی ہے۔ لمحہ $t = 0$ پر سوئچ کو

conventional current²⁵
Kirchoff's laws²⁶



شکل 11.17: تزیلی تار میں ابتدائی موج۔



شکل 11.18: عمومی برقی بوجھ سے لدے تزیلی تار میں ابتدائی موج۔

چالو حالت کر دیا جاتا ہے جس سے تزیلی تار کے داخلی سرے پر $V_1 = \frac{Z_0 V_0}{Z_0 + R_g}$ برقی دباؤ نمودار ہو گا۔ یہ برقی دباؤ بطور موج V_1^+

$$(11.58) \quad V_1^+ = \frac{Z_0 V_0}{Z_0 + Z_g}$$

برقی بوجھ کی جانب حرکت کرے گی۔

تار کے اختتام پر $Z_0 \neq Z_L$ کی وجہ سے انعکاسی موج V_1^- پیدا ہوگی جہاں

$$\frac{V_1^-}{V_1^+} = \Gamma_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$$

کے برابر ہے۔ انعکاسی موج برقی بوجھ سے منع کی جانب حرکت کرتی ہے۔ اس موج سے منع کی جانب V_1^+ برقی دباؤ پایا جاتا ہے جبکہ دوسری جانب $V_1^+ + V_1^-$ برقی دباؤ ہوگا۔ انعکاسی موج V_1^- منع پر پہنچ کر دو درجی منعکس موج V_2^+ پیدا کرے گی جہاں

$$\frac{V_2^+}{V_1^-} = \Gamma_g = \frac{Z_g - Z_0}{Z_g + Z_0}$$

کے برابر ہے۔ اس کو

$$V_2^+ = \Gamma_g V_1^- = \Gamma_g \Gamma_L V_1^+$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اب V_2^+ موج جب برقی بوجھ تک پہنچے گی تو یہ

$$V_2^- = \Gamma_L V_2^+$$

پیدا کرے گی۔

اسی ترتیب کو بار بار استعمال کرتے ہوئے کسی بھی لمحے پر عارضی صورت حال دریافت کیا جاسکتا ہے۔ متعدد انعکاس کے بعد برقی بوجھ پر برقی دباؤ

$$\begin{aligned} V_L &= V_1^+ + V_1^- + V_2^+ + V_2^- + V_3^+ + V_3^- + \dots \\ &= V_1^+ (1 + \Gamma_L + \Gamma_g \Gamma_L + \Gamma_g \Gamma_L^2 + \Gamma_g^2 \Gamma_L^2 + \Gamma_g^2 \Gamma_L^3 + \dots) \end{aligned}$$

ہوگا جسے

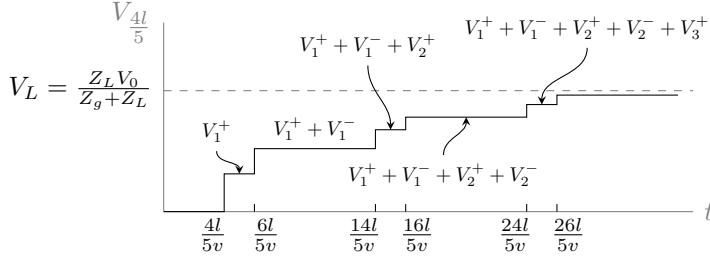
$$V_L = V_1^+ (1 + \Gamma_L) (1 + \Gamma_g \Gamma_L + \Gamma_g^2 \Gamma_L^2 + \dots)$$

لکھا جاسکتا ہے۔ آپ جانتے ہیں کہ $1 + r + r^2 + r^3 + \dots + r^{n-1} = \frac{1-r^n}{1-r}$ کے برابر ہے۔ یہی کلیہ مندرجہ بالا مساوات کے آخری قوسین پر لاگو کرتے ہوئے لامحدود انعکاس کے بعد

$$V_L|_{t \rightarrow \infty} = V_1^+ \left(\frac{1 + \Gamma_L}{1 - \Gamma_g \Gamma_L} \right)$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں لمبی دورانیہ $t \rightarrow \infty$ کی صورت میں $n \rightarrow \infty$ اور $\Gamma_g^n \Gamma_L^n \rightarrow 0$ ہوں گے۔ اس مساوات میں $\Gamma_g = \frac{Z_g - Z_0}{Z_g + Z_0}$ اور $\Gamma_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$ پر کرتے ہوئے مساوات 11.58 کے استعمال سے

$$V_L|_{t \rightarrow \infty} = \frac{Z_L V_0}{Z_g + Z_L}$$



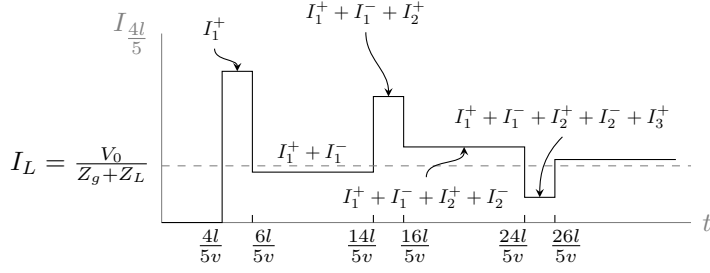
شکل 11.19: عارضی دورانیے کی برقی دباؤ بالمقابل برقی دباؤ۔

حاصل ہوتا ہے جو برقرار یکساں حالت کی صورت میں برقی بوجھ پر برقی دباؤ ہے۔ یہی جواب کر خوف کے قانون سے بھی حاصل ہوتا ہے جس میں ترسیلی تار کی قدرتی رکاوٹ کا کوئی کردار نہیں پایا جاتا۔

اب شکل 11.18 میں عارضی دورانیے کے دوران ترسیلی تار پر $z = \frac{4l}{5}$ کے مقام پر برقی دباؤ بالمقابل وقت کا خط کھینچتے ہیں۔ اس شکل میں Z_g ، Z_L اور Z_0 کو حقیقی اعداد تصور کرتے ہیں۔ اس کے ساتھ ساتھ $Z_g > Z_0$ اور $Z_L > Z_0$ تصور کیا گیا ہے۔ یوں $\Gamma_g > 0$ اور $\Gamma > 0$ حاصل ہوتے ہیں۔ شکل 11.19 کو دیکھ کر آگے پڑھیں۔

سوچ کو لمحہ $t = 0$ پر چالو حالت کیا جاتا ہے جس سے ترسیلی تار میں V_1^+ موج پیدا ہوتی ہے۔ یہ موج نقطہ دار لکیر سے ظاہر کردہ مقام تک $\frac{4l}{5v}$ دورانیے میں پہنچتی ہے۔ یوں $t = 0$ تا $t = \frac{4l}{5v}$ اس نقطے پر صفر برقی دباؤ رہتی ہے جبکہ ٹھیک $t = \frac{4l}{5v}$ پر یہاں کی برقی دباؤ V_1^+ ہو جاتی ہے۔ شکل 11.19 میں ایسا ہوتا دکھایا گیا ہے۔ موج V_1^+ نقطہ دار لکیر سے برقی بوجھ تک $\frac{1}{5v}$ دورانیے میں پہنچ کر انعکاس پذیر ہوتی ہے۔ انعکاسی موج کو برقی بوجھ سے نقطہ دار لکیر تک پہنچنے کی خاطر $\frac{1}{5v}$ دورانیہ درکار ہے۔ یوں V_1^- موج نقطہ دار لکیر پر لمحہ $\frac{6l}{5v}$ دیر بعد نقطہ دار لکیر پر برقی دباؤ $V_1^+ + V_1^-$ ہو جاتی ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ آپ شکل 11.19 میں دکھائے گئے تمام صورت حال کو سمجھ پائے ہیں۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ ترسیلی تار کے دونوں سروں پر موج بار بار انعکاس پذیر ہوتی ہے۔ ہر انعکاس کے بعد برقی دباؤ برقرار حال قیمت کے قریب تر ہوتی جاتی ہے۔

ترسیلی تار پر کسی بھی مقام پر برقی رو کی قیمت بھی اسی طرح حاصل کی جاتی ہے۔ برقی دباؤ کی صورت میں اس تار کو مثبت برقی دباؤ پر تصور کیا جاتا ہے جس پر مثبت بار پایا جاتا ہو۔ یوں شکل 11.18 میں V_1^+ اور V_1^- امواج میں بالائی تار مثبت برقی دباؤ پر ہیں۔ اسی شکل میں گھڑی کی سمت میں گھومتی برقی رو کو مثبت تصور کیا جاتا ہے جبکہ گھڑی



شکل 11.20: عارضی دورانیے کی برقی رو بالقابل برقی دباؤ۔

کے الٹ سمت گھومتی برقی رو کو منفی تصور کیا جاتا ہے۔ یوں I_1^+ مثبت جبکہ I_1^- منفی برقی رو ہے۔ یوں ترسیلی تار میں دونوں جانب حرکت کرتی برقی دباؤ کی موج کو مثبت تصور کیا جاتا ہے جبکہ برقی رو کے امواج مثبت یا منفی ممکن ہیں۔ برقی رو اور برقی دباؤ کا عمومی تعلق

$$I_1^+ = \frac{V_1^+}{Z_0}$$

$$I_1^- = -\frac{V_1^-}{Z_0}$$

ہے۔ اس طرح

$$I_1^+ = \frac{V_1^+}{Z_0}, \quad I_1^- = -\frac{V_1^-}{Z_0}$$

$$I_2^+ = \frac{V_2^+}{Z_0}, \quad I_2^- = -\frac{V_2^-}{Z_0}$$

$$I_3^+ = \frac{V_3^+}{Z_0}, \quad I_3^- = -\frac{V_3^-}{Z_0}$$

لکھے جائیں گے۔

شکل 11.19 کو دیکھتے ہوئے شکل 11.20 حاصل کیا گیا ہے۔ اس شکل میں یہ دلچسپ حقیقت سامنے آتی ہے کہ سوئچ چالو کرنے کے لمحے پر برقی رو برقرار حالت یکساں برقی رو سے زیادہ ہے۔ دراصل Z_g ، Z_L اور Z_0 کے قیمت ایسے چنے جا سکتے ہیں کہ ابتدائی برقی دباؤ یا ابتدائی برقی رو کی قیمت برقرار حالت قیمتوں سے زیادہ یا کم ہو۔

مثال 11.3: شکل 11.18 میں $Z_L = 100 \Omega$ ، $V_0 = 5 \text{ V}$ ، $v = 0.8c$ ، $l = 240 \text{ m}$ اور $Z_0 = 50 \Omega$ ہیں۔ سوئچ کو $t = 0$ پر چالو حالت میں کر دیا جاتا ہے۔ عارضی دورانیے میں برقی بوجھ اور منبع پر برقی دباؤ بالمتقابل وقت اور برقی رو بالمتقابل وقت کے خط کھینچیں۔

حل: ان قیمتوں سے شرح انعکاس

$$\Gamma_g = \frac{50 - 50}{50 + 50} = 0$$

$$\Gamma_L = \frac{100 - 50}{100 + 50} = \frac{1}{3}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ لمحہ $t = 0$ پر سوئچ چالو کرنے سے منبع کو Z_0 نظر آتا ہے لہذا

$$V_1^+ = \frac{Z_0 V_0}{Z_g + Z_0} = \frac{50 \times 5}{50 + 50} = \frac{5}{2} \text{ V}$$

$$I_1^+ = \frac{V_0}{Z_g + Z_0} = \frac{5}{50 + 50} = \frac{1}{20} \text{ A}$$

ہوں گے۔ تریسلی تار میں رفتار موج $v = 0.8 \times 3 \times 10^8 = 2.4 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ہے لہذا یہ امواج

$$t = \frac{l}{v} = \frac{240}{2.4 \times 10^8} = 1 \mu\text{s}$$

دورانیے میں برقی بوجھ تک پہنچیں گی۔ برقی بوجھ سے انعکاس پذیر امواج

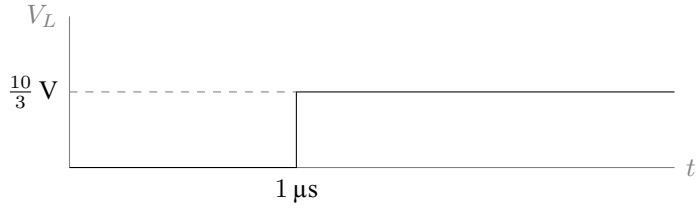
$$V_1^- = \Gamma_L V_1^+ = \frac{1}{3} \times \frac{5}{2} = \frac{5}{6} \text{ V}$$

$$I_1^- = -\frac{V_1^-}{Z_0} = -\frac{1}{60} \text{ A}$$

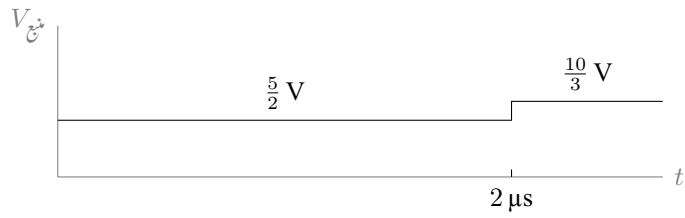
ہیں۔ یوں سوئچ چالو کرنے کے $1 \mu\text{s}$ دیر بعد برقی بوجھ پر کل برقی دباؤ اور برقی رو

$$V_1^+ + V_1^- = \frac{5}{2} + \frac{5}{6} = \frac{10}{3} \text{ V}$$

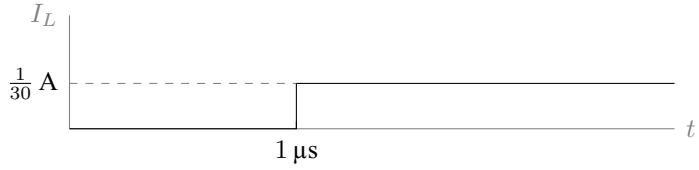
$$I_1^+ + I_1^- = \frac{1}{20} - \frac{1}{60} = \frac{1}{30} \text{ A}$$



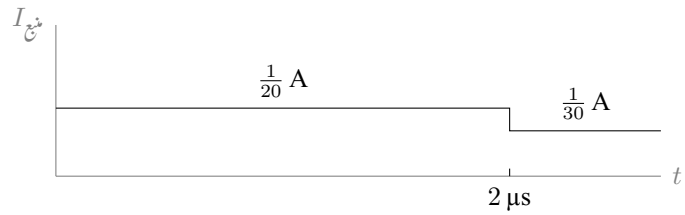
شکل 11.21: برقی بوجھ پر برقی دباؤ۔



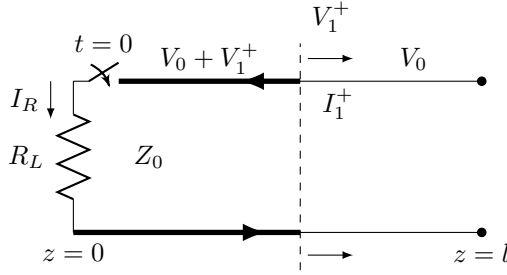
شکل 11.22: منبع کے خارجی سروں پر برقی دباؤ۔



شکل 11.23: برقی بوجھ کی برقی رو۔



شکل 11.24: منبع کی برقی رو۔



شکل 11.25: تریسلی تار سے مستطیل پتلا اشارہ حاصل کیا جاسکتا ہے۔

ہوں گے۔ سوئچ چالو کرنے کے $2 \mu\text{s}$ دیر بعد انعکاسی امواج منبع تک واپس پہنچیں گی۔ چونکہ $\Gamma_g = 0$ ہے لہذا منبع سے کوئی موج انعکاس پذیر نہیں ہوگی۔ اس طرح سوئچ چالو کرنے کے $2 \mu\text{s}$ دیر بعد منبع پر برقی دباؤ اور برقی رومندرجہ بالا قیمتیں اختیار کر لیں گے۔ اس کے بعد یہی قیمتیں برقرار رہیں گے۔

عارضی دورانیے کا ایک اہم مسئلہ شکل 11.25 میں دکھایا گیا ہے جہاں $z = 0$ پر برقی بوجھ R_L جوڑا جاسکتا ہے جبکہ $z = l$ پر تار کا سرا کھلا رکھا جاتا ہے۔ بار بردار تار پر V_0 مثبت برقی دباؤ پایا جاتا ہے جبکہ تار کی قدرتی رکاوٹ Z_0 ہے۔ آئیں اس کی کارکردگی پر غور کریں۔ سوئچ چالو کرتے ہی تار سے بار کا انحصار R_L راستہ شروع ہو جاتا ہے۔ تار میں کثافت بار کی کمی سے تار میں برقی دباؤ کم ہوتا ہے۔ شکل 11.25 میں سوئچ بند کرنے کے کچھ ہی دیر بعد کی صورت حال دکھائی گئی ہے۔ سوئچ چالو کرنے سے پیدا ہونے والی موج کا مقام نقطہ دار لکیر دکھا رہی ہے۔ اس لکیر کے دائیں جانب برقی دباؤ V_0 اور بار ساکن ہے جبکہ لکیر کے بائیں جانب بار حرکت میں ہے اور برقی دباؤ $V_0 + V_1^+$ ہے۔ چونکہ نقطہ دار لکیر کے بائیں جانب تار پر کثافت بار کم ہے لہذا اس طرف برقی دباؤ بھی کم ہوگا، جس سے صاف ظاہر ہے کہ V_1^+ کی قیمت منفی ہوگی۔ نقطہ دار لکیر کے دائیں جانب برقی رومندرجہ کے برابر ہے جبکہ لکیر کے بائیں جانب برقی رومندرجہ منفی ہوتی ہے۔ یہ برقی رومندرجہ کی الٹ سمت ہے لہذا تار میں ابتدائی برقی رومندرجہ کے I_1^+ کی قیمت منفی ہوگی۔ برقی دباؤ کی موج V_1^+ اور برقی رومندرجہ کی موج I_1^+ تریسلی تار میں $z = 0$ سے $z = l$ جانب حرکت کرتی ہے۔ تریسلی تار میں برقی دباؤ اور برقی رومندرجہ صورت

$$-I_R = I_1^+ = \frac{V_1^+}{Z_0}$$

مساوات پر پورا اترتے ہیں۔ مزاحمت R_L پر برقی دباؤ $V_0 + V_1^+$ ہے جو I_R کی وجہ سے ہے۔ یوں برقی بوجھ پر $V_L = I_R R_L$ ہو گا جسے

$$V_L = V_0 + V_1^+ = -I_1^+ R_L = -\frac{V_1^+}{Z_0} R_L$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اس مساوات سے

$$(11.59) \quad V_1^+ = -\frac{Z_0 V_0}{Z_0 + R_L}$$

حاصل ہوتا ہے۔ برقی دباؤ کی ابتدائی موج جانتے ہوئے ہم کسی بھی لمحے کسی بھی نقطے پر برقی دباؤ یا برقی رو حاصل کر سکتے ہیں۔ ایسا ہم کئی مرتبہ کر چکے ہیں۔

زیادہ دلچسپ صورت حال اس وقت پیدا ہوتی ہے جب $R_L = Z_0$ ہو۔ ایسی صورت میں ترسیلی تار کے سروں پر شرح انعکاس

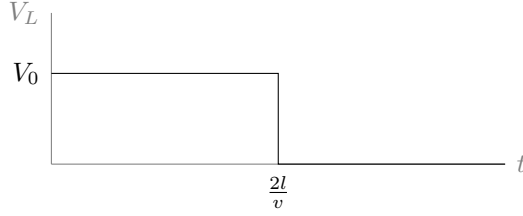
$$\Gamma_{z=0} = 0$$

$$\Gamma_{z=l} = 1$$

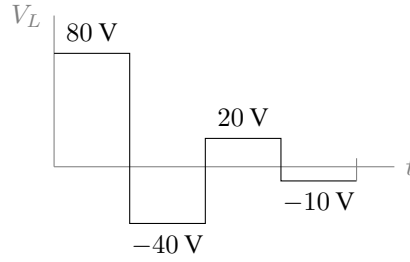
حاصل ہوتے ہیں جہاں $z = l$ پر تار کا سرا کھلے دور ہے۔ مساوات 11.59 سے

$$V_1^+ = -\frac{V_0}{2}$$

حاصل ہوتا ہے۔ یوں سوئچ چالو کرتے ہی برقی بوجھ پر دباؤ $V_L = V_0 + V_1^+ = \frac{V_0}{2}$ پیدا ہوتا ہے۔ موج V_1^+ کو تار کے دائیں سرے تک پہنچنے کی خاطر $\frac{l}{v}$ وقت درکار ہے جہاں سے یہ انعکاس پذیر ہوگی۔ اس طرح سوئچ چالو کرنے کے ٹھیک $\frac{2l}{v}$ دیر بعد منعکس برقی موج برقی بوجھ پہنچ کر اس پر کل برقی دباؤ کی قیمت $0V$ کر دے گی۔ چونکہ $R_L = Z_0$ ہے لہذا بوجھ سے موج انعکاس پذیر نہیں ہوگی۔ برقی بوجھ پر برقی دباؤ کو شکل 11.26 میں دکھایا گیا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ برقی بوجھ پر بالکل مستطیل برقی دباؤ پائی جاتی ہے۔ انتہائی کم دورانیے کے مستطیل اشارات ترسیلی تار کی مدد سے پیدا کئے جا سکتے ہیں۔ $R_L \neq Z_0$ کی صورت میں موج کئی مرتبہ انعکاس پذیر ہوگی جس سے اشارہ مستطیل شکل کھودے گا۔



شکل 11.26: تریسٹل تار سے حاصل مستطیل پٹلا اشارہ۔



شکل 11.27: بار بار انعکاس پذیر موج سے پیدا برقی دباؤ۔

مثال 11.4: 300Ω کے برقی بوجھ پر 5000 V اور 100 ns دورانیے کا مستطیل اشارہ درکار ہے۔ اس اشارے کو 300Ω کے ہم محوری تار سے حاصل کریں جہاں تار میں موج کی رفتار $0.8c$ ہے۔

حل: اشارے کے دورانیے سے تار کی لمبائی

$$l = \frac{0.8 \times 3 \times 10^8 \times 100 \times 10^{-9}}{2} = 12 \text{ m}$$

حاصل ہوتی ہے۔ ہم محوری تار کو 10 kV برقی دباؤ پر رکھتے ہوئے درکار اشارہ حاصل ہو گا۔

مثال 11.5: شکل 11.25 میں $V_0 = 320 \text{ V}$ ، $Z_0 = 50 \Omega$ ، جبکہ $R_L = \frac{50}{3} \Omega$ ہیں۔ لمحہ $t = 0$ پر سوئچ کو چالو کیا جاتا ہے۔ $0 < t < \frac{8l}{v}$ کے لئے مزاحمت پر برقی دباؤ حاصل کریں۔

حل: اس دورانیے میں موج ترسیلی تار میں چار چکر کاٹے گی۔ دی گئی معلومات سے

$$\Gamma_{z=0} = \frac{\frac{50}{3} - 50}{\frac{50}{3} + 50} = -\frac{1}{2}$$

$$\Gamma_{z=l} = \frac{\infty - 50}{\infty + 50} = 1$$

حاصل ہوتے ہیں۔ یوں

$$V_1^+ = -\frac{50 \times 320}{50 + \frac{50}{3}} = -240 \text{ V}$$

$$V_1^- = \Gamma_{z=l} V_1^+ = -240 \text{ V}$$

ہوں گے۔ اسی طرح

$$V_2^+ = V_2^- = \Gamma_{z=0} V_1^- = 120 \text{ V}$$

$$V_3^+ = V_3^- = \Gamma_{z=0} V_2^- = -60 \text{ V}$$

$$V_4^+ = V_4^- = \Gamma_{z=0} V_3^- = 30 \text{ V}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ ان نتائج کو استعمال کرتے ہوئے

$$V_L = V_0 + V_1^+ = 320 - 240 = 80 \text{ V} \quad (0 < t < \frac{2l}{v})$$

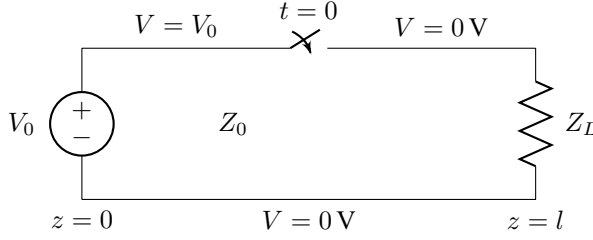
$$= V_0 + V_1^+ + V_1^- + V_2^+ = -40 \text{ V} \quad (\frac{2l}{v} < t < \frac{4l}{v})$$

$$= V_0 + V_1^+ + V_1^- + V_2^+ + V_2^- + V_3^+ = 20 \text{ V} \quad (\frac{4l}{v} < t < \frac{6l}{v})$$

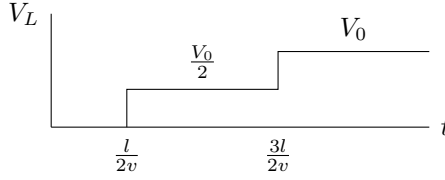
$$= V_0 + V_1^+ + V_1^- + V_2^+ + V_2^- + V_3^+ + V_3^- + V_4^+ = -10 \text{ V} \quad (\frac{6l}{v} < t < \frac{8l}{v})$$

لکھا جاسکتا ہے۔ ان نتائج کو شکل 11.27 میں دکھایا گیا ہے۔

مثال 11.6: شکل 11.28-الف میں ترسیلی تار کے عین درمیان $z = \frac{l}{2}$ پر سوئچ نصب ہے جسے لمحہ $t = 0$ پر چالو کیا جاتا ہے۔ اس دور میں $R_L = Z_0$ ہے جبکہ منبع کی اندرونی مزاحمت 0Ω کے برابر ہے۔ برقی بوجھ پر برقی دباؤ کا خط کھینچیں۔



(0) ترسیلی تار کے عین درمیانے نقطے پر سوئچ کو چالو کیا جاتا ہے۔



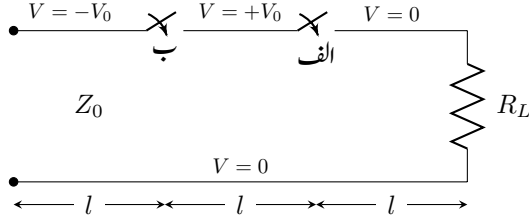
(ب) برقی بوجھ پر برقی دباؤ۔

شکل 11.28: مثال 11.6 کا دور اور اس میں برقی بوجھ پر برقی دباؤ۔

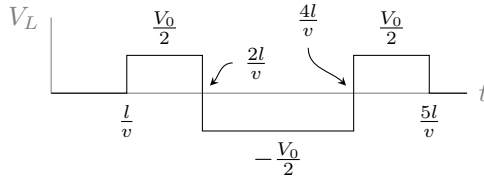
حل: سوئچ سے برقی بوجھ کی جانب ترسیلی تار پر 0V برقی دباؤ ہے جبکہ سوئچ سے منبع کی جانب ترسیلی تار بار بردار ہے جس سے اس جانب کی برقی دباؤ V_0 ہے۔ سوئچ چالو کرنے سے دو برقی موج، سوئچ کے مقام پر، پیدا ہوتی ہیں۔ سوئچ سے برقی بوجھ کی جانب موج کا حیطہ $\frac{V_0}{2}$ جبکہ سوئچ سے منبع کی جانب موج کا حیطہ $-\frac{V_0}{2}$ ہو گا۔ چونکہ $R_L = Z_0$ ہے لہذا برقی بوجھ پر انعکاسی موج پیدا نہیں ہو گی۔ اس کے برعکس منبع پر $\Gamma_g = -1$ کی بنا پر یہاں سے انعکاس ہو گا۔ ان تمام کو مد نظر رکھتے ہوئے ہم لکھ سکتے ہیں۔

$$\begin{aligned} V_L &= 0 & (0 < t < \frac{l}{2v}) \\ &= \frac{V_0}{2} & (\frac{l}{2v} < t < \frac{3l}{2v}) \\ &= V_0 & (\frac{3l}{2v} < t) \end{aligned}$$

ان نتائج کو شکل 11.28-ب میں دکھایا گیا ہے۔



(ا) ترسیلی تار میں دو سوئچ ایک وقت چالو کئے جاتے ہیں۔



(ب) برقی بوجھ پر عارضی دورانیے میں برقی دباؤ کا خط۔

شکل 11.29: مثال 11.7 کا دور اور برقی بوجھ پر برقی دباؤ۔

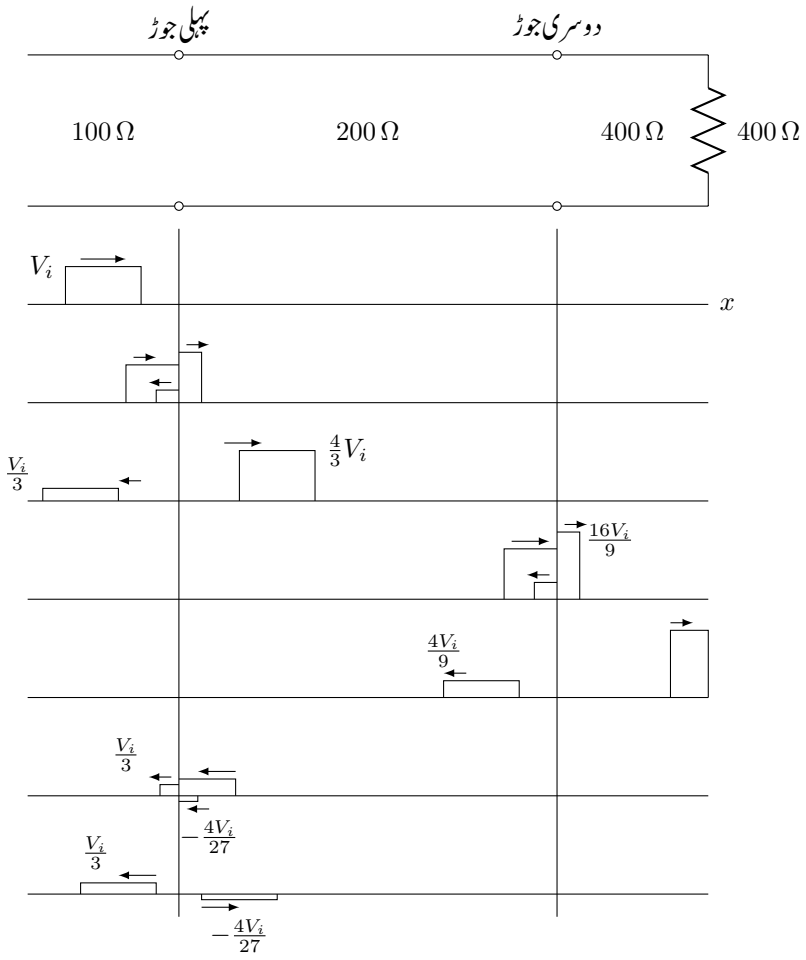
مثال 11.7: شکل 11.29 میں ترسیلی تار میں دو عدد سوئچ نسب ہیں۔ دونوں سوئچ کو لمحہ $t = 0$ پر بیک وقت چالو کیا جاتا ہے۔ $Z_0 = R_L$ کی صورت میں برقی بوجھ پر برقی دباؤ کا خط کھینچیں۔

حل: برقی بوجھ پر $\Gamma_L = 0$ ہے جبکہ ترسیلی تار کے کھلے سر پر $\Gamma = 1$ ہے۔ دو سوئچ چالو کرنے سے کل چار عدد برقی دباؤ کے موج پیدا ہوتے ہیں۔ ان میں سے دو عدد موج برقی بوجھ کی جانب حرکت کرتے ہیں جبکہ بقایا دو عدد موج ترسیلی تار کے کھلے سر کی جانب حرکت کرتے ہیں۔ کھلے سر پر دونوں امواج انعکاس پذیر ہو کر برقی بوجھ کی جانب لوٹتے ہیں۔ برقی بوجھ سے کوئی موج انعکاس پذیر نہیں ہوتی۔

سوئچ۔ الف سے برقی بوجھ جانب $\frac{V_0}{2}$ وولٹ کی موج جبکہ کھلے سر کی جانب $-\frac{V_0}{2}$ وولٹ کی موج حرکت کرتی ہے۔ پہلی موج $t = \frac{l}{v}$ دیر بعد برقی بوجھ تک پہنچتی ہے۔ دوسری موج کھلے سر سے انعکاس پذیر ہو کر برقی بوجھ تک $t = \frac{5l}{v}$ دورانیے میں پہنچتی ہے۔

سوئچ۔ ب سے برقی بوجھ جانب $-V_0$ حیٹے کی موج حرکت کرتے ہوئے برقی بوجھ تک $t = \frac{2l}{v}$ دورانیے میں پہنچتی ہے جبکہ دوسری موج کا حیٹے $+V_0$ ہے اور ترسیلی تار کے کھلے سر سے ہوتے ہوئے برقی بوجھ تک $\frac{4l}{v}$ وقت میں پہنچتی ہے۔ ان حقائق سے برقی بوجھ پر برقی دباؤ کا خط حاصل کیا جاتا ہے جسے شکل 11.29 میں دکھایا گیا ہے۔

شکل 11.30 میں تین مختلف قدرتی رکاوٹ کے ترسیلی تاروں کو سلسلہ وار جوڑا گیا ہے جن کے آخر میں 400Ω کی مزاحمت جڑی ہے۔ بائیں جانب سے ایک عدد مستطیلی اشارہ مزاحمت کی طرف بڑھ رہا ہے۔ میں امید کرتا ہوں کہ آپ شکل میں دئے مختلف لمحات پر صورت حال سمجھ پائیں گے۔



شکل 11.30: ہارپک اشارے کی انعکاس اور ترسیل۔

سوالات

سوال 11.1: تزیلی تار کے مستقل $C = 60 \frac{\text{pF}}{\text{m}}$ اور $G = 80 \frac{\mu\text{S}}{\text{m}}$ ، $L = 4 \frac{\mu\text{H}}{\text{m}}$ ، $R = 20 \frac{\Omega}{\text{m}}$ ہیں۔ اس میں 200 MHz تعدد کی برقی موج حرکت کر رہی ہے۔ الف) α ، β ، λ اور Z_0 حاصل کریں۔ ب) 12 m فاصلہ طے کرنے کے بعد موج کا حیثہ ابتدائی قیمت کی نسبت سے کتنا ہو گا؟ پ) 1.6 m فاصلہ طے کرنے کے بعد موج کا زاویائی فرق کتنا ہو گا؟

جوابات: $\alpha = 0.049 \frac{\text{Np}}{\text{m}}$ ، $\beta = 3.1 \frac{\text{rad}}{\text{m}}$ ، $\lambda = 2.03 \text{ m}$ ، $\gamma = 0.049 + j3.1 \text{ m}^{-1}$ ، $Z_0 = 258 - j2.37 \Omega$ ، 284° ، 55.5%

سوال 11.2: ایک تزیلی تار جس میں موج کی رفتار $3 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ہے کی قدرتی رکاوٹ $Z_0 = 50 \Omega$ ہے۔ تار کے داخلی سروں پر 20 MHz کی موج پیدا کی جا رہی ہے جبکہ اس کا دوسرا سر اقصر دور کیا گیا ہے۔ الف) تار کی لمبائی 3.75 m ہونے کی صورت میں داخلی Z حاصل کریں۔ ب) تار کی لمبائی بالترتیب 7.5 m ، 1.2 m اور 9 m ہونے کی صورت میں داخلی Z حاصل کریں۔

جوابات: ∞ ، 0Ω ، $27.5j \Omega$ ، $36.3j \Omega$

سوال 11.3: بے ضیاع تزیلی تار کی فی میٹر امالہ $0.25 \frac{\mu\text{H}}{\text{m}}$ جبکہ اس کی قدرتی رکاوٹ 75Ω ہے۔ الف) تار کی فی میٹر برقی گنجائش دریافت کریں۔ ب) تار میں موج کی رفتار حاصل کریں۔ پ) موج کی تعدد 50 MHz ہونے کی صورت میں β حاصل کریں۔ ت) تار کے ساتھ 55Ω کا برقی بوجھ منسلک ہے۔ Γ اور s حاصل کریں۔

جوابات: $\Gamma = -\frac{2}{13}$ ، $\beta = 1.05 \frac{\text{rad}}{\text{m}}$ ، $s = \frac{15}{11}$ ، $3 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ، $44.4 \frac{\text{pF}}{\text{m}}$

سوال 11.4: تزیلی تار کی قدرتی رکاوٹ 300Ω ہے۔ موج کی تعدد $6 \times 10^8 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ جبکہ اس کی رفتار $2.8 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ہے۔ الف) تار کی فی میٹر امالہ اور برقی گنجائش حاصل کریں۔ ب) تار پر سلسلہ وار جڑی 150Ω اور $0.8 \mu\text{H}$ کا برقی بوجھ ڈالا جاتا ہے۔ Γ اور s حاصل کریں۔

جوابات: $L = 1.07 \frac{\mu\text{H}}{\text{m}}$ ، $C = 11.9 \frac{\text{pF}}{\text{m}}$ ، $\Gamma = 0.38 + j0.67$ ، $s = 7.49$

سوال 11.5: بے ضیاع ترسیلی تار کی 80 MHz تعدد پر قدرتی رکاوٹ 75Ω اور $\beta = 0.25\pi \frac{\text{rad}}{\text{m}}$ ہیں۔ الف) تار کی L اور C حاصل کریں۔ ب) تار پر $Z_L = 80 + j100 \Omega$ برقی بوجھ لادا جاتا ہے۔ برقی بوجھ سے کتنے فاصلے پر تار کی داخلی رکاوٹ $Z_{\text{داخلی}}$ حقیقی یعنی $Z_{\text{داخلی}} = R + j0$ ہو گا۔

جوابات: $L = 117 \frac{\text{nH}}{\text{m}}$ ، $C = 20.8 \frac{\text{pF}}{\text{m}}$ ، 60.34 cm

سوال 11.6: تعدد $1 \frac{\text{Mrad}}{\text{s}}$ پر ضیاع کار ترسیلی تار کی قدرتی رکاوٹ $Z_0 = 40 + j0 \Omega$ اور حرکی مستقل $\gamma = 2 + j6 \text{ m}^{-1}$ ہیں۔ الف) G ، C ، R اور L حاصل کریں۔

جوابات: $L = 0.24 \frac{\text{mH}}{\text{m}}$ ، $R = 80 \frac{\Omega}{\text{m}}$ ، $C = 150 \frac{\text{nF}}{\text{m}}$ ، $G = 0.05 \frac{\text{S}}{\text{m}}$

سوال 11.7: بے ضیاع ترسیلی تار کی 150 MHz تعدد پر $Z_0 = 80 \Omega$ اور $\beta = 6 \frac{\text{rad}}{\text{m}}$ ہیں۔ تار پر متوازی جڑے 200Ω کی مزاحمت اور 10 pF کی برقی گیر (کپیسٹر) کا برقی بوجھ لادا جاتا ہے۔ الف) L اور C حاصل کریں۔ ب) شرح ساکن موج حاصل کریں۔

جوابات: $L = 0.51 \frac{\mu\text{H}}{\text{m}}$ ، $C = 79.6 \frac{\text{pF}}{\text{m}}$ ، $s = 4.07$

سوال 11.8: منبع برقی دباؤ سلسلہ وار جڑی رکاوٹ $Z = 300 - j300 \Omega$ اور بے ضیاع ترسیلی تار کے ساتھ منسلک ہے۔ ترسیلی تار کا دوسرا سر اس کے دور ہے۔ ترسیلی تار میں طول موج λ ہے۔ الف) منبع برقی دباؤ پر کل 300Ω رکاوٹ مہیا کرنے کی خاطر ترسیلی تار کی لمبائی کتنی رکھی جائے گی۔ ب) ترسیلی تار کی لمبائی کے تمام ممکنہ جواب حاصل کریں۔

جوابات: لمبائی $= \frac{\lambda}{8}$ ، لمبائی $= \frac{\lambda}{8} + \frac{m\lambda}{2}$

سوال 11.9: تعدد 50 MHz کے منبع برقی دباؤ کے ساتھ رکاوٹ $Z_g = 50 + j50 \Omega$ اور بے ضیاع ترسیلی تار سلسلہ وار جڑے ہیں۔ ترسیلی تار کی قدرتی رکاوٹ $Z_0 = 100 \Omega$ ، لمبائی $\frac{\lambda}{4}$ ہے اور یہ برقی بوجھ Z_L کو طاقت فراہم کر رہی ہے۔ الف) برقی بوجھ کی وہ قیمت دریافت کریں جس پر منبع برقی دباؤ کو کل 100Ω رکاوٹ نظر آتی ہے۔ ب) ترسیلی تار کی فی میٹر امالہ $L = 1.5 \frac{\mu\text{H}}{\text{m}}$ ہونے کی صورت میں ترسیلی تار میں موج کی رفتار اور ترسیلی تار کی لمبائی دریافت کریں۔

جوابات: $Z_L = 100 + j100 \Omega$ ، $6.6737 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ، 0.333 m

سوال 11.10: تیس میٹر لمبی بے ضیاع تریسلی تار کے دونوں سرے آزاد رکھنے کی صورت میں اس کی کل برقی گنجائش $C = 1.5 \text{ nF}$ ناپی جاتی ہے۔ اس کا ایک سرا قصر دور کرتے ہوئے دوسرے سرے پر نہایت کم دورانیے کا مستطیلی برقی دباؤ کا جھٹکا دیا جاتا ہے جو قصر دور سرے سے ٹکرا کر واپس لوٹتا ہے۔ تار میں دو طرفہ فاصلہ کل $0.4 \mu\text{s}$ میں طے پاتا ہے۔ تریسلی تار کی قدرتی رکاوٹ حاصل کریں۔

جواب: $Z_0 = 133.3 \Omega$

سوال 11.11: تریسلی تار کی قدرتی رکاوٹ $Z_0 = 60 \Omega$ جبکہ اس پر رفتار $2.8 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ہے۔ تار پر آمدی موج کی مساوات درج ذیل ہے۔

$$V_s^+(z, t) = 100 \cos(\omega t - \pi z) \quad \text{V}$$

(الف) موج کی زاویائی تعدد حاصل کریں۔ (ب) آمدی برقی رو کے موج کی مساوات لکھیں۔ (پ) تریسلی تار کا $z > 0$ حصہ ہٹا کر $z = 0$ پر $Z_L = 60 + j40 \Omega$ رکاوٹ نسب کرنے کی صورت میں Γ حاصل کریں۔ انعکاسی موج $V_s^-(z, t)$ کی مساوات لکھیں اور $z = -2.25 \text{ m}$ پر V_s حاصل کریں۔

جوابات: $\omega = 879.6 \frac{\text{Mrad}}{\text{s}}$ ، $I^+(z, t) = \frac{5}{3} \cos(\omega t - \pi z) \text{ A}$ ، $\Gamma = 0.1 + j0.3 =$ ، $V_s^-(z, t) = 31.6 e^{j(\pi z + 1.249)}$ ، $V_s(z = -2.5 \text{ m}) = 130.4 e^{j0.71} = 130.4 / 40.6^\circ$ ، $0.316 / 71.6^\circ$

سوال 11.12: تریسلی تار کی $Z_0 = 50 \Omega$ لمبائی 330 m اور اس میں رفتار موج $v = 0.8c$ ہے۔ یہ $Z_L = 40 + j70 \Omega$ برقی بوجھ پر اختتام پذیر ہے۔ تعدد 1.2 MHz پر Γ ، s اور داخلی Z حاصل کریں۔

جوابات: $0.62 / 60.3^\circ$ ، 4.27 ، $100 / -56.2^\circ$

سوال 11.13: بے ضیاع تریسلی تار کی لمبائی 3 m ، قدرتی رکاوٹ 300Ω جبکہ اس پر طول موج 4 m ہے۔ تریسلی تار کے ساتھ نسب برقی بوجھ $100 - j150 \Omega$ پر $100 / 30^\circ$ برقی دباؤ پایا جاتا ہے۔ (الف) تریسلی تار کے داخلی سرے پر برقی دباؤ حاصل کریں۔ (ب) تار پر زیادہ سے زیادہ برقی دباؤ کیا پایا جائے گا؟

جوابات: $166.4 / -63.7^\circ \text{ V}$ ، 187.8 V

سوال 11.14: بے ضیاع تریسلی تار کی لمبائی 38 m ہے جبکہ اس کے مستقل $L = 0.3 \frac{\mu\text{H}}{\text{m}}$ اور $C = 90 \frac{\text{pF}}{\text{m}}$ ہیں۔ برقی بوجھ $Z_L = 40 + j0 \Omega$ ہے جبکہ داخلی جانب 4 MHz تعدد کا منبع $200 / 0^\circ \text{ V}$ مہیا کر رہا

ہے۔ الف) داخلی برقی رو کا حیثہ حاصل کریں۔ ب) برقی بوجھ پر برقی رو کا حیثہ حاصل کریں۔ پ) برقی بوجھ کو منتقل طاقت حاصل کریں۔

جوابات: 10.2 A ، 3.52 A ، 247.9 W

سوال 11.15: 300Ω قدرتی رکاوٹ کی ترسیلی تار پر متوازی جڑے 400Ω اور 600Ω کا برقی بوجھ لادا جاتا ہے۔ تار کی لمبائی $\frac{5\lambda}{8}$ ہے جبکہ اسے داخلی جانب $v(t) = 310 \cos(2 \times 10^9 t) \text{ V}$ برقی دباؤ مہیا کی جاتی ہے۔ برقی بوجھ سے لے کر ترسیلی تار کی داخلی رکاوٹ $Z_{\text{داخلی}}$ حاصل کرتے ہوئے بالترتیب دونوں مزاحمتوں کو مہیا اوسط طاقت حاصل کریں۔

جوابات: $292.7 + j65.9 \Omega$ ، 93.8 W ، 62.5 W

سوال 11.16: صفحہ 556 پر شکل 11.5-الف میں برقی بوجھ کو ترسیلی تار کے ذریعہ منبع سے طاقت فراہم کرتا دکھایا گیا ہے۔ موجودہ سوال میں $Z_0 = 60 \Omega$ ، برقی بوجھ $Z_L = 40 - j50 \Omega$ ، منبع کی خارجی مزاحمت $Z_g = 40 \Omega$ ، تعدد 10^8 Hz ، تار کی لمبائی 1.3 m جبکہ منبع کی برقی دباؤ $80 \angle 0 \text{ V}$ ہیں۔ ترسیلی تار میں موج کی رفتار c کے برابر ہے۔ الف) شرح ساکن موج s اور ترسیلی تار کی $Z_{\text{داخلی}}$ حاصل کریں۔ ب) Z_g اور Z_L میں اوسط طاقت ضیاع حاصل کریں۔ پ) ترسیلی تار میں طاقت کا ضیاع حاصل کریں۔

جوابات: $s = 2.86$ ، $99.1 - j75.2 \Omega$ ، $Z_{\text{داخلی}} = 5.1 \text{ W}$ ، 12.7 W ، 0 W

سوال 11.17: ترسیلی تار کی لمبائی $\frac{8\lambda}{7}$ ، قدرتی رکاوٹ $Z_0 = 75 \Omega$ جبکہ اس پر برقی بوجھ $Z_L = 100 - j50$ ہے۔ تار میں موج کی رفتار c ہے۔ اسے داخلی جانب 100Ω کے خارجی مزاحمت کے منبع سے $600 \angle 0 \text{ V}$ برقی دباؤ مہیا کی جاتی ہے۔ الف) Γ ، s اور $Z_{\text{داخلی}}$ حاصل کریں۔ ب) ترسیلی تار کی داخلی برقی رو اور اسے مہیا طاقت حاصل کریں۔ پ) برقی بوجھ پر برقی دباؤ اور اس کی برقی رو حاصل کریں۔ ت) برقی بوجھ کو منتقل طاقت حاصل کریں۔

جوابات: الف) $\Gamma = 0.21 - j0.23$ ، $s = 1.89$ ، $Z_{\text{داخلی}} = 41.7 - j14 \Omega$ ، ب) $4.2/5.6^\circ \text{ A}$ ، 370 W (پ) $304/-63^\circ \text{ V}$ ، $2.7/-37 \text{ A}$ (ت) 370 W

سوال 11.18: قدرتی رکاوٹ $Z_0 = 300 \Omega$ اور لمبائی 0.7 m کے ترسیلی تار کا خارجی سراقصر دور کیا جاتا ہے۔ تار پر طول موج 0.34 m ہے۔ داخلی اشارے کا حیثہ 15 V ہونے کی صورت میں تار پر زیادہ سے زیادہ حیثہ کیا پایا جائے گا؟ قصر دور سرے میں برقی رو کا حیثہ دریافت کریں۔

جوابات: 41.5 V ، 138.4 mA

سوال 11.19: منبع برقی رو $0.4 \angle 0^\circ \text{ A}$ جس کی خارجی مزاحمت 80Ω ہے، 3.4λ لمبی ترسیلی تار کے ذریعہ 25Ω کے برقی بوجھ کو طاقت فراہم کر رہی ہے۔ ترسیلی تار کی قدرتی رکاوٹ 50Ω ہے۔ مزاحمتی برقی بوجھ اور منبع کی مزاحمت میں طاقت کا ضیاع دریافت کریں۔

جوابات: 1.28 W ، 0.81 W

سوال 11.20: برقی بوجھ $Z_L = 90 - j55 \Omega$ کو 0.12λ لمبائی اور $Z_0 = 70 \Omega$ قدرتی رکاوٹ کی ترسیلی تار طاقت فراہم کرتی ہے۔ سمٹھ نقشہ استعمال کرتے ہوئے برقی بوجھ سے لدے ترسیلی تار کی داخلی قدرتی رکاوٹ $Z_{\text{داخلی}}$ اور شرح ساکن موج s حاصل کریں۔

جوابات: $38 - j20 \Omega$ ، $s = 2.05$

سوال 11.21: بے ضیاع ترسیلی تار کی قدرتی رکاوٹ $Z_0 = 400 \Omega$ ہے۔ تار کو 200 MHz تعدد پر استعمال کیا جا رہا ہے۔ اس تعدد پر $Z_{\text{داخلی}} = 200 - j200 \Omega$ ہے۔ تار کی لمبائی 1 m ہے۔ سمٹھ نقشہ استعمال کرتے ہوئے الف) شرح ساکن موج حاصل کریں۔ ب) تار پر نسب برقی بوجھ Z_L حاصل کریں۔ پ) بلند تر برقی دباؤ کا مقام حاصل کریں۔

جوابات: $s = 2.62$ ، $Z_L = 1040 + j69.8 \Omega$ ، $z = -7.2 \text{ mm}$

سوال 11.22: بے ضیاع دو متوازی تار پر مبنی ترسیلی تار کی لمبائی 25 m ، قدرتی رکاوٹ 300Ω اور فی میٹر برقی گنجائش $12 \frac{\text{pF}}{\text{m}}$ ہے۔ نقطہ $z = 0$ پر تار کے ساتھ متوازی جڑے مزاحمت 800Ω اور برقی گنجائش 5 pF کا برقی بوجھ جڑا ہے۔ تعدد $\omega = 10^{10} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ پر سمٹھ نقشے کے ذریعہ Γ ، s اور $Z_{\text{داخلی}}$ حاصل کریں۔

جوابات: $\Gamma = 0.44 - j0.16$ ، $s = 2.7$ ، $Z_{\text{داخلی}} = 584 + j335 \Omega$

سوال 11.23: بے ضیاع ترسیلی تار پر $\frac{Z_L}{Z_0} = 2 + j1$ جبکہ $\lambda = 20 \text{ m}$ ہے۔ سمٹھ نقشے کے استعمال کرتے ہوئے حل کریں۔ الف) وہ نقطہ دریافت کریں جس پر $Z_{\text{داخلی}} = r + j0$ ہو جہاں $r > 1$ ہے۔ ب) اس نقطے پر داخلی z حاصل کریں۔ پ) اس نقطے پر ترسیلی تار کو کاٹ کر برقی بوجھ جانب حصے کو ہٹایا جاتا ہے جبکہ نئے سرے

پر r نسب کیا جاتا ہے۔ ترسیلی تار پر s حاصل کریں۔ (ت) نسب کئے گئے r سے کتنے فاصلے پر $\frac{Z_L}{Z_0} = 2 + j1$ ہو گا؟

جوابات: 0.74 m ، $z_{\text{اغل}} = 2.61 + j0 \Omega$ ، $s = 2.61$ ، 9.26 m

سوال 11.24: ترسیلی تار پر $Z_L = 25 + j75 \Omega$ برقی بوجھ نقطہ $z = 0$ پر جڑی ہے۔ تار کی قدرتی رکاوٹ $Z_0 = 50 \Omega$ اور اس پر موج کی رفتار $v = c$ ہے۔ برقی بوجھ کے قریبی اس نقطے کو دریافت کریں جس پر داخلی رکاوٹ کا حقیقی جزو $\frac{1}{Z_0}$ کے برابر ہو جبکہ اس کا خیالی جزو منفی قیمت رکھتا ہو۔ اس نقطے پر $y_{\text{اغل}}$ حاصل کریں۔ اس نقطے پر کتنا برقی گیر (کپیسٹر) نسب کرنے سے بقایا تار پر $s = 1$ حاصل ہو گا؟

جوابات: 39.6 cm ، $y_{\text{اغل}} = 1 - j2.23$ ، $C = 24 \text{ pF}$

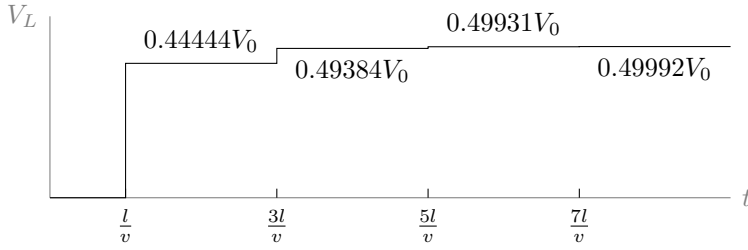
سوال 11.25: صفحہ 581 میں شکل 11.18 دکھایا گیا ہے۔ اس میں $R_g = R_L = 25 \Omega$ ، $Z_0 = 50 \Omega$ جبکہ منبع کی برقی دباؤ V_0 ہے۔ لمحہ $t = 0$ پر سوئچ چالو کیا جاتا ہے۔ $0 < t < \frac{8l}{v}$ دورانے کے لئے برقی بوجھ کی برقی دباؤ اور منبع کی برقی رو کے خط کھینچیں۔

حل: شکل 11.31 میں دکھائے گئے ہیں۔

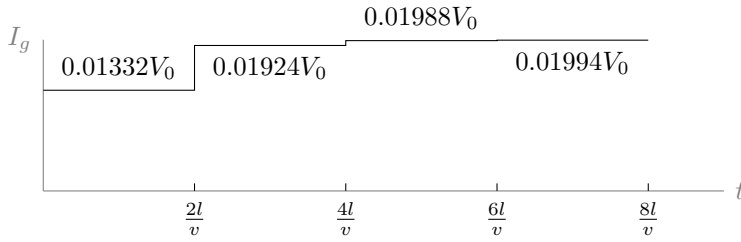
سوال 11.26: صفحہ 581 میں شکل 11.18 دکھایا گیا ہے۔ اس میں $R_g = R_L = 100 \Omega$ ، $Z_0 = 50 \Omega$ جبکہ منبع کی برقی دباؤ $V_0 = 120 \text{ V}$ ہے۔ لمحہ $t = 0$ پر سوئچ چالو کیا جاتا ہے۔ $0 < t < \frac{8l}{v}$ دورانے کے لئے برقی بوجھ کی برقی دباؤ اور منبع کی برقی رو کے خط کھینچیں۔

حل: شکل 11.32 میں دکھائے گئے ہیں۔

سوال 11.27: صفحہ 581 میں شکل 11.18 دکھایا گیا ہے۔ اس میں $R_L = 25 \Omega$ ، $Z_0 = 50 \Omega$ جبکہ منبع کی برقی دباؤ $V_0 = 10 \text{ V}$ ہے۔ تار کی لمبائی 480 m ہے جبکہ تار میں موج کی رفتار $2.4 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ہے۔ لمحہ $t = 0$ پر سوئچ چالو کیا جاتا ہے۔ $0 < t < \frac{8l}{v}$ دورانے کے لئے منبع سے 360 m فاصلے پر برقی دباؤ اور برقی رو کے خط کھینچیں۔

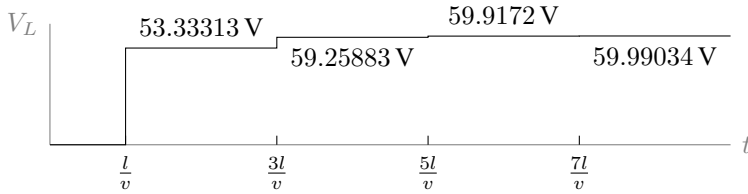


(ا) برقی بوجھ کی برقی دباؤ بالمتقابل وقت۔

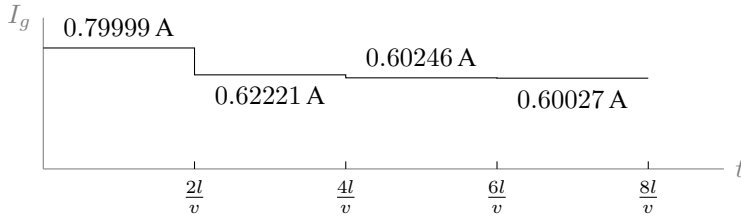


(ب) منبع کی برقی دباؤ بالمتقابل وقت۔

شکل 11.31: سوال 11.25 کے خط۔

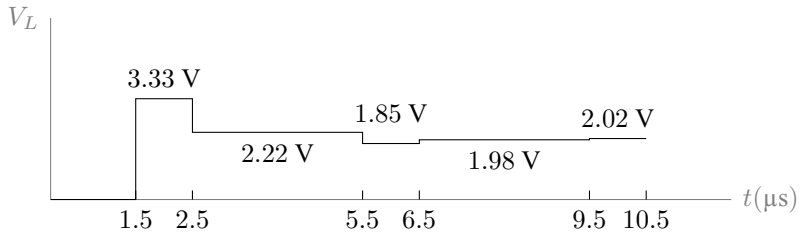


(ا) برقی بوجھ کی برقی دباؤ بالمتقابل وقت۔

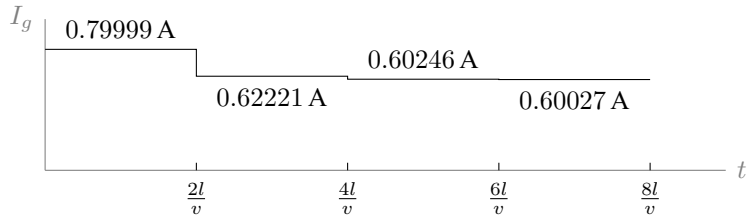


(ب) منبع کی برقی دباؤ بالمتقابل وقت۔

شکل 11.32: سوال 11.26 کے خط۔

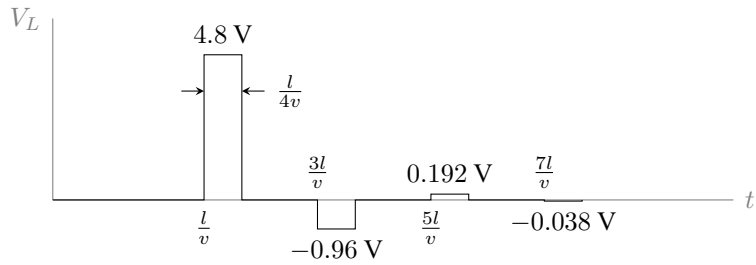


(ا) نئے نقطے کی برقی دباؤ بالمتقابل وقت۔



(ب) نئے نقطے کی برقی دباؤ بالمتقابل وقت۔

شکل 11.33: سوال 11.27 کے خط۔



شکل 11.34: سوال 11.28 میں برقی بوجھ پر مستطیل برقی دباؤ۔

حل: شکل 11.33 میں دکھائے گئے ہیں۔

سوال 11.28: شکل 11.18 میں $Z_0 = 75 \Omega$ ، $R_g = R_L = 50 \Omega$ اور $V_0 = 10 \text{ V}$ ہیں۔ لمحہ $t = 0$ پر سوئچ چالو کیا جاتا ہے جبکہ لمحہ $t = \frac{1}{4v}$ پر سوئچ کو دوبارہ منقطع کر دیا جاتا ہے۔ برقی بوجھ پر برقی دباؤ کا خط $0 < t < \frac{8l}{v}$ کے دورانیے کے لئے کھینچیں۔ جواب: سوئچ چالو کرنے سے $V_1^+ = 6 \text{ V}$ اور $I_1^+ = 0.08 \text{ A}$ امواج پیدا ہوتے ہیں۔ سوئچ منقطع کرنے سے برقی رد صفر ہو جاتی ہے۔ جس کا مطلب ہے کہ اب $I_1^+ = -0.08 \text{ A}$ کی موج پیدا ہوئی ہے یعنی برقی دباؤ کی موج $V_1^+ = -6 \text{ V}$ کی موج پیدا ہوئی ہے۔ برقی دباؤ کے دونوں امواج مل کر مستطیل موج کو جنم دیتے ہیں۔ شکل 11.34 میں نتائج دکھائے گئے ہیں۔

باب 12

ترچھی آمد، انعکاس، انعطاف اور انتشار

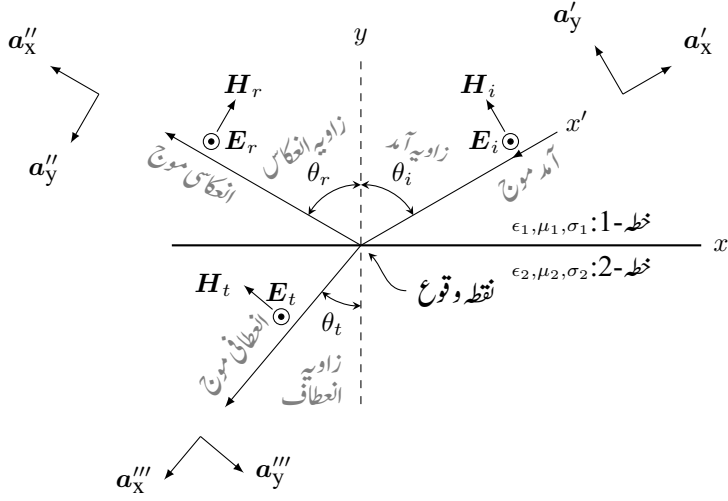
دو خطوں کے سرحد پر عمودی آمدی موج کے انعکاس اور ترسیل پر باب 10 میں غور کیا گیا۔ اس باب میں ترچھی آمدی موج کی بات کرتے ہوئے انعکاس کے علاوہ انعطاف کی بھی بات کی جائے گی۔ باب کے آخر میں انکسار پر غور کیا جائے گا۔ عمودی امواج اور ترسیلی تار کے مساوات ہو بہو ایک جیسے تھے۔ ترچھی آمدی موج کی مساوی مثال ترسیلی تار میں نہیں پائی جاتی ہے۔ یہی وجہ ہے کہ ان پر یہاں علیحدہ سے غور کیا جا رہا ہے۔

12.1 ترچھی آمد

عمودی قطبی برقی موج E_{\perp}

شکل 12.1 میں سرحد پر ترچھی آمدی موج (موج واقع) دکھائی گئی ہے۔ دو خطوں کا سرحد $y = 0$ سطح پر پایا جاتا ہے لہذا y محدود، سرحد ملاپ کے عمودی ہے۔ پہلے خطے (خطہ-1) میں آمدی برقی موج کے حرکت کی سمت y محدود کے ساتھ θ_i زاویہ آمد¹ (زاویہ وقوع) بناتی ہے جبکہ اسی خطے میں انعکاسی برقی موج کے حرکت کی سمت y محدود کے ساتھ θ_r زاویہ انعکاس² بناتی ہے۔ ترسیلی موج کے حرکت کی سمت دوسرے خطے (خطہ-2) میں منفی y محدود کے

incidence angle¹
reflection angle²



شکل 12.1: ترچھی آمد کی صورت میں انعکاسی اور ترسیلی امواج اور ان کے زاویے۔ برقی میدان عمودی قطبیت رکھتی ہے۔

ساتھ θ_t زاویہ بنتی ہے۔ ترسیلی موج کو یہاں موج منعطف³ کہا جائے گا لہذا θ_t زاویہ انعطاف⁴ کہلاتی ہے۔ پہلے خطے کے طبعی مستقل $\epsilon_1, \mu_1, \sigma_1$ جبکہ دوسرے خطے کے طبعی مستقل $\epsilon_2, \mu_2, \sigma_2$ ہیں۔

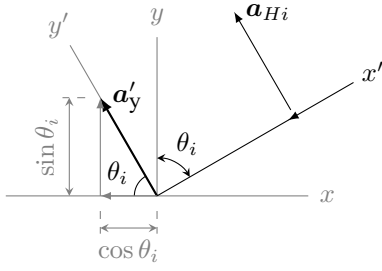
ہم دو صورتوں پر باری باری غور کریں گے۔ پہلی صورت میں خطی قطبی برقی میدان، سطح آمد (یعنی xy سطح) کے عمودی ہو گا جبکہ دوسری صورت میں خطی قطبی برقی میدان اس سطح کے متوازی ہو گا۔ ان دو صورتوں میں برقی و مقناطیسی موج بالترتیب عمودی قطب موج⁵ اور متوازی قطب موج⁶ کہلائیں گے۔ شکل 12.1 عمودی قطبیت کی صورت حال دکھا رہی ہے۔ کسی بھی عمومی برقی موج کو عمودی اور متوازی قطب کے امواج کا مجموعہ لکھا جاسکتا ہے۔

ہم دیکھ چکے ہیں کہ منفی z سمت میں حرکت کرتی a_x میدان کی برقی موج

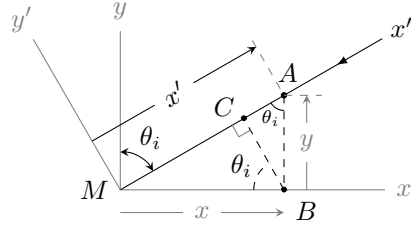
$$E_i = E_0 a_x e^{j(\omega t + \beta_1 z)}$$

لکھی جاتی ہے۔ اس موج میں برقی میدان ہر نقطے پر تمام اوقات a_x سمت میں ہو گا جبکہ حرکت کی سمت منفی z جانب ہے۔ اب a_x اکائی سمتیہ کی جگہ کسی بھی عمومی اکائی سمتیہ a سمت کا میدان جو z محور کی بجائے لکیر 1 پر منفی سمت

refracted wave³
refraction angle⁴
perpendicular polarized⁵
parallel polarized⁶



(ب) اکائی سمتیہ کا کارتیسی محدود میں اظہار۔



(i) فاصلے کا کارتیسی محدود میں اظہار۔

شکل 12.2: کسی بھی سمت میں فاصلے اور اکائی سمتیہ کو کارتیسی محدود میں لکھنے کا طریقہ۔

کی جانب حرکت کر رہا ہو، کی موج

$$\mathbf{E}_i = E_0 \mathbf{a}_e^{j(\omega t + \beta_1 l)}$$

لکھی جائے گی۔ اب شکل 12.1 میں \mathbf{E}_i پر دوبارہ غور کریں۔ یہ میدان x' پر منفی سمت میں حرکت کر رہی ہے جبکہ برقی میدان \mathbf{E}_i کی سمت \mathbf{a}_z ہے لہذا اس موج کو

$$(12.1) \quad \mathbf{E}_i = E_0 \mathbf{a}_z e^{j(\omega t + \beta_1 x')}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں کارتیسی محدود x, y کے مرکز سے لکیر x' پر فاصلہ ناپا گیا ہے۔ آئیں مساوات 12.1 میں لکیر x' پر فاصلے کو کارتیسی محدود x, y کے متغیرات استعمال کرتے ہوئے ناپیں۔

شکل 12.2-الف میں آمد موج اور محدود xy دوبارہ دکھائے گئے ہیں۔ اس شکل میں لکیر x' کو محدود $x'y'$ کا حصہ دکھایا گیا ہے۔ ان دونوں محدود کا مرکز نقطہ M ہے۔ لکیر x' پر نقطہ A کا مرکز سے فاصلہ MA کو x' لکھا گیا ہے۔ اب $MA = MC + CA$ کے برابر ہے جہاں $MC = x \sin \theta_i$ اور $CA = y \cos \theta_i$ کے برابر ہیں لہذا

$$(12.2) \quad x' = x \sin \theta_i + y \cos \theta_i$$

لکھا جا سکتا ہے جس سے ہم مساوات 12.1 کو

$$(12.3) \quad \mathbf{E}_i = E_0 \mathbf{a}_z e^{j[\omega t + \beta_1 (x \sin \theta_i + y \cos \theta_i)]}$$

لکھ سکتے ہیں۔ اس مساوات میں موج گھٹنے x' کی طرف رواں ہے۔

آمدی موج کی بات کرتے ہوئے کارتیسی محدود $x'y'$ کا سہارا لیا جاتا ہے جس کے اکائی سمتیات \mathbf{a}'_x اور \mathbf{a}'_y کو شکل 12.1 میں لکیر x' کے قریب دکھایا گیا ہے۔ اسی طرح انعکاسی موج پر غور کے دوران کارتیسی محدود $x''y''$

اور تریسلی موج میں $x''y''$ کا سہارا لیا جاتا ہے۔ ان کے اکائی سمتیات کو بالترتیب انعکاسی اور تریسلی امواج کے قریب شکل 12.1 میں دکھایا گیا ہے۔ ان تینوں محدد کے مرکز نقطہ M پر پائے جاتے ہیں۔

آمدی برقی اور مقناطیسی میدان x' کے عمودی ہیں۔ برقی میدان کی سمت a_z (یا a'_z) ہے جہاں a_z اور a'_z دونوں ایک ہی سمت کو ظاہر کرتے ہیں۔ مقناطیسی میدان H_i کی اکائی سمتیہ a_{Hi} محدد y' کی سمت میں ہے۔ یوں $a_{Hi} = a'_{y'}$ لکھا جا سکتا ہے۔ آئیں $a'_{y'}$ کو کارٹیس محدد x, y کے متغیرات کی صورت میں شکل 12.2-ب کی مدد سے لکھیں۔ اکائی سمتیہ $a'_{y'}$ کو دو سمتیوں کے مجموعے کے طور پر دکھایا گیا ہے۔ چونکہ اکائی سمتیہ کی لمبائی ایک کے برابر ہوتی ہے لہذا شکل میں نکتوں کے وتر کی لمبائی اکائی ہے۔ یوں نکتوں کا قاعدہ $\cos \theta_i$ اور اس کا عمود $\sin \theta_i$ کے برابر ہوں گے جس سے

$$(12.4) \quad a'_{y'} = -\cos \theta_i a_x + \sin \theta_i a_y$$

لکھا جا سکتا ہے۔ ان معلومات کو استعمال کرتے ہوئے آمدی مقناطیسی موج

$$H_i = \frac{E_0}{Z_1} a'_{y'} e^{j(\omega t + \beta_1 x')}$$

کو

$$(12.5) \quad H_i = \frac{E_0}{Z_1} (-\cos \theta_i a_x + \sin \theta_i a_y) e^{j[\omega t + \beta_1 (x \sin \theta_i + y \cos \theta_i)]}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

مساوات 12.3 اور مساوات 12.5 کے مساوی دوری سمتی مساوات مندرجہ ذیل ہیں۔

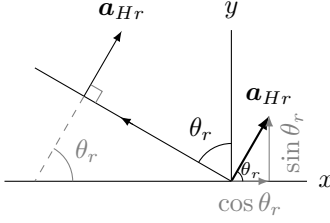
$$(12.6) \quad E_{si} = a_z E_0 e^{j\beta_1 (x \sin \theta_i + y \cos \theta_i)}$$

$$(12.7) \quad H_{si} = (-\cos \theta_i a_x + \sin \theta_i a_y) \frac{E_0}{Z_1} e^{j\beta_1 (x \sin \theta_i + y \cos \theta_i)}$$

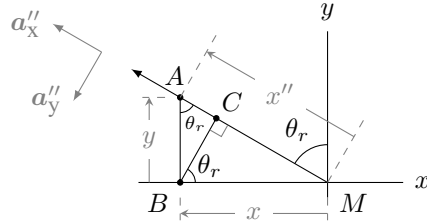
مساوات 10.83 شرح انعکاس جبکہ مساوات 10.85 شرح تریسلی کی تعریف بیان کرتے ہیں۔ عین سرحد پر عمودی (\perp) قطب کے میدان کے لئے ان مساوات کو

$$(12.8) \quad \Gamma_{\perp} = \frac{E_r}{E_i}$$

$$\tau_{\perp} = \frac{E_t}{E_i}$$



(ب) انعکاسی مقناطیسی موج کی اکائی سمتیہ کا کارتیسی محدود میں اظہار۔



(c) انعکاسی موج کے فاصلے کی کارتیسی محدود میں اظہار۔

شکل 12.3: انعکاسی موج کے متغیرات کا کارتیسی محدود میں اظہار۔

لکھا جائے گا۔

شکل 12.3-الف میں صرف انعکاسی موج دکھائی گئی ہے۔ مرکز M سے موج کا فاصلہ x'' لیتے ہوئے برقی موج کی مساوات حاصل کرتے ہیں۔ شکل سے ظاہر ہے کہ $MA = MC + CA$ ہے جہاں $MC = -x \sin \theta_r$ اور $CA = y \cos \theta_r$ کے برابر ہیں لہذا

$$(12.9) \quad x'' = -x \sin \theta_r + y \cos \theta_r$$

لکھا جائے گا۔ چونکہ منفی محدود پر x کی قیمت منفی ہوگی لہذا MC حاصل کرتے وقت منفی علامت کی ضرورت ہو گی۔ یوں مثبت x'' سمت میں حرکت کرتی انعکاسی برقی موج

$$(12.10) \quad \begin{aligned} \mathbf{E}_{sr} &= \mathbf{a}_z \Gamma_{\perp} E_0 e^{-j\beta_1 x''} \\ &= \mathbf{a}_z \Gamma_{\perp} E_0 e^{-j\beta_1 (-x \sin \theta_r + y \cos \theta_r)} \end{aligned}$$

لکھی جائے گی جہاں میدان کی سمت \mathbf{a}''_z یعنی \mathbf{a}_z ہے۔

انعکاسی مقناطیسی موج کی مساوات لکھنے کی خاطر مقناطیسی میدان کی اکائی سمتیہ درکار ہے۔ شکل 12.3-ب میں انعکاسی مقناطیسی میدان کی سمت میں اکائی سمتیہ \mathbf{a}_H دکھائی گئی ہے جو x محدود کے ساتھ θ_r زاویہ بناتی ہے۔ اکائی سمتیہ کو محدود کے مرکز پر دو سمتیہ کے مجموعے کے طور پر بھی دکھایا گیا ہے جہاں سے

$$(12.11) \quad \mathbf{a}_{Hr} = \cos \theta_r \mathbf{a}_x + \sin \theta_r \mathbf{a}_y$$

لکھا جا سکتا ہے لہذا انعکاسی مقناطیسی موج

$$(12.12) \quad \mathbf{H}_{sr} = (\cos \theta_r \mathbf{a}_x + \sin \theta_r \mathbf{a}_y) \Gamma_{\perp} \frac{E_0}{Z_1} e^{-j\beta_1 (-x \sin \theta_r + y \cos \theta_r)}$$

لکھی جاسکتی ہے۔ شکل سے واضح ہے کہ $a_{Hr} = -a''_y$ ہے۔

یہی طریقہ کار استعمال کرتے ہوئے تریسلی امواج کے مساوات یوں لکھے جاسکتے ہیں

$$(12.13) \quad \mathbf{E}_{st} = \mathbf{a}_z \tau_{\perp} E_0 e^{j\beta_2(x \sin \theta_t + y \cos \theta_t)}$$

$$(12.14) \quad \mathbf{H}_{st} = (-\cos \theta_t \mathbf{a}_x + \sin \theta_t \mathbf{a}_y) \tau_{\perp} \frac{E_0}{Z_2} e^{j\beta_2(x \sin \theta_t + y \cos \theta_t)}$$

جہاں تریسلی امواج کار تیبی محدود کے مرکز سے بڑھتے فاصلے کی طرف رواں ہیں۔ یہاں غور کریں کہ دوسرے خطے میں امواج کے مساوات میں مستقل β_2 اور Z_2 استعمال کئے گئے ہیں۔

صفحہ 420 پر مساوات 9.45 برقی میدان کی سرحدی شرط پیش کرتی ہے جس کے مطابق سرحد کے دونوں اطراف متوازی برقی میدان برابر ہوں گے۔ برقی میدان کی شرط مساوات 12.6، مساوات 12.10 اور مساوات 12.13 میں $y = 0$ پر کرتے ہوئے یوں

$$\mathbf{a}_z E_0 e^{j\beta_1(x \sin \theta_t + 0 \cos \theta_t)} + \mathbf{a}_z \Gamma_{\perp} E_0 e^{-j\beta_1(-x \sin \theta_r + 0 \cos \theta_r)} = \mathbf{a}_z \tau_{\perp} E_0 e^{j\beta_2(x \sin \theta_t + 0 \cos \theta_t)}$$

یا

$$(12.15) \quad e^{j\beta_1 x \sin \theta_t} + \Gamma_{\perp} e^{j\beta_1 x \sin \theta_r} = \tau_{\perp} e^{j\beta_2 x \sin \theta_t}$$

لکھی جاسکتی ہے۔ یہ مساوات کسی بھی x کے لئے درست ہے لہذا یہ $x = 0$ کے لئے بھی درست ہوگی۔ اس میں $x = 0$ پر کرنے سے

$$(12.16) \quad 1 + \Gamma_{\perp} = \tau_{\perp}$$

ملتا ہے۔ مساوات 12.15 میں x کی قیمت تبدیل کرنے سے e کے طاقت تبدیل ہوتے ہیں۔ یوں یہ مساوات صرف اور صرف اس صورت x کے ہر قیمت کے لئے درست ہوگی جب مساوات میں تینوں e کے طاقت ہر صورت برابر ہوں یعنی

$$(12.17) \quad e^{j\beta_1 x \sin \theta_t} = e^{j\beta_1 x \sin \theta_r} = e^{j\beta_2 x \sin \theta_t}$$

اب پہلی دو اجزاء کے مساوات سے

$$(12.18) \quad \theta_i = \theta_r$$

اور آخری دو اجزاء کی مساوات سے

$$(12.19) \quad \beta_2 \sin \theta_t = \beta_1 \sin \theta_r$$

ملتا ہے جس میں مساوات 12.18 پر کرتے ہوئے

$$(12.20) \quad \frac{\sin \theta_t}{\sin \theta_i} = \frac{\beta_1}{\beta_2} \quad \text{قانون ابن سہل کی عمومی مساوات}$$

حاصل ہوتا ہے۔ صفحہ 456 پر دیے، بے ضیاع خطے کی مساوات 10.40 پر کرنے سے

$$(12.21) \quad \sin \theta_t = \frac{\omega \sqrt{\mu_1 \epsilon_1}}{\omega \sqrt{\mu_2 \epsilon_2}} \sin \theta_i = \frac{\sqrt{\mu_1 \epsilon_1}}{\sqrt{\mu_2 \epsilon_2}} \sin \theta_i$$

یعنی

$$(12.22) \quad \sin \theta_t = \frac{\sqrt{\mu_{r1} \mu_0 \epsilon_{r1} \epsilon_0}}{\sqrt{\mu_{r2} \mu_0 \epsilon_{r2} \epsilon_0}} \sin \theta_i$$

$$= \frac{\sqrt{\mu_{r1} \epsilon_{r1}}}{\sqrt{\mu_{r2} \epsilon_{r2}}} \sin \theta_i \quad \text{قانون ابن سہل، بے ضیاع مقناطیسی خطے}$$

حاصل ہوتا ہے۔

غیر مقناطیسی اور بے ضیاع خطے میں بصری امواج پر تبصرے کے دوران عموماً انعطافی مستقل⁷ (انعطاف نما) n استعمال کیا جاتا ہے جہاں

$$\sqrt{\epsilon_R} = n$$

کے برابر ہے۔ بے ضیاع، غیر مقناطیسی خطے میں مساوات 12.22 کو

$$(12.23) \quad \sin \theta_t = \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_i \quad \text{قانون ابن سہل، بے ضیاع غیر مقناطیسی خطے}$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں

$$(12.24) \quad n_1 = \sqrt{\epsilon_{r1}}$$

$$n_2 = \sqrt{\epsilon_{r2}}$$

غیر مقناطیسی خطوں کے انعطافی مستقل ہیں۔ انعطافی مستقل کو استعمال کرتے ہوئے، بے ضیاع اور غیر مقناطیسی خطے میں

$$(12.25) \quad \beta = \omega \sqrt{\mu \epsilon} = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \sqrt{\epsilon_R} = \frac{\omega n}{c}$$

$$(12.26) \quad Z = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_R}} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = \frac{Z_0}{n}$$

لکھے جاسکتے ہیں۔ اسی طرح دوری رفتار اور نخلے میں طول موج کو

$$(12.27) \quad v = \frac{c}{n}$$

$$(12.28) \quad \lambda = \frac{\lambda_0}{n}$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں λ_0 خالی خلاء میں طول موج ہے۔

مساوات 12.18 کہتا ہے کہ آمدی اور انعکاسی زاویے برابر ہیں۔ مساوات 12.23 جسے ابن سہل⁸ کا قانون انعطاف کہتے ہیں زاویہ انعطاف اور زاویہ آمد کا تعلق بیان کرتا ہے۔ یہ قانون مغربی دنیا میں قانون سنیل⁹ سے جانا جاتا ہے۔ بصریات¹⁰ کے میدان میں قانون ابن سہل بنیادی اہمیت رکھتا ہے۔ مساوات 12.22 بے ضیاع مقناطیسی نخلے میں لاگو قانون ابن سہل دیتی ہے جبکہ مساوات 12.20 قانون ابن سہل کی عمومی مساوات ہے۔

لطیف واسطہ¹¹ مثلاً ہوا سے کثیف واسطہ¹² مثلاً پانی میں داخل ہوتے ہوئے موج سطح ملاپ کے عمود کی جانب جھک جاتی ہے۔ سطح ملاپ سے مراد دونوں نخلوں کی سرحد ہے۔ سطح ملاپ کے عمود کو شکل 12.1 میں نقطہ دار لکیر ظاہر کرتی ہے۔

مثال 12.1: خلاء سے $\theta_i = 30^\circ$ زاویے پر شیشے میں عمودی تقطیب کی موج داخل ہوتی ہے۔ پانی میں انعطافی موج کا زاویہ θ_t حاصل کریں۔ اگر شیشے سے خلاء میں موج اسی زاویے سے داخل ہو تب θ_t کیا ہو گا۔ شیشے کا جزوی برقی مستقل $\epsilon_r = 2.3$ لیں۔

حل: خلاء کا جزوی برقی مستقل $\epsilon_r = 1$ لیتے ہوئے، خلاء سے شیشے میں دخول پر

$$\sin \theta_t = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2.3}} \sin 30^\circ = 0.32969$$

سے

$$\theta_t = \sin^{-1} 0.32969 = 19.25^\circ$$

⁸ بغداد کے ایوب سدا اعلیٰ ابن سہل نے اس قانون کو سن 984 میں دریافت کیا۔

Snell's law⁹

optics¹⁰

light medium¹¹

dense medium¹²

حاصل ہوتا ہے جبکہ شیشے سے خلاء میں دخول پر

$$\sin \theta_t = \frac{\sqrt{2.3}}{\sqrt{1}} \sin 30^\circ = 0.758288$$

سے

$$\theta_t = \sin^{-1} 0.758288 = 49.3^\circ$$

حاصل ہوتا ہے۔

صفحہ 421 پر مساوات 9.49 مقناطیسی میدان کی سرحدی شرط بیان کرتا ہے جس کے مطابق سرحد کے دونوں اطراف پر متوازی مقناطیسی میدان برابر ہوں گے۔ شکل 12.1 میں آمدی، انعکاسی اور العطانی مقناطیسی میدان a_x اور a_y اجزاء پر مشتمل ہیں۔ ان میں صرف a_x اجزاء سرحد کے متوازی ہیں لہذا مساوات 12.7، مساوات 12.12 اور مساوات 12.14 کے a_x اجزاء میں $y = 0$ پر کرتے ہوئے مقناطیسی سرحدی شرط سے

$$-\cos \theta_i \frac{E_0}{Z_1} e^{j\beta_1 x \sin \theta_i} + \cos \theta_r \Gamma_{\perp} \frac{E_0}{Z_1} e^{-j\beta_1 (-x \sin \theta_r)} = -\cos \theta_t \tau_{\perp} \frac{E_0}{Z_2} e^{j\beta_2 (x \sin \theta_t)}$$

یا

$$-\cos \theta_i e^{j\beta_1 x \sin \theta_i} + \cos \theta_r \Gamma_{\perp} e^{j\beta_1 x \sin \theta_r} = -\cos \theta_t \tau_{\perp} \frac{Z_1}{Z_2} e^{j\beta_2 x \sin \theta_t}$$

حاصل ہوتا ہے جسے مساوات 12.18 اور مساوات 12.19 کے استعمال سے

$$-\cos \theta_i + \cos \theta_r \Gamma_{\perp} = -\cos \theta_t \tau_{\perp} \frac{Z_1}{Z_2}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس میں مساوات 12.16 سے τ_{\perp} کی قیمت پر کرتے ہوئے

$$(12.29) \quad \Gamma_{\perp} = \frac{Z_2 \cos \theta_i - Z_1 \cos \theta_t}{Z_2 \cos \theta_i + Z_1 \cos \theta_t}$$

حاصل ہوتا ہے۔ صفحہ 486 پر مساوات 10.83 موجودہ مساوات میں $\theta_i = 0^\circ$ پر کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

اگر خطہ-2 کامل موصل ہو تب $Z_2 = 0$ ہو گا جس سے $\Gamma_{\perp} = -1$ حاصل ہوتا ہے۔ اگر دونوں خطے غیر مقناطیسی ، بے ضیاع ذو برق ہوں تب مساوات 12.21 کی مدد سے

$$(12.30) \quad \Gamma_{\perp} = \frac{\cos \theta_i - \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} - \sin^2 \theta_i}}{\cos \theta_i + \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} - \sin^2 \theta_i}}$$

حاصل ہوتا ہے۔ خطہ-2 کا برقی مستقل خطہ-1 کے برقی مستقل سے زیادہ ہونے کی صورت ($\epsilon_2 > \epsilon_1$) میں $\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} > 1$ ہو گا جبکہ سائن کی زیادہ سے زیادہ ممکن قیمت اکائی ہے لہذا $\sin^2 \theta_i \leq 1$ ہو گا اور یوں جزر کے اندر مقدار مثبت رہے گی جس سے Γ_{\perp} حقیقی عدد حاصل ہوتا ہے۔ اس کے برعکس $\epsilon_2 < \epsilon_1$ کی صورت میں اگر $\sin^2 \theta_i > \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}$ ہو تب جزر کے اندر منفی مقدار ہو گی لہذا Γ_{\perp} خیالی عدد ہو گا۔ ایسی صورت میں $|\Gamma_{\perp}| = 1$ ہوتا ہے اور سرحد پر مکمل اندرونی انعکاس¹³ سے پوری کی پوری موج زیادہ برقی مستقل کے خطے میں سرحد سے واپس لوٹتی ہے۔ جس زاویہ آمد پر $\Gamma_{\perp} = 1$ ہو اسے زاویہ فاصل¹⁴ پکارا جاتا ہے۔ یوں زاویہ فاصل

$$(12.31) \quad \theta_{i,ف} = \sin^{-1} \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}$$

کے برابر ہے۔ غیر مقناطیسی خطوں کا مقناطیسی مستقل μ_0 لیتے ہوئے، فاصل زاویے سے بڑے زاویے ($\theta_i > \theta_{i,ف}$) کی صورت میں مساوات 12.21 سے $\sin \theta_t > 1$ حاصل ہوتا ہے جس سے $\cos \theta_t$ خیالی عدد حاصل ہو گا

$$(12.32) \quad \cos \theta_t = \sqrt{1 - \sin^2 \theta_t} = \sqrt{1 - \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \sin^2 \theta_i} = jA$$

جہاں $A = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \sin^2 \theta_i - 1}$ حقیقی عدد ہے۔ یوں کم کثافت کے خطے میں مساوات 12.13 کی مدد سے میدان

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{st} &= \mathbf{a}_z \tau_{\perp} E_0 e^{j\beta_2(x \sin \theta_t + yjA)} \\ &= \mathbf{a}_z \tau_{\perp} E_0 e^{-\beta_2 A y} e^{j\beta_2 x \sin \theta_t} \end{aligned}$$

یا

$$(12.33) \quad \mathbf{E}_{st} = \mathbf{a}_z \tau_{\perp} E_0 e^{-\alpha y} e^{j\beta_2 x \sin \theta_t}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں

$$(12.34) \quad \alpha = \beta_2 A = \omega \sqrt{\mu_2 \epsilon_2} \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \sin^2 \theta_i - 1}$$

total internal reflection¹³
critical angle¹⁴

کے برابر ہے۔ یہ میدان کم کثافت خطے میں x - جانب بے ضیاع حرکت کرتی ہے۔ سرحد پر E_{\perp} کی مقدار $\tau_{\perp} E_0$ ہے جو سرحد سے دور چلتے ہوئے $e^{-\alpha y}$ کی شرح سے گھٹتی ہے۔ مساوات 12.33 کے طرز کی موج کو سطحی موج¹⁵ کہتے ہیں۔ سطحی موج سرحد کے ساتھ چھٹی رہتی ہے۔

مثال 12.2: پانی سے ہوا کی جانب سرحد پر آمدی موج $\theta_i = 55^\circ$ زاویہ رکھتی ہے۔ ہوا میں انعطافی موج کی قیمت سرحد پر اور سرحد سے $\frac{\lambda}{4}$ فاصلے پر حاصل کریں۔ سرحد پر آمدی برقی میدان $E_i = 1 \frac{V}{m}$ ہے۔ پانی کے مستقل $\epsilon_r = 80$ ، $\mu_r = 1$ اور $\sigma = 0$ لیں۔

حل: مساوات 12.31 سے فاصل زاویہ

$$\theta_{i,ف} = \sin^{-1} \sqrt{\frac{1}{80}} = 6.42^\circ$$

حاصل ہوتا ہے۔ چونکہ آمدی زاویہ اس سے زیادہ ہے لہذا مکمل اندرونی انعکاس پائی جائے گی۔ مساوات 12.21 سے

$$\sin \theta_t = \sqrt{\frac{\mu_0 \times 80 \times \epsilon_0}{\mu_0 \times 1 \times \epsilon_0}} \sin 55^\circ = 7.327$$

اور مساوات 12.32 سے

$$\cos \theta_t = jA = \sqrt{1 - 7.327^2} = j7.258$$

حاصل ہوتے ہیں۔ یوں

$$\alpha = \beta_2 A = \frac{2\pi}{\lambda_0} 7.258 = \frac{45.6 \text{ Np}}{\lambda_0 \text{ m}}$$

ہو گا۔ مساوات 12.30 سے

$$\Gamma_{\perp} = \frac{\cos 55^\circ - \sqrt{\frac{1}{80} - \sin^2 55^\circ}}{\cos 55^\circ + \sqrt{\frac{1}{80} - \sin^2 55^\circ}} = -0.33369 - j0.94268$$

اور مساوات 12.16 سے

$$\tau_{\perp} = 1 + \Gamma_{\perp} = 0.66631 - j0.94268 = 1.1544 / -54.746^\circ$$

• اس طرح ہوا میں سرحد پر $\frac{V}{m} = 1.1544 \times 1 = 1.1544 \frac{V}{m}$ ہو گا۔

• ہوا میں سرحد سے $\frac{\lambda}{4}$ فاصلے پر

$$|E_t| = 1.1544 \times 1 \times e^{-\frac{45.6}{\lambda_0} \frac{\lambda_0}{4}} = 12.9 \frac{\mu V}{m}$$

ہو گا۔

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ ہوا میں میدان سرحد کے قریب رہتا ہے۔ سرحد سے کچھ ہی فاصلے پر میدان کی قیمت قابل نظر انداز ہو جاتی ہے۔ یاد رہے کہ $\sin \theta_t$ حقیقی عدد ہے جس کی قیمت اکائی سے زیادہ ہے جبکہ $\cos \theta_t$ خیالی عدد ہے۔ مساوات 12.33 اور مساوات 12.14 سے ہوا میں برقی اور مقناطیسی امواج

$$\begin{aligned} E_{st} &= a_z \tau_{\perp} E_0 e^{-\beta_2 A y} e^{j \beta_2 x \sin \theta_t} \\ H_{st} &= (-j A a_x + \sin \theta_t a_y) \tau_{\perp} \frac{E_0}{Z_2} e^{-\beta_2 A y} e^{j \beta_2 x \sin \theta_t} \\ &= (-j A a_x + \sin \theta_t a_y) \tau_{\perp} \frac{E_0}{|Z_2|} e^{-\beta_2 A y} e^{(j \beta_2 x \sin \theta_t - j \theta_z)} \end{aligned}$$

لکھے جائیں گے جہاں $Z = |Z| e^{j \theta_z}$ کا استعمال کیا گیا۔ ہوا میں سرحد سے دور a_y سمت میں اوسط طاقت کی منتقلی صفحہ 468 پر مساوات 10.56

$$\mathcal{P}_{\text{اوسط}} = \frac{1}{2} [E_s \times H_s^*]_{\text{حقیقی}}$$

کی مدد حاصل کرتے ہیں۔ مقناطیسی میدان کا a_y جزو اس منتقلی میں کوئی کردار ادا نہیں کرتا لہذا اس کا صرف a_x جزو لیا جائے گا۔ جوڑی دار مخلوط مقناطیسی میدان H_s^* لکھتے ہوئے H_s میں تمام مقامات پر z کی علامت مثبت سے منفی اور منفی سے مثبت کر دی جاتی ہے۔

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} E_s \times H_s^* &= \frac{1}{2} [a_z \tau_{\perp} E_0 e^{-\beta_2 A y} e^{j \beta_2 x \sin \theta_t}] \times \left[j A a_x \tau_{\perp} \frac{E_0}{|Z_2|} e^{-\beta_2 A y} e^{(-j \beta_2 x \sin \theta_t + j \theta_z)} \right] \\ &= a_y \frac{\tau_{\perp}^2 E_0^2}{2 |Z_2|} e^{-2 \beta_2 A y} [j \cos \theta_z - \sin \theta_z] \end{aligned}$$

کا حقیقی جزو لیتے ہوئے

$$\mathcal{P}_{\text{اوسط}} = -a_y \frac{\tau_{\perp}^2 E_0^2}{2|Z_2|} e^{-2\beta_2 A y} \sin \theta_Z$$

حاصل ہوتا ہے۔ ہوا میں Z حقیقی عدد ہے لہذا $\theta_Z = 0$ ہو گا اور چونکہ $\sin 0 = 0$ ہوتا ہے لہذا اوسط طاقت کی منتقلی

$$\mathcal{P}_{\text{اوسط}} = -a_y \frac{\tau_{\perp}^2 E_0^2}{2|Z_2|} e^{-2\beta_2 A y} \sin 0^\circ = 0$$

صفر ہو گی۔ یوں کم کثافتی خطے میں مکمل اندرونی انعکاس کی صورت میں اوسطاً کوئی طاقت منتقل نہیں ہو گا اور برقی اور مقناطیسی امواج سرحد کے قریب ہی رہتی ہیں۔ ایسی امواج کو فنا پذیر امواج¹⁶ کہتے ہیں۔

کم کثافتی خطے یعنی ہوا میں مقناطیسی موج کا a_y جزو اور برقی a_z اجزاء سرحد کے ساتھ ساتھ، بے ضیاع $-a_x$ سمت میں حرکت کریں گے۔ ہوا میں ان امواج کی رفتار، زیادہ کثافتی خطے یعنی پانی میں، سرحد کے متوازی موج کی رفتار کے برابر ہو گی یعنی

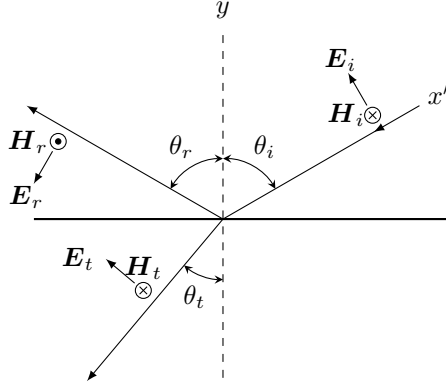
$$\text{پانی میں رفتار موج} = \frac{\text{ہوا میں سرحد کے متوازی موج کی رفتار}}{\sin \theta_i}$$

سرحدی موج درحقیقت سرحدی شرائط پورا کرنے کی درکار برقی اور مقناطیسی میدان ہیں۔

متوازی قطبی برقی موج E_{\parallel}

آئیں اب متوازی قطبی موج کی صورت حال دیکھیں۔ یاد رہے کہ موج کی سمت پونٹنگ سمتیہ $E \times H$ کی سمت ہی ہوتی ہے۔ برقی اور مقناطیسی میدان، موج کے حرکت کی سمت کے عمودی ہوتے ہیں۔ یوں سمت حرکت کے عمودی، برقی میدان کی سمت فرض کرتے ہوئے اور سمت حرکت جانتے ہوئے مقناطیسی میدان کی سمت کا تعین پونٹنگ سمتیہ

¹⁶ evanescent wave



شکل 12.4: متوازی قطبی موج میں برقی میدان سطح آمد کے متوازی ہوتا ہے۔

سے کیا جاتا ہے۔ متوازی قطبی موج کی بات کرتے ہوئے، آمدی برقی میدان کی سمت یا تو شکل 12.4 میں E_i کی سمت اور یا اس کے الٹ سمت ممکن ہے۔ یہ واحد دو سمتیں ہیں جو موج کے حرکت کے عمودی اور آمدی سطح کے متوازی ہیں۔ اگر آمدی برقی میدان کی سمت شکل میں دکھائے سمت کے الٹ ہو تب آمدی مقناطیسی میدان کی سمت بھی الٹ ہوگی یعنی یہ صفحہ سے باہر جانب کو ہو گا۔ سمت حرکت کے عمودی اور آمدی سطح کے متوازی، انعکاسی موج E_r کی بھی دو سمتیں ممکن ہیں جن میں ایک سمت شکل میں فرض کی گئی ہے۔ برقی انعکاسی میدان کی سمت فرض کرنے سے انعکاسی مقناطیسی میدان کی سمت اب وہی ممکن ہے جسے شکل میں دکھایا گیا ہے۔ انہیں اس شکل کو حل کریں۔

مساوات 12.2 اور مساوات 12.4 کی مدد سے شکل 12.4 کے لئے

$$(12.35) \quad \mathbf{E}_{si} = (-\cos \theta_i \mathbf{a}_x + \sin \theta_i \mathbf{a}_y) E_0 e^{j\beta_1(x \sin \theta_i + y \cos \theta_i)}$$

$$(12.36) \quad \mathbf{H}_{si} = -\mathbf{a}_z \frac{E_0}{Z_1} e^{j\beta_1(x \sin \theta_i + y \cos \theta_i)}$$

لکھے جاسکتے ہیں۔ اسی طرح گزشتہ معلومات کا سہارا لیتے ہوئے

$$(12.37) \quad \mathbf{E}_{sr} = -(\cos \theta_r \mathbf{a}_x + \sin \theta_r \mathbf{a}_y) \Gamma_{\parallel} E_0 e^{j\beta_1(x \sin \theta_r - y \cos \theta_r)}$$

$$(12.38) \quad \mathbf{H}_{sr} = \mathbf{a}_z \Gamma_{\parallel} \frac{E_0}{Z_1} e^{j\beta_1(x \sin \theta_r - y \cos \theta_r)}$$

$$(12.39) \quad \mathbf{E}_{st} = (-\cos \theta_t \mathbf{a}_x + \sin \theta_t \mathbf{a}_y) \tau_{\parallel} E_0 e^{j\beta_2(x \sin \theta_t + y \cos \theta_t)}$$

$$(12.40) \quad \mathbf{H}_{st} = -\mathbf{a}_z \tau_{\parallel} \frac{E_0}{Z_2} e^{j\beta_2(x \sin \theta_t + y \cos \theta_t)}$$

لکھے جاسکتے ہیں۔ سرحد ($y = 0$) پر برقی شرط لاگو کرنے کی خاطر برقی میدان کا وہ حصہ استعمال کیا جائے گا جو سرحد کے متوازی ہے۔ یوں a_y جزو کو رد کیا جائے گا جبکہ a_x جزو کو استعمال کیا جائے گا لہذا

$$\begin{aligned} & -\cos \theta_i a_x E_0 e^{j\beta_1(x \sin \theta_i + 0 \cos \theta_i)} - \cos \theta_r a_x \Gamma_{\parallel} E_0 e^{j\beta_1(x \sin \theta_r - 0 \cos \theta_r)} \\ & = -\cos \theta_t a_x \tau_{\parallel} E_0 e^{j\beta_2(x \sin \theta_t + 0 \cos \theta_t)} \end{aligned}$$

یعنی

$$(12.41) \quad \cos \theta_i e^{j\beta_1 x \sin \theta_i} + \cos \theta_r \Gamma_{\parallel} e^{j\beta_1 x \sin \theta_r} = \cos \theta_t \tau_{\parallel} e^{j\beta_2 x \sin \theta_t}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس مساوات میں x کی قیمت تبدیل کرنے سے e کی طاقت تبدیل ہوتی ہے۔ ایسی صورت میں یہ مساوات صرف اور صرف اس صورت درست ہو گا جب مساوات میں تینوں e کے طاقت، x کے تمام قیمتوں کے لئے برابر ہوں یعنی

$$(12.42) \quad j\beta_1 x \sin \theta_i = j\beta_1 x \sin \theta_r = j\beta_2 x \sin \theta_t$$

ہو۔ اس مساوات سے

$$(12.43) \quad \theta_i = \theta_r$$

اور

$$(12.44) \quad \sin \theta_t = \frac{\beta_1}{\beta_2} \sin \theta_i$$

حاصل ہوتے ہیں جو عین عمودی قطبی موج کے مساوات ہیں۔ مساوات 12.41 میں مساوات 12.42 پر کرنے سے

$$(12.45) \quad 1 + \Gamma_{\parallel} = \frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i} \tau_{\parallel}$$

حاصل ہوتا ہے۔

سرحد پر مقناطیسی شرط لاگو کرتے ہیں۔ چونکہ مقناطیسی میدان سرحد کے متوازی ہے لہذا اس کا کوئی جزو رد نہیں کیا جائے گا۔ اس طرح

$$\begin{aligned} & -a_z \frac{E_0}{Z_1} e^{j\beta_1(x \sin \theta_i + 0 \cos \theta_i)} + a_z \Gamma_{\parallel} \frac{E_0}{Z_1} e^{j\beta_1(x \sin \theta_r - 0 \cos \theta_r)} \\ & = -a_z \tau_{\parallel} \frac{E_0}{Z_2} e^{j\beta_2(x \sin \theta_t + 0 \cos \theta_t)} \end{aligned}$$

یعنی

$$e^{j\beta_1 x \sin \theta_i} - \Gamma_{\parallel} e^{j\beta_1 x \sin \theta_r} = \tau_{\parallel} \frac{Z_1}{Z_2} e^{j\beta_2 x \sin \theta_t}$$

لکھا جا سکتا ہے جس میں مساوات 12.42 پر کرنے سے

$$(12.46) \quad 1 - \Gamma_{\parallel} = \tau_{\parallel} \frac{Z_1}{Z_2}$$

ملتا ہے۔ مساوات 12.45 اور مساوات 12.46 حل کرتے ہوئے

$$(12.47) \quad \Gamma_{\parallel} = \frac{Z_2 \cos \theta_t - Z_1 \cos \theta_i}{Z_1 \cos \theta_i + Z_2 \cos \theta_t}$$

ملتا ہے جو غیر مقناطیسی اور بے ضیاع خطوں میں

$$(12.48) \quad \Gamma_{\parallel} = \frac{-\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \cos \theta_i + \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} - \sin^2 \theta_i}}{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \cos \theta_i + \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} - \sin^2 \theta_i}}$$

صورت اختیار کر لے گی۔ اگر خطہ-2 کامل موصل ہو تب $\Gamma_{\parallel} = -1$ حاصل ہوتا ہے جو متوقع جواب ہے۔

متوازی قطبی موج کی صورت میں ایسے آمدی زاویہ ممکن ہے جس پر $\Gamma_{\parallel} = 0$ حاصل ہو لہذا ایسی صورت میں تمام کی تمام موج بغیر انعکاس کے دوسرے خطے میں داخل ہو جاتی ہے۔ اس آمدی زاویے کو بریوسٹر زاویہ¹⁷ کہتے¹⁸ ہیں۔ مساوات 12.48 کو صفر کے برابر پر کرنے سے زاویہ بریوسٹر

$$(12.49) \quad \theta_{i, \text{بریوسٹر}} = \sin^{-1} \sqrt{\frac{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}{1 + \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}} = \tan^{-1} \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس مساوات کی دوسری شکل

$$(12.50) \quad \theta_{i, \text{بریوسٹر}} = \sin^{-1} \left(\frac{n_2}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}} \right)$$

¹⁷Brewster angle

¹⁸یہ زاویہ سکاٹ لینڈ کے داؤد بریوسٹر کے نام سے منسوب ہے۔

ہے۔

کسی بھی موج کو عمودی اور متوازی قطبی امواج کا مجموعہ لکھا جا سکتا ہے۔ یوں اگر غیر قطبی موج، سرحد پر زاویہ بریوسٹر سے آمد ہو تب اس موج کا وہ جزو جو متوازی قطبیت رکھتا ہو سرحد سے مکمل طور دوسری جانب گزر جائے گا جبکہ سرحد سے انعکاسی جزو صرف اور صرف عمودی قطبیت کا ہو گا۔ عمودی قطبی موج حاصل کرنے کا یہ آسان طریقہ ہے۔ عمودی موج کا کچھ حصہ منعکس ہو گا اور کچھ حصہ منحرف لہذا انعطافی موج غیر قطبی ہو گی۔ زاویہ بریوسٹر کو زاویہ قطبیت¹⁹ بھی کہتے ہیں۔

مثال 12.3: ہوا سے شیشے میں برقی موج بریوسٹر زاویے سے داخل ہوتی ہے جہاں شیشے کا انعطافی مستقل $n = 1.45$ ہے۔ انعطافی زاویہ حاصل کریں۔

حل: اس شیشے کا بریوسٹر زاویہ

$$\theta_{\text{بریوسٹر}} = \sin^{-1} \frac{1.45}{\sqrt{1 + 1.45^2}} = 55.4^\circ$$

ہے جسے ابن سہل کے قانون میں استعمال کرتے ہوئے انعطافی زاویہ حاصل کرتے ہیں۔

$$\theta_t = \sin^{-1} \left(\frac{n_1}{n_2} \sin \theta_{\text{بریوسٹر}} \right) = \sin^{-1} \left(\frac{n_1}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}} \right) = 34.6^\circ$$

اس مثال میں آپ نے دیکھا کہ $\sin \theta_t = \cos \theta_{\text{بریوسٹر}}$ کے برابر ہے۔ یہ ایک عمومی نتیجہ جسے

$$(12.51) \quad \theta_{\text{بریوسٹر}} + \theta_t = 90^\circ$$

لکھا جا سکتا ہے۔

مثال 12.4: متوازی قطبی موج ہوا سے پانی کی طرف آمد ہے۔ زاویہ بریوسٹر حاصل کریں۔ پانی کا جزوی برقی مستقل $\epsilon_r = 80$ لیں۔

حل:

$$(12.52) \quad \theta_{i, \text{بریوسٹر}} = \tan^{-1} \sqrt{\frac{80}{1}} = 83.6^\circ$$

مشق 12.1: شکل 12.4 میں انعکاسی میدانوں کی سمتیں الٹ تصور کرتے ہوئے شرح انعکاس Γ_{\parallel} حاصل کریں۔ چونکہ یہاں انعکاسی میدان الٹ تصور کئے جا رہے ہیں لہذا ہم توقع کرتے ہیں کہ Γ_{\parallel} کی حاصل مساوات منفی ایک سے ضرب ہوگی۔

جواب: صرف انعکاسی امواج میں فرق ہو گا جنہیں یوں لکھا جائے گا۔

$$\mathbf{E}_{sr} = (\cos \theta_r \mathbf{a}_x + \sin \theta_r \mathbf{a}_y) \Gamma_{\parallel} E_0 e^{j\beta_1(x \sin \theta_r - y \cos \theta_r)}$$

$$\mathbf{H}_{sr} = -\mathbf{a}_z \Gamma_{\parallel} \frac{E_0}{Z_1} e^{j\beta_1(x \sin \theta_r - y \cos \theta_r)}$$

شرح انعکاس $\frac{Z_1 \cos \theta_i - Z_2 \cos \theta_t}{Z_1 \cos \theta_i + Z_2 \cos \theta_t}$ حاصل ہو گا۔

12.2 قطبی موج کی ترچھی آمد

شکل 12.5 میں قطبی موج کی ترچھی آمد دکھائی گئی ہے۔ اس شکل میں آمدی، انعکاسی اور ترسیلی امواج کے لئے علیحدہ علیحدہ کارٹینیسی محدد استعمال کئے گئے ہیں۔ ان تینوں محدد کے مرکز کو نقطہ M ظاہر کرتی ہے جبکہ تینوں امواج کو اپنے اپنے محدد کے x محدد پر حرکت کرتا تصور کیا گیا ہے۔ یوں آمدی موج گھٹتی x' جانب حرکت کر رہی ہے جبکہ انعکاسی موج بڑھتے x'' جانب اور ترسیلی موج بڑھتے x''' جانب حرکت کر رہی ہے۔ محدد z' ، z'' اور z''' ، صفحہ کتاب کے عمودی باہر جانب کو ہے۔ یوں ان تینوں کو z سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ آمدی قطبی برقی موج کے عمودی جزو کا حیثہ $E_{i\perp}$ اور دوری زاویہ صفر ہے جبکہ متوازی جزو کا حیثہ $E_{i\parallel}$ اور دوری زاویہ δ_i ہے۔ شکل کو دیکھتے ہوئے

$$(12.53) \quad \mathbf{E}_i = (E_{i\perp} \mathbf{a}_z + E_{i\parallel} e^{j\delta_i} \mathbf{a}'_y) e^{j(\omega t + \beta_1 x')}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ انعکاسی مستقل

$$(12.54) \quad \Gamma_{\perp} = |\Gamma_{\perp}| e^{j\phi_{\perp}}$$

$$(12.55) \quad \Gamma_{\parallel} = |\Gamma_{\parallel}| e^{j\phi_{\parallel}}$$

لیتے ہیں۔ یوں انعکاسی موج کے اجزاء

$$(12.56) \quad E_{r\perp} = E_z = \Gamma_{\perp} E_{i\perp} = |\Gamma_{\perp}| E_{i\perp} e^{j\phi_{\perp}}$$

$$(12.57) \quad E_{r\parallel} = E_{y''} = \Gamma_{\parallel} E_{i\parallel} e^{j\delta} = |\Gamma_{\parallel}| E_{i\parallel} e^{j(\phi_{\parallel} + \delta_i)}$$

لکھے جاسکتے ہیں۔ اسی طرح ترسیلی مستقل²⁰

$$(12.58) \quad \tau_{\perp} = |\tau_{\perp}| e^{j\zeta_{\perp}}$$

$$(12.59) \quad \tau_{\parallel} = |\tau_{\parallel}| e^{j\zeta_{\parallel}}$$

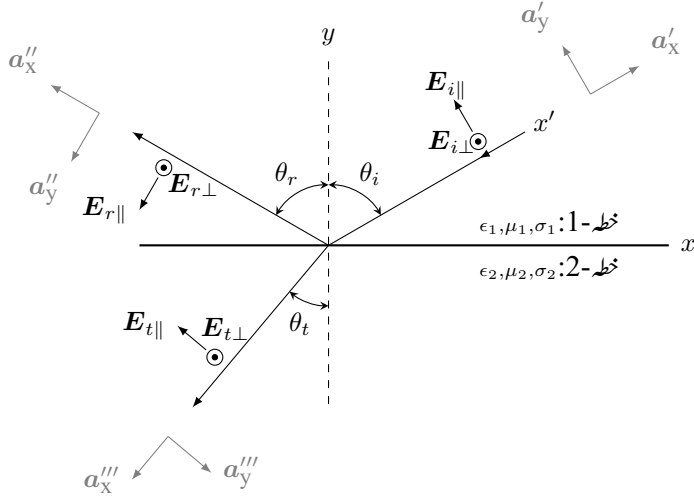
لیتے ہوئے ترسیلی موج کے اجزاء

$$(12.60) \quad E_{t\perp} = \tau_{\perp} E_{i\perp} = |\tau_{\perp}| E_{i\perp} e^{j\zeta_{\perp}}$$

$$(12.61) \quad E_{t\parallel} = \tau_{\parallel} E_{i\parallel} = |\tau_{\parallel}| E_{i\parallel} e^{j(\zeta_{\parallel} + \delta_i)}$$

ہوں گے۔

²⁰ ہم τ کی علامت موج کے چمکاؤ جبکہ τ_{\perp} اور τ_{\parallel} کو بطور ترسیلی مستقل استعمال کرتے ہیں۔



شکل 12.5: قطبی برقی موج سرحد پر ترچھی آمد۔

مثال 12.5: ہوا سے، دایاں دائری قطبی موج 45° کے زاویے سے کامل موصل سطح پر آمد ہے۔ انعکاسی موج کی قطبیت دریافت کریں۔

حل: موصل سطح پر ترچھی آمد دائری قطبی موج کے انعکاسی مستقل مساوات 12.29 اور مساوات 12.47 سے حاصل کئے جائیں گے۔ کامل موصل کی موصلیت $\sigma \rightarrow \infty$ لیتے ہوئے موصل کی قدرتی رکاوٹ $Z = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}} = 0$ حاصل ہوتی ہے جسے ان مساوات میں پر کرتے ہوئے

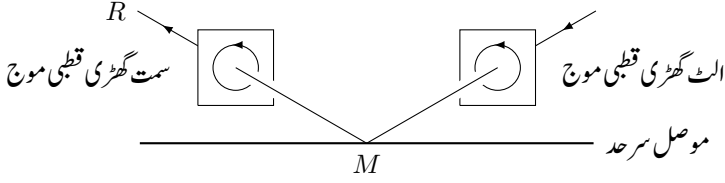
$$\Gamma_{\perp} = \Gamma_{\parallel} = -1$$

حاصل ہوتے ہیں۔ صفحہ 520 پر مساوات 10.141 کی مدد سے منفی x' جانب حرکت کرتی، آمدی دائیں دائری قطبی موج

$$\mathbf{E}_i = E_0[\mathbf{a}_z \cos(\omega t + \beta x') + \mathbf{a}'_y \cos(\omega t + \beta x' - 90^\circ)]$$

یعنی

$$\mathbf{E}_{si} = E_0(\mathbf{a}_z + e^{-j\frac{\pi}{2}} \mathbf{a}'_y) e^{j\beta_1 x'}$$



شکل 12.6: الٹ گھڑی قطبی آمدی موج موصل سطح سے انعکاس کے بعد سمت گھڑی قطبیت رکھتی ہے۔

لکھی جائے گی۔ اس موج کو شکل 12.6 میں دکھایا گیا ہے۔ نقطہ M سے دیکھتے ہوئے یہ الٹ گھڑی گھومتی ہے لہذا آمدی موج دائیں قطبی ہے۔ انعکاسی مستقل استعمال کرتے ہوئے انعکاسی اجزاء

$$E_{r\perp} = -E_0$$

$$E_{r\parallel} = -E_0 e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

لکھے جاسکتے ہیں۔ یوں مثبت x'' جانب حرکت کرتی، انعکاسی موج

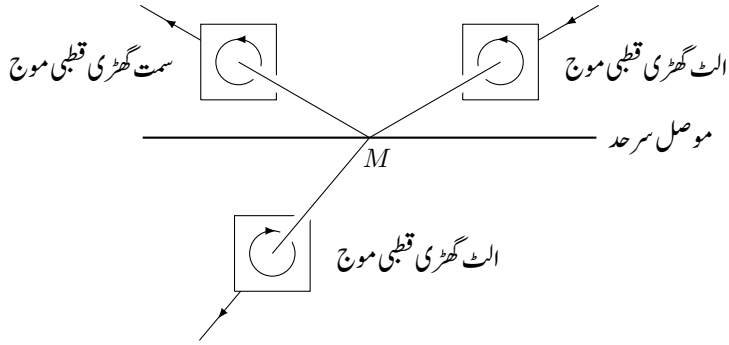
$$\mathbf{E}_{sr} = E_0(-\mathbf{a}_z - e^{-j\frac{\pi}{2}} \mathbf{a}_y'') e^{-j\beta_1 x''}$$

یعنی

$$\mathbf{E}_r = E_0[-\cos(\omega t - \beta x'') \mathbf{a}_z - \sin(\omega t - \beta x'') \mathbf{a}_y'']$$

ہوگی۔ شکل 12.6 میں نقطہ R سے دیکھتے ہوئے انعکاسی موج گھڑی کی سمت میں گھومتی ہے لہذا یہ دائری بائیں قطبی ہے۔ یوں موصل سطح پر دائیں قطبی موج انعکاس کے بعد بائیں قطبی ہو جاتی ہے۔ اسی طرح موصل سطح پر بائیں قطبی موج انعکاس کے بعد دائیں قطبی ہو جاتی ہے۔

موصل سطح پر صفر برقی میدان پایا جاتا ہے۔ شکل 12.6 میں سرحد پر آمدی برقی میدان کے الٹ انعکاسی میدان پیدا ہو کر سرحد پر کل صفر برقی میدان پیدا کرتا ہے۔ یوں سرحد پر آمدی اور انعکاسی میدان ایک ہی سمت میں گھومتے ہیں۔ یہاں رک کر تسلی کر لیں کہ آپ کو اس بات کی سمجھ آگئی ہے۔ شکل میں آمدی اور انعکاسی امواج کے گھومنے کی سمتیں گول دائروں سے دکھائی گئی ہے۔ ان دائروں کو عین سرحد پر تصور کرتے ہوئے غور کریں۔ آپ کو سرحد پر دونوں سمتیات ایک ہی سمت میں گھومتے نظر آئیں گے۔



شکل 12.7: سرحد پر آمدی، انعکاسی اور ترسیلی برقی سمتیات ایک ہی سمت میں گھومتے ہیں۔

سرحدی شرائط کے تحت کسی بھی سرحد پر متوازی برقی میدان ہموار پایا جاتا ہے۔ اس اصول کو بروئے کار لاتے ہوئے آمدی برقی موج کو دیکھتے ہوئے انعکاسی اور ترسیلی امواج کے گھومنے کی سمت حاصل کی جاسکتی ہے۔ شکل 12.7 میں عمومی صورت حال دکھائی گئی ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ سرحدی شرط پر پورا اترنے کے لئے ضروری ہے کہ آمدی، انعکاسی اور ترسیلی سمتیات سرحد پر ہم قدم ہو کر گھومیں۔ اس طرح ہم کہہ سکتے ہیں کہ بائیں آمدی برقی موج، دائیں انعکاسی اور بائیں ترسیلی برقی امواج پیدا کرے گی جبکہ دائیں آمدی برقی موج، بائیں انعکاسی اور دائیں ترسیلی برقی امواج پیدا کرے گی۔

مثال 12.6: صفحہ 490 پر مثال 10.6 میں سمندری پانی ($\sigma = 5, \mu_R = 1, \epsilon_R = 78$) پر عمودی آمدی برقی موج کی بات کی گئی۔ اسی مثال کو آگے بڑھاتے ہیں۔ تصور کریں کہ 50 MHz تعدد کی آمدی بائیں دائری قطبی موج سطح سمندر کے عمود کے ساتھ 65° کا زاویہ بناتی ہے۔ الف) عمودی اور متوازی انعکاسی مستقل حاصل کریں۔ ب) عمودی اور متوازی ترسیلی مستقل حاصل کریں۔ پ) انعکاسی موج کی قطبیت دریافت کریں۔ ت) آمدی طاقت کا کتنا فی صد سطح پار کرتی ہے۔

حل: سمندری پانی کی قدرتی رکاوٹ

$$Z_2 = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}} = \sqrt{\frac{j2\pi \times 50 \times 10^6 \times 4\pi \times 10^{-7}}{5 + j2\pi \times 50 \times 10^6 \times 78 \times 8.85 \times 10^{-12}}}$$

$$= 6.41 + j6.14 \quad \Omega$$

اور حرکی مستقل

$$\begin{aligned}
\gamma_2 &= \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)} \\
&= \sqrt{j2\pi \times 50 \times 10^6 \times 4\pi \times 10^{-7}(5 + j2\pi \times 50 \times 10^6 \times 78 \times 8.85 \times 10^{-12})} \\
&= 30.7 + j32.1 \quad \text{m}^{-1} \\
&= \alpha_2 + j\beta_2
\end{aligned}$$

ہیں۔ ہوا میں طول موج $\lambda_1 = \frac{c}{f} = 6 \text{ m}$ ہے لہذا $\beta_1 = \frac{2\pi}{\lambda} = 1.047197$ ہو گا۔ مساوات 12.20 ابن سہل کی عمومی مساوات ہے۔ اسے استعمال کرتے ہوئے

$$\begin{aligned}
\sin \theta_t &= \frac{\beta_1}{\beta_2} \sin \theta_i \\
&= \frac{1.047197}{32.1} \sin 65^\circ
\end{aligned}$$

سے

$$\theta_t = 1.69^\circ$$

حاصل ہوتا ہے۔ یوں مساوات 12.29 اور مساوات 12.47 استعمال کرتے ہوئے

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\perp} &= \frac{(6.41 + j6.14) \cos 65^\circ - 377 \cos 1.69^\circ}{(6.41 + j6.14) \cos 65^\circ + 377 \cos 1.69^\circ} \\
&= -0.9856 + j0.01359 \\
&= 0.9857/179.2^\circ
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\parallel} &= \frac{(6.41 + j6.14) \cos 1.69^\circ - 377 \cos 65^\circ}{377 \cos 65^\circ + (6.41 + j6.14) \cos 1.69^\circ} \\
&= -0.9199 + j0.0712 \\
&= 0.9227/175.6^\circ
\end{aligned}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ یوں $\tau = 1 + \Gamma$ استعمال کرتے ہوئے

$$\begin{aligned}
\tau_{\perp} &= 0.0144 + j0.01359 = 0.01979/43.3^\circ \\
\tau_{\parallel} &= 0.0801 + j0.0712 = 0.1071/41.6^\circ
\end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے۔

چونکہ عمودی اور متوازی انعکاسی مستقل برابر نہیں ہیں لہذا انعکاسی موج بیضوی قطبی ہوگی۔ انعکاس کے بعد یہ دائیں قطبی ہوگی۔ ترسیلی موج بائیں بیضوی قطبی ہوگی۔

آمدی موج دائری ہے لہذا اس میں آمدی طاقت عمودی قطبی اور آمدی متوازی قطبی ہوگی۔ یوں کل انعکاسی طاقت، آمدی طاقت کا

$$\frac{\Gamma_{\perp}^2}{2} + \frac{\Gamma_{\parallel}^2}{2} = \frac{0.9857^2}{2} + \frac{0.9227^2}{2} = 0.9155$$

یعنی 91.55% حصہ ہوگا۔ بقایا 8.4% طاقت ترسیل ہوگا۔

12.3 ترسیم ہائی گن

ہائی گن²¹ کا اصول کہتا ہے کہ محاذ موج پر ہر نقطے کو منبع کروی موج تصور کیا جاسکتا ہے۔ شکل 12.8 میں اس اصول کو دکھایا گیا ہے جہاں ابتدائی محاذ موج پر مختلف نقطوں سے پیدا ثنائی امواج دکھائے گئے ہیں۔ یہ ثنائی امواج مل کر ثنائی محاذ موج پیدا کرتی ہیں۔ ہائی گن کے اصول کی مدد سے شعاع کی راہ میں حائل چیز کے قریب شعاع کا مڑ جانا سمجھا جاسکتا ہے جو نا تو انعکاس اور نا ہی انعطاف کے زمرے میں آتا ہے۔

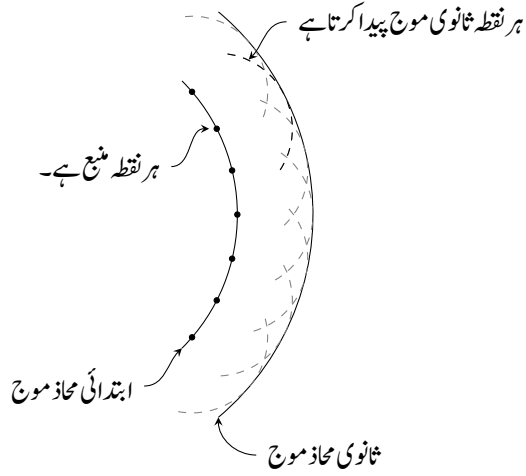
شعاع کی راہ میں حائل موصل سطح شکل میں دکھائی گئی ہے۔ آئیں ہائی گن کے اصول سے نقطہ N پر برقی میدان

$$(12.62) \quad E = \int dE$$

حاصل کریں جہاں موصل سطح کے کنارے سے آگے x محدود پر عمومی نقطے کو منبع موج تصور کرتے ہوئے N پر میدان dE کے برابر ہے۔

$$(12.63) \quad dE = \frac{E_0}{r} e^{-j\beta(r+\delta)} dx$$

²¹Huygen's principle



شکل 12.8: ہائی گن کے اصول کے تحت محاذ موج پر ہر نقطہ منبع موج کا کردار ادا کرتا ہے۔

سے

$$(12.64) \quad E = \frac{E_0}{r} e^{-j\beta r} \int_a^\infty e^{-j\beta\delta} dx$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اگر $r \gg \delta$ ہو تب

$$(12.65) \quad \delta = \frac{x^2}{2r}$$

کے برابر ہو گا۔ یوں $k^2 = \frac{2}{r\lambda}$ اور $u = kx$ لیتے ہوئے

$$(12.66) \quad E = \frac{E_0}{kr} e^{-j\beta r} \int_{ka}^\infty e^{-j\frac{\pi u^2}{2}} du$$

لکھا جا سکتا ہے جسے

$$(12.67) \quad E = \frac{E_0}{kr} e^{-j\beta r} \left(\int_0^\infty e^{-j\frac{\pi u^2}{2}} du - \int_0^{ka} e^{-j\frac{\pi u^2}{2}} du \right)$$

لکھ سکتے ہیں۔ مندرجہ بالا مساوات کا حل

$$(12.68) \quad E = \frac{E_0}{kr} e^{-j\beta r} \left[\frac{1}{2} + \frac{j}{2} - [C(ka) + jS(ka)] \right]$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں

$$(12.69) \quad C(ka) = \int_0^{ka} \cos \frac{\pi u^2}{2} du$$

$$(12.70) \quad S(ka) = \int_0^{ka} \sin \frac{\pi u^2}{2} du$$

کے برابر ہیں اور جنہیں عددی طریقے سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

12.4 انتشار

کسی بھی مادہ میں مثبت اور منفی بار قدرتی گھمکی تعدد پر ارتعاش کرتے ہیں۔ اس قدرتی گھمکی تعدد یا اس کے قریب تعدد کے موج میں مادہ رکھنے سے ارتعاش زور پکڑتی ہے۔ ارتعاش کے حیٹے میں اضافے کے لئے درکار توانائی موج سے حاصل کی جاتی ہے۔ یوں موج کی طاقت کم ہوتی ہے۔ اس طرز کی قوت کے ضیاع کو مخلوط برقی مستقل

$$(12.71) \quad \epsilon = \epsilon' - j\epsilon'' = \epsilon_0(\epsilon'_R - j\epsilon''_R)$$

کی مدد سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔ موج کی تعدد اور مادے کی قدرتی گھمکی تعدد جتنے قریب ہوں، موج اتنی ہی زیادہ طاقت کھوتی ہے۔ اس کا مطلب یوں بھی لیا جا سکتا ہے کہ ϵ'_R اور ϵ''_R کا دارومدار تعدد پر ہے۔

مقناطیسی موج سے مادے میں طاقت کے ضیاع کو مخلوط مقناطیسی مستقل $\mu = \mu' - j\mu''$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ مقناطیسی اشیاء، مثلاً لوہا، میں ایسا طاقت کا ضیاع نہایت اہمیت رکھتا ہے۔ حرکت کرتے موج کے عموماً مسائل میں مقناطیسی موج کی ضیاع قابل نظر انداز ہوتی ہے لہذا ایسی صورت میں $\mu \approx \mu_0$ ہی لیا جاتا ہے۔ اس کتاب میں ایسا ہی کیا جائے گا۔

ایسا مادہ جس کے مستقل $\epsilon = \epsilon' - j\epsilon''$ اور $\mu = \mu_0$ ہوں کی قدرتی رکاوٹ صفحہ 449 پر مساوات 10.31 سے

$$(12.72) \quad Z = \sqrt{\frac{j\omega\mu_0}{j\omega(\epsilon' - j\epsilon'')}} = \sqrt{\frac{j\omega\mu_0}{\omega\epsilon'' + j\omega\epsilon'}}$$

لکھی جاسکتی ہے۔ اس مساوات میں حقیقی جزو $\omega\epsilon''$ ہے جو طاقت کے ضیاع کی وجہ بنتا ہے لہذا

$$(12.73) \quad \omega\epsilon'' = \sigma$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں موصلیت طاقت کے ضیاع کا جزو ہے۔ اسی طرح مساوات 10.12 کو یوں

$$(12.74) \quad \gamma = \mp \sqrt{j\omega\mu [j\omega(\epsilon' - j\epsilon'')] } = \mp \sqrt{j\omega\mu (\omega\epsilon'' + j\omega\epsilon')}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ یہاں بھی $\sigma = \omega\epsilon''$ لکھ کر ضیاعی جزو کی نشاندہی کی جاسکتی ہے۔

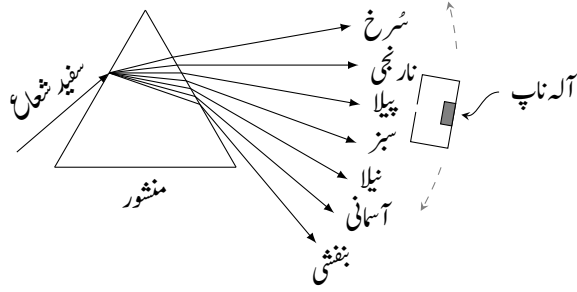
مثال 12.7: صفحہ 464 پر شکل 10.4 میں پانی کے طبعی مستقل دکھائے گئے ہیں۔ اس شکل سے $1 \frac{\text{Mrad}}{\text{s}}$ اور $126 \frac{\text{Grad}}{\text{s}}$ تعدد پر ϵ'_R اور ϵ''_R حاصل کریں۔

حل: دیے گئے شکل میں ϵ_R ہی ϵ'_R کو ظاہر کرتی ہے جبکہ $\sigma = \omega\epsilon''$ کے برابر ہے۔ یوں $1 \frac{\text{Mrad}}{\text{s}}$ پر $\epsilon_R \approx 78$ اور $\sigma \approx 0$ سے $\epsilon'_R = 78$ اور $\epsilon''_R = 0$ لکھے جاسکتے ہیں جبکہ $126 \frac{\text{Grad}}{\text{s}}$ پر $\epsilon_R \approx 41$ اور $\sigma \approx 36.7$ سے $\epsilon'_R = 41$ اور $\epsilon''_R = 32.9$ لکھے جاسکتے ہیں۔

آہیں اب اصل موضوع کی بات کریں۔ چونکہ برقی مستقل کا دارومدار موج کی تعدد پر ہے لہذا تعدد تبدیل کرنے سے برقی مستقل بھی تبدیل ہوگا۔ برقی مستقل تبدیل کی تبدیلی سے انعطافی مستقل²² بھی تبدیل ہوتا ہے۔ مختلف تعدد کے امواج کو درپیش مختلف انعطافی مستقل ہی استعمال کرتے ہوئے شیشے کا منشور²³ سفید شعاع کے رنگ علیحدہ علیحدہ کرتا ہے۔ شکل 12.9 میں ایسا دکھایا گیا ہے۔ رنگ علیحدہ کرنے کے عمل کو زاویائی انتشار²⁴ یا رنگین انتشار²⁵ کہتے ہیں۔

یہاں انتشار سے مراد، موج کے قابل شناخت حصوں کو علیحدہ کرنا ہے۔ شعاع کے قابل شناخت اجزاء اس کے مختلف رنگ ہیں۔ منشور شعاع کے رنگ علیحدہ کرتا ہے۔ یہاں اہم نتیجہ یہ ہے کہ منشور نے شعاع کی طاقت کو تعدد کی نسبت سے مختلف حصوں میں بانٹ دیا ہے۔ فرض کریں کہ ہم کسی شعاع میں سبز اور نیلے رنگ کی مقدار جاننا

refractive index²²
prism²³
angular dispersion²⁴
chromatic dispersion²⁵



شکل 12.9: شعاع کی انتشار سے منشور سفید شعاع کے رنگ بکھیرتا ہے۔

چاہتے ہیں۔ شعاع کی طاقت ناپنے کا آلہ منشور کے سامنے سبز اور نیلے شعاع کی مقام پر رکھتے ہوئے ان کی طاقت ناپی جائے گی۔ سفید شعاع کی طاقت بھی ناپی جائے گی۔ جیسے شکل میں دکھایا گیا ہے، آلہ ناپ تک شعاع ڈبے میں باریک سوراخ کے ذریعہ پہنچتی ہے۔ آلہ ناپ شعاع کے ان تمام حصوں کی طاقت ناپے گا جو سوراخ سے گزر پائیں۔ یوں سوراخ جتنا چھوٹا ہو، آلہ ناپ تک پہنچتی شعاعی بیٹی²⁶ میں تعددی فرق اتنی کم پائی جائے گی۔ یوں سوراخ چھوٹے سے چھوٹا کرتے ہوئے کسی بھی تعدد کی طاقت بہتر سے بہتر ناپی جاسکتی ہے۔ ہم شعاع کو تصوراتی طور پر شعاعی بیٹیوں کا مجموعہ تصور کرتے ہیں۔

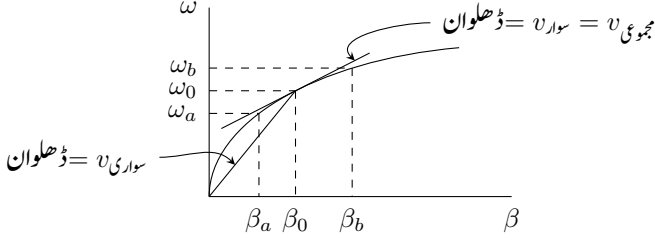
آئیں اب ایسی غیر متناطیسی مادے کی بات کریں جس کا انعطافی مستقل تعدد کے ساتھ تبدیل ہوتا ہو۔ ایسے خطے میں مستوی موج کا حرکی مستقل

$$(12.75) \quad \beta(\omega) = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon(\omega)} = n(\omega) \frac{\omega}{c}$$

صورت اختیار کرے گا جہاں $\epsilon(\omega)$ اور $n(\omega)$ لکھ کر اس حقیقت کی نشاندہی کی گئی ہے کہ برقی مستقل اور انعطافی مستقل تعدد پر منحصر ہیں۔ اگر تعدد بڑھانے سے انعطافی مستقل n بھی بڑھے تب $\beta(\omega)$ بالمقابل ω کی صورت شکل 12.10 کے طرز پر ہوگی۔

فرض کریں کہ شکل 12.10 ایسی خطے کو ظاہر کرتی ہے جس میں ω_a اور ω_b تعدد کے امواج پائے جاتے ہیں۔ دونوں امواج x خطی قطبی ہیں اور بڑھتے z جانب حرکت کر رہے ہیں۔ دونوں کا حیظہ برابر ہے۔ اس شکل میں دونوں امواج کی اوسط تعدد ω_0 کی بھی نشاندہی کی گئی ہے۔ ان کا مجموعی میدان

$$(12.76) \quad E_{\text{مجموعہ}} = E_0 \left[e^{-j\beta_a z} e^{j\omega_a t} + e^{-j\beta_b z} e^{j\omega_b t} \right]$$



شکل 12.10: زاویائی مستقل با متقابل تعدد۔

ہو گا جو علیحدہ علیحدہ میدانوں کا سادہ مجموعہ ہے۔ یاد رہے کہ ان امواج کی تعدد مختلف ہے لہذا مجموعی دوری مساوات لکھتے ہوئے تعدد کو مد نظر رکھنا ضروری ہے۔

شکل 12.10 سے ظاہر ہے کہ $\omega_0 - \omega_a = \omega_b - \omega_0$ ہے جبکہ $\beta_0 - \beta_a \neq \beta_b - \beta_0$ ہے۔ اگر ω_a اور ω_b قریب قریب ہوں تب $\omega - \beta$ خط کے چھوٹے حصے کو یہاں کے مماس سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔ ایسی صورت میں $\beta_0 - \beta_a \approx \beta_b - \beta_0$ لکھنا ممکن ہو گا۔ یوں

$$(12.77) \quad \Delta\omega = \omega_0 - \omega_a = \omega_b - \omega_0$$

$$(12.78) \quad \Delta\beta \approx \beta_0 - \beta_a \approx \beta_b - \beta_0$$

لکھے جا سکتے ہیں۔ مندرجہ بالا دو مساوات استعمال کرتے ہوئے مساوات 12.76 کو

$$(12.79) \quad \begin{aligned} E_{\text{مجموعی}} &= E_0 e^{-j\beta_0 z} e^{j\omega_0 t} \left[e^{j\Delta\beta z} e^{-j\Delta\omega t} + e^{-j\Delta\beta z} e^{j\Delta\omega t} \right] \\ &= 2E_0 e^{j(\omega_0 t - \beta_0 z)} \cos(\Delta\omega t - \Delta\beta z) \end{aligned}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اس سے حقیقی موج کی مساوات

$$(12.80) \quad E_{\text{مجموعی}}(z, t) = 2E_0 \cos(\Delta\omega t - \Delta\beta z) \cos(\omega_0 t - \beta_0 z)$$

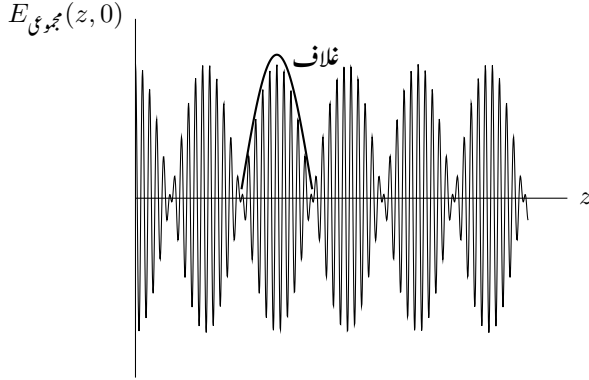
لکھی جا سکتی ہے جسے شکل 12.11 میں دکھایا گیا ہے۔ یہ محیطہ سوار²⁷ اشارہ ہے جس میں تعدد سوار²⁸ ω_0 ہے جبکہ تعدد سوار²⁹ $\Delta\omega$ ہے۔ تعدد سوار کی قیمت تعدد سوار کے قیمت سے بہت زیادہ ہے۔ شکل میں موج پر غلاف³⁰ بچھایا دکھایا گیا ہے۔ غلاف کی تعدد سوار اشارے کی تعدد ہے جبکہ غلاف سے نیچے تیزی سے ارتعاشی موج کی تعدد سوار کی تعدد ہے۔

amplitude modulated signal, AM signal²⁷

carrier frequency²⁸

modulating frequency²⁹

envelope³⁰



شکل 12.11: لمحہ $t = 0$ پر کل متناسطی میدان بالمتقابل فاصلہ۔

ہمیں سواری موج کی دوری رفتار v سواری اور سوار موج کی مجموعی رفتار v مجموعی درکار ہیں جنہیں مساوات 12.80 سے یوں لکھا جا سکتا ہے۔

$$(12.81) \quad v_{\text{سواری}} = \frac{\omega_0}{\beta_0}$$

$$(12.82) \quad v_{\text{مجموعی}} = \frac{\Delta\omega}{\Delta\beta}$$

شکل 12.11 میں ان رفتاروں کی نشاندہی کی گئی ہے جہاں سے واضح ہے کہ کسی بھی اوسط تعدد ω_0 پر ω - β خط کا مماس مجموعی رفتار دیتی ہے یعنی

$$(12.83) \quad v_{\text{مجموعی}} = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta\beta} = \left. \frac{d\omega}{d\beta} \right|_{\omega_0}$$

مجموعی رفتار کا دار و مدار اوسط تعدد ω_0 پر مادے کی خاصیت پر ہے۔ مجموعی رفتار سے مراد ω_0 کے قریب شعاعی پٹی کی مجموعی رفتار ہے جس میں ω_0 کے قریب نہایت کم اصطلاحاً تعددی پٹی³¹ کے تمام تعدد شامل ہیں۔ یوں دو عدد امواج کی مثال سے اخذ معلومات مسلسل تعددی پٹی کے امواج کے لئے بھی درست ہے۔

کسی مخصوص تعدد ω_0 پر موجود تعددی پٹی کے تمام امواج یہاں کے مجموعی رفتار سے حرکت کریں گے۔ یوں یہ مخصوص شعاعی پٹی مجموعی v سے توانائی منتقل کرے گی۔ چونکہ ω - β خط کے مماس کی ڈھلوان تعدد کے ساتھ

³¹frequency band

تبدیل ہوتی ہے لہذا مجموعی رفتار بھی تعدد کے ساتھ تبدیل ہو گا۔ یوں مختلف شعاعی پٹی کی رفتار مختلف ہو گی۔ یہی انتشار³² کی وجہ ہے۔ مجموعی رفتار کی انتشار³³ سے مراد تعدد کے ساتھ مجموعی رفتار کے تبدیلی کی شرح ہے۔ کسی بھی مادے میں اشارے کی ترسیل اور اس کی شکل میں تبدیلی کا دارومدار مجموعی رفتار کے انتشار پر ہے۔ ترسیل کے دوران عددی اشارے³⁴ کی شکل انتشار کی وجہ سے بگڑتی ہے۔ اس بگاڑ کو قابو رکھنا ضروری ہے ورنہ صحیح اشارے کی وصولی ناممکن ہو گی۔

آئیں دیکھتے ہیں کہ انتشار کا عددی اشارات پر کیا اثر ہوتا ہے۔ عددی اشارات کو کم دورانیے کے مستطیل امواج سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ یوں مستطیل موج کی موجودگی کو عددی ایک (1) اور مستطیل موج کی عدم موجودگی کو عددی صفر (0) تصور کیا جاتا ہے۔ ہم دیکھیں گے کہ انتشاری مادے میں حرکت کے دوران مستطیل موج کی چوڑائی وقت کی نسبت سے بڑھتی ہے۔ مستطیل اشارے کی چوڑائی بڑھنے کے عمل پر غور کرنے کی خاطر موج کا فوریز بدل استعمال کیا جائے گا۔ کسی بھی اشارے کا فوریز بدل، اشارے میں موجود تمام تعدد کا مجموعہ دیتا ہے۔ مستطیل اشارے کی بجائے ہم گاوسی³⁵ اشارہ

$$(12.84) \quad E(0, t) = E_0 e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{t}{T}\right)^2} e^{j\omega_0 t}$$

کو مثال بناتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔ یہ مساوات $z = 0$ پر ایسی برقی میدان دیتی ہے جس کی تعدد سواری ω_0 اور اشارے کی $\frac{1}{e}$ نصف چوڑائی³⁶ T ہے جہاں $\frac{1}{e}$ نصف چوڑائی $\Delta\omega$ کو اس نقطے تک ناپا جاتا ہے جس پر اشارے کی طاقت بلند تر قیمت کے e^{-1} گنا ہو۔

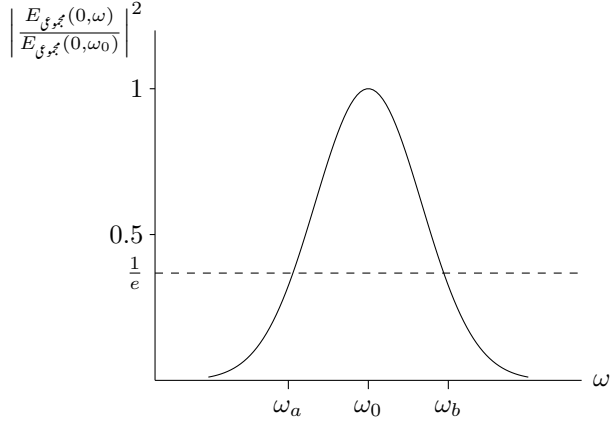
مساوات 12.84 کا فوریز بدل مندرجہ ذیل ہے جسے شکل 12.12 میں دکھایا گیا ہے۔

$$(12.85) \quad E(0, \omega) = \frac{E_0 T}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} T^2 (\omega - \omega_0)^2}$$

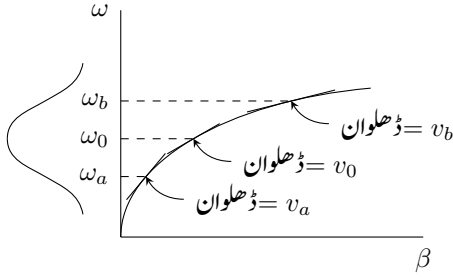
مساوات 12.85 میں موج کی طاقت بلند تر قیمت کے e^{-1} گنا

$$(12.86) \quad \Delta\omega = \omega - \omega_0 = \frac{1}{T}$$

dispersion³²
group velocity dispersion³³
digital signal³⁴
Gaussian signal³⁵
half-width³⁶



شکل 12.12: گاوسی اشارے کا فوریز بدل۔

شکل 12.13: گاوسی اشارے کا فوریز بدل تریلی ماڈے کے β - ω خط پر دکھایا گیا ہے۔

پر ہوگی یوں $\frac{1}{e}$ نصف طاقت چوڑائی یہی ہے۔ جیسے شکل 12.12 میں دکھایا گیا ہے، ω_a اور ω_b تعدد پر طاقت بلند ترقیت کے e^{-1} گنا ہے۔ یوں $\frac{1}{e}$ نصف چوڑائی

$$(12.87) \quad \Delta\omega = \omega_b - \omega_0 = \omega_0 - \omega_a$$

لکھی جاسکتی ہے۔ یاد رہے کہ موج کی طاقت برقی میدان کے مربع کے راست تناسب ہوتی ہے۔ شکل 12.13 میں تریلی خطے کے β - ω خط پر گاوسی اشارے کے فوریز بدل کو کھینچا گیا ہے۔ شکل 12.12 پر دکھائے ω_0 ، ω_a اور ω_b تعدد کے مجموعی رفتار v_a ، v_0 اور v_b کو شکل 12.13 سے حاصل کرنا دکھایا گیا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ گاوسی اشارے کے مختلف حصے مختلف رفتار سے حرکت کریں گے۔ یوں اس کی چوڑائی بڑھے گی۔ اشارے کی بیشتر توانائی ω_0 تعدد پر پائی جاتی ہے لہذا اس تعدد کی نسبت سے اشارے کی چوڑائی بڑھنے پر بات آگے بڑھاتے

ہیں۔ انہیں دیکھتے ہیں کہ ω_0 اور ω_b تعدد کے حصے z فاصلہ طے کرتے ہوئے ایک دونوں سے وقت کے لحاظ سے کتنے دور ہو جاتے ہیں۔ ان حصوں کے رفتار v_0 اور v_b لیتے ہوئے لحاظی فرق

$$(12.88) \quad \Delta\tau = z \left(\frac{1}{v_b} - \frac{1}{v_0} \right) = z \left(\frac{d\beta}{d\omega} \Big|_{\omega_b} - \frac{d\beta}{d\omega} \Big|_{\omega_0} \right)$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس مساوات سے صاف ظاہر ہے کہ انتشاری خطہ بطور وقتی منشور³⁷ کردار ادا کرتی ہے۔ عام منشور شعاع کے مختلف حصوں کو خلاء میں علیحدہ علیحدہ کرتی ہے جبکہ وقتی منشور شعاع کے حصوں کو وقت کے لحاظ سے علیحدہ علیحدہ کرتی ہے۔ یوں z فاصلہ طے کرنے کے بعد اشارے کی شکل مختلف تعددی حصوں کے $\Delta\tau$ پر منحصر ہو گا۔ یوں حاصل کردہ اشارے کی $\frac{1}{2}$ نصف چوڑائی کی جاسکتی ہے۔ یہاں اصل اشارے کی چوڑائی کو نظر انداز کیا جا رہا ہے۔ ہم اصل اشارے کی چوڑائی کو مد نظر رکھتے ہوئے جوابات حاصل کر سکتے ہیں۔

مساوات 12.88 کی قیمت اس صورت زیادہ آسانی سے حاصل کی جاسکتی ہے جب ہمیں β - ω خط کی مساوات معلوم ہو۔ کسی بھی مسلسل تقاعل کو ٹیلر³⁸ تسلسل کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے۔ یوں β - ω خط کی ٹیلر تسلسل ω_0 پر لکھتے ہیں

$$(12.89) \quad \beta(\omega) = \beta_0 + (\omega - \omega_0)\beta_1 + \frac{1}{2}(\omega - \omega_0)^2\beta_2 + \dots$$

جہاں

$$(12.90) \quad \beta_0 = \beta(\omega_0)$$

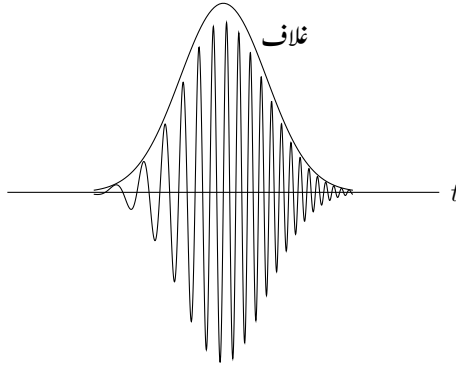
$$(12.91) \quad \beta_1 = \frac{d\beta}{d\omega} \Big|_{\omega_0}$$

$$(12.92) \quad \beta_2 = \frac{d^2\beta}{d\omega^2} \Big|_{\omega_0}$$

کے برابر ہیں۔ مساوات 12.89 کے پہلے دو جزو سیدھی لکیر کو ظاہر کرتے ہیں۔ تسلسل کا تیسرا جزو β - ω کو ٹیڑھا بناتا ہے اور یہی جزو انتشار کا سبب بنتا ہے۔ مساوات 12.89 میں β_0 ، β_1 اور β_2 مستقل قیمتیں ہیں لہذا اس کی تفرق مندرجہ ذیل ہو گی۔

$$(12.93) \quad \frac{d\beta}{d\omega} = \beta_1 + (\omega - \omega_0)\beta_2$$

temporal prism³⁷
Taylor series³⁸



شکل 12.14: چھبھاٹ میں گاوسی غلاف کے نیچے بڑھتی تعدد دکھائی گئی ہے۔

مساوات 12.93 کو مساوات 12.88 میں پر کرتے ہوئے

$$(12.94) \quad \Delta\tau = z[\beta_1 + (\omega_b - \omega_0)\beta_2] - z[\beta_1 + (\omega_0 - \omega_0)\beta_2] = \Delta\omega\beta_2z = \frac{\beta_2z}{T}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں آخری قدم پر مساوات 12.86 کا سہارا لیا گیا ہے۔ مساوات 12.92 انتشاری مستقل³⁹ β_2 کی تعریف بیان کرتی ہے۔ انتشاری مستقل کو مربع وقت فی اکائی فاصلہ میں ناپا جاتا ہے۔ اس کی عمومی اکائی مربع پیکو سیکنڈ فی کلو میٹر $\frac{\text{ps}^2}{\text{km}}$ ہے۔

اگر ابتدائی اشارے کی چوڑائی $\Delta\tau$ کی نسبت سے نہایت کم ہو تب ابتدائی چوڑائی کو نظر انداز کرتے ہوئے اختتامی چوڑائی کو $\Delta\tau$ لیا جاتا ہے۔ اگر ایسا نہ ہو تب اختتامی اشارے کی چوڑائی

$$(12.95) \quad T' = \sqrt{T^2 + (\Delta\tau)^2}$$

لی جاتی ہے۔

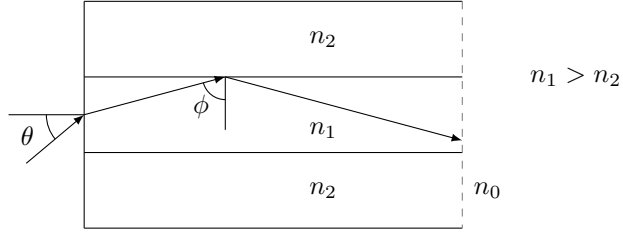
انتشار سے اشارے کی چوڑائی بڑھنے سے اشارے میں چھبھاٹ^{40 41} پیدا ہوتی ہے جسے شکل 12.14 میں دکھایا گیا ہے۔ چھبھاٹ میں تعدد وقت کے ساتھ یا تو بتدریج بڑھتی ہے اور یا بتدریج گھٹتی ہے۔ یہ اشارے کی چوڑائی بڑھنے کا ہی نتیجہ ہے۔ چونکہ اشارے میں پائے جانے والے تعددی اجزاء مختلف رفتار سے حرکت کرتے ہیں لہذا اختتام پر

dispersion parameter³⁹
chirp⁴⁰
41

ان اجزاء میں فاصلے یوں تبدیل ہوتے ہیں کہ یہ چچہاہٹ پیدا کرتے ہیں۔ اس اثر کو مساوات 12.93 کی مدد سے بہتر سمجھا جا سکتا ہے جس سے مجموعی تاخیر⁴² τ مجموعی τ بالمقابل تعدد یوں

$$(12.96) \quad \tau_{\text{مجموعی}} = \frac{z}{v_{\text{مجموعی}}} = z \frac{d\beta}{d\omega} = [\beta_1 + (\omega - \omega_0)\beta_2]z$$

حاصل ہوتی ہے۔ اس مساوات کے تحت مثبت β_2 کی صورت میں زیادہ تعددی اجزاء، اختتامی مقام تک زیادہ تاخیر سے پہنچتے ہیں اور ان کی تاخیر تعدد کے راست تناسب ہے۔ مثبت β_2 کی صورت جہاں کم تعددی اجزاء پہلے پہنچتے ہیں کو مثبت چچہاہٹ کہا جاتا ہے جبکہ ایسی صورت جب زیادہ تعددی اجزاء اختتامی مقام تک پہلے پہنچیں، منفی چچہاہٹ کہلاتی ہے۔



شکل 12.15: شیش ریشہ۔

سوالات

سوال 12.1: دائیں دائری قطبی موج نیم لامحدود پلکیسی گلاس ($\sigma = 0, \mu_R = 1, \epsilon_R = 3.45$) کی سطح پر بریوسٹر زاویے سے آمد ہے۔ آمدی کثافت طاقت $100 \frac{W}{m^2}$ ہے۔ الف) پلکیسی گلاس کا بریوسٹر زاویہ حاصل کریں۔ ب) Γ_{\perp} اور Γ_{\parallel} حاصل کریں۔ پ) انعکاسی اور ترسیلی کثافت طاقت دریافت کریں۔ ت) انعکاسی اور ترسیلی امواج کی قطبیت بیان کریں۔ (آمدی دائری قطبی موج میں آمدی طاقت عمودی برقی اور آدھی طاقت متوازی برقی ہوگی۔)

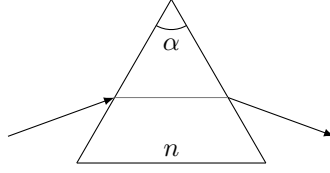
جوابات: 61.7° ، $\Gamma_{\parallel} = 0$ ، $\Gamma_{\perp} = -0.549$ ، $15 \frac{W}{m^2}$ ، $85 \frac{W}{m^2}$ ، انعکاسی موج خطی قطبی جبکہ ترسیلی موج بیضوی قطبی ہے۔

سوال 12.2: شکل 12.15 میں شیش ریشہ دکھایا گیا ہے۔ اس شیش ریشے میں بائیں جانب سے شعاع θ زاویے سے داخل ہوتی ہے۔ یہ شعاع غلاف سے مکمل اندرونی انعکاس کرتے ہوئے شیش ریشے کے دوسرے سر تک پہنچتی ہے۔ بیرونی خلاء کا انعطافی مستقل $n_0 = 1$ لیتے ہوئے θ کی وہ حد دریافت کریں جس کے اندر رہتے ہوئے شیش ریشے میں مکمل اندرونی انعکاس پائی جائے گی۔ $\sin \theta$ کو شیش ریشے کی عددی شکاف⁴³ کہتے ہیں۔

$$\text{جواب: } \sin^{-1} \sqrt{n_1^2 - n_2^2} = \text{بلند تر } \theta$$

سوال 12.3: شکل 12.15 میں θ بریوسٹر زاویہ اور ϕ زاویہ فاصل ہونے کی صورت میں n_0 کو n_1 اور n_2 کی صورت میں بیان کریں۔

numerical aperture⁴³



شکل 12.16: منشور

$$\text{جواب: } n_0 = \frac{n_1}{n_2} \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$$

سوال 12.4: ایسا منشور جو متوازی برقی موج کو بغیر گھٹائے گزرنے دے بریوسٹر منشور⁴⁴ کہلاتا ہے۔ شکل 12.16 میں دکھائے منشور کو $n = 1.45$ کے شیشے سے بنایا گیا ہے۔ اس شکل میں دکھائی گئی صورت حال کو دیکھتے ہوئے زاویہ α حاصل کریں۔ (داخلی اور خارجی شعاع شیشے کے عمود کے ساتھ بریوسٹر زاویہ بناتے ہیں۔ اس سے انعکاسی ضیاع کا خاتمہ حاصل کیا جاتا ہے۔)

جواب: یہاں منشور کے اندر شعاع، منشور کے قاعدے کے متوازی ہے۔ $\alpha = 69.2^\circ$

سوال 12.5: شکل 12.16 میں دکھائے گئے بریوسٹر منشور میں عمودی برقی موج کا کتنا فی صد گزر پائے گا۔

جواب: 76%

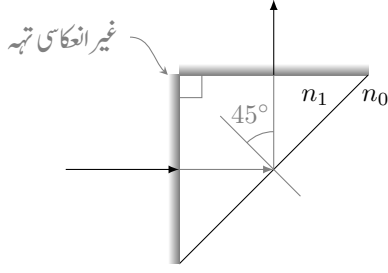
سوال 12.6: شکل 12.17 میں شعاع کی سمت 90° تبدیل کرنے کی خاطر منشور استعمال کیا گیا ہے۔ انعکاسی ضیاع سے چھٹکارے کی خاطر منشور کے بائیں اور بالائی سطحوں پر انعکاس مخالف تہہ چڑھائی گئی ہے۔ منشور کو خالی خلاء میں استعمال کرنے کی خاطر n_1 کی کم سے کم قیمت دریافت کریں۔

جواب: $n_1 > 1.41$

سوال 12.7: دائری قطبی برقی موج دو عدد خطی قطبی امواج کے مجموعے سے بنی ہوئی ہے۔ خطی قطبی امواج $E_x = 5 \cos(\omega t - \beta z)$ اور $E_y = 5 \cos(\omega t - \beta z - 90^\circ)$ ہیں۔ یہ دائری قطبی موج خطہ-1 $(\mu_{R1} = 1, \epsilon_{R1} = 1)$ سے خطہ-2 $(\mu_{R2} = 1, \epsilon_{R2} = 3.5)$ کے سرحد پر 45° زاویے سے پہنچتی ہے۔ زاویہ سرحد کے عمود کے ساتھ ناپا جاتا ہے۔ انعکاسی موج کی شرح رداس حاصل کریں۔

جواب: 2.38

⁴⁴Brewster prism



شکل 12.17: منشور سے شعاع کی سمت تبدیل کی جاسکتی ہے

سوال 12.8: دائری قطبی برقی موج خطہ-1 ($\mu_{R1} = 1, \epsilon_{R1} = 1$) سے خطہ-2 ($\mu_{R2} = 1, \epsilon_{R2} = 4$) کے سرحد پر θ زاویے سے پہنچتی ہے۔ زاویہ سرحد کے عمود کے ساتھ ناپا جاتا ہے۔ انعکاسی موج کی شرح رداس مندرجہ ذیل صورتوں میں حاصل کریں۔ الف) $\theta = 30^\circ$ ، ب) $\theta = 60^\circ$ ، پ) $\theta = 63.43^\circ$

جواب: 1.35، 10.9، 7409

سوال 12.9: دائیں بیضوی قطبی برقی موج از خود عمودی قطبی موج $E_x = 8 \cos(\omega t - \beta z)$ اور متوازی قطبی موج $E_y = 6 \cos(\omega t - \beta z - 90^\circ)$ کا مجموعہ ہے۔ یہ دائیں بیضوی قطبی موج خطہ-1 ($\mu_{R1} = 1, \epsilon_{R1} = 1$) سے خطہ-2 ($\mu_{R2} = 1, \epsilon_{R2} = 3$) کے سرحد $z = 0$ پر 30° زاویے سے پہنچتی ہے۔ زاویہ سرحد کے عمود کے ساتھ ناپا گیا ہے۔ انعکاسی موج کی شرح رداس حاصل کریں۔

جواب: 2.68

سوال 12.10: دائیں بیضوی قطبی برقی موج از خود عمودی قطبی موج E_x متوازی قطبی موج E_y

$$E_x = 8 \cos(\omega t - \beta z)$$

$$E_y = 6 \cos(\omega t - \beta z - 90^\circ)$$

کا مجموعہ ہے۔ یہ دائیں بیضوی قطبی موج خطہ-1 ($\mu_{R1} = 1, \epsilon_{R1} = 1$) سے خطہ-2 ($\mu_{R2} = 1, \epsilon_{R2} = 2$) کے سرحد $z = 0$ پر 60° زاویے سے پہنچتی ہے۔ زاویہ سرحد کے عمود کے ساتھ ناپا گیا ہے۔ انعکاسی موج کی شرح رداس حاصل کریں۔ اس کی قطبیت بھی دریافت کریں۔

جواب: شرح رداس لامحدود ہے۔ موج عمودی قطبی ہے۔

باب 13

موتج اور گھمکیا

اب تک ہم صرف عرضی برقی و مقناطیسی¹ TEM امواج کی بات کرتے آ رہے ہیں جن میں برقی میدان اور مقناطیسی میدان سمت حرکت کے عمودی ہوتے ہیں۔ اس باب میں ترسیلی تار پر بحث کو آگے بڑھاتے ہوئے ایسے امواج پر غور کیا جائے گا جن میں برقی یا مقناطیسی میدان سمت حرکت کی جانب بھی جزو رکھتے ہوں۔ وہ ترسیلی تار جو صرف اس طرح کے امواج کو گزار سکیں موج² کہلاتے ہیں۔

تقریباً 1 GHz تعدد کے لگ بھگ ترسیلی تار میں طاقت کا ضیاع، جلد کی موٹائی کی وجہ سے قابل نظر انداز نہیں رہتی لہذا ان تعدد پر طاقت کی ترسیل کھوکھلے موتج کی مدد سے کی جاتی ہے جن میں طاقت کا ضیاع نسبتاً کم ہوتا ہے۔

دو لامحدود جسامت کے مستوی سطحوں کے موتج سے بات شروع کرتے ہوئے کھوکھلے مستطیلی اور ٹکلی موتج تک بات بڑھائی جائے گی۔ ان موتج میں میدان کے اشکال، ان کے منقطع طول موج اور تضعیفی مستقل حاصل کئے جائیں گے۔ اس کے بعد ایک تار پر بیرونی موج اور دیگر اقسام کے موتج پر غور کیا جائے گا۔ آخر میں موصل کے بند ڈبوں میں مقید امواج پر غور کیا جائے گا۔ ان ڈبوں کو گھمکیا کہتے ہیں۔

transverse electromagnetic, TEM¹
waveguide²

13.1 برقی دور، ترسیلی تار اور موتج کا موازنہ

کم تعدد پر برقی دباؤ، برقی رو، مزاحمت وغیرہ وہ متغیرات ہیں جنہیں استعمال کرتے ہوئے برقی ادوار حل کئے جاتے ہیں۔ ان تعدد پر تمام مزاحمت یا رکاؤٹ کو نقطہ نما تصور کیا جاتا ہے۔ یوں تار کے ایک سرے پر منبع برقی دباؤ لاگو کرتے ہوئے تار کے دوسرے سرے پر مزاحمت میں برقی رو حاصل کی جاسکتی ہے۔

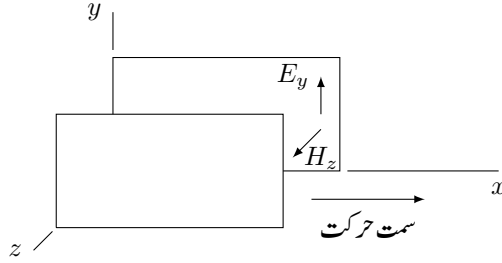
قدر زیادہ تعدد پر انہیں حقائق کو ترسیلی تار پر لاگو کیا جاسکتا ہے۔ ایسا کرتے وقت ترسیلی تار کی مزاحمت یا امالہ تار کی لمبائی پر تقسیم شدہ تصور کرنا لازم ہے۔ ساتھ ہی ساتھ ترسیلی تار پر برقی دباؤ کی رفتار پر بھی نظر رکھنی ہوتی ہے۔

اب موصل کھوکھلے نلکی یا مستطیلی نالی پر مبنی نظام کی بات کرتے ہیں۔ کیا ایسی نالی برقی و مقناطیسی طاقت منتقل کرنے کی صلاحیت رکھتی ہے؟ اگر ہماری معلومات برقی ادوار یا ترسیلی تار تک محدود ہوتی تب اس سوال کا جواب یہ ہے کہ ایسا ممکن نہیں ہے کیونکہ برقی طاقت کے منتقلی کے لئے دو عدد تار ضروری ہیں۔ البتہ اگر ہم شعاعوں کا علم رکھتے تب جواب ہوتا کہ ایسا ممکن ہے چونکہ شعاعیں سیدھی کھوکھلے نلکی سے گزر سکتی ہیں اور شعاعیں بلند تعدد (10^{16} Hz) کی برقی و مقناطیسی امواج ہی ہیں۔

اصل جواب ہے کہ ایسا موج کے تعدد پر منحصر ہے۔ کم تعدد کے امواج نالی سے نہیں گزر سکتے جبکہ بلند تعدد کے امواج اس سے گزر سکتے ہیں۔ تعدد کے ان دو خطوں کے درمیان ایسی تعدد ہوگی جس سے کم تعدد نالی سے نہیں گزرے گی اور جس سے زیادہ تعدد نالی سے گزرے گی۔ اس تعدد کو پست انقطاعی تعدد³ کہا جاتا ہے۔

کھوکھلے نالی سے برقی و مقناطیسی طاقت کی منتقلی برقی ادوار حل کرنے کے علم سے ناقابل سمجھ مسئلہ ہے۔ کھوکھلے نالی میں طاقت کی منتقلی، نالی کے کھوکھلے حصے میں برقی اور مقناطیسی میدان پر غور سے سمجھا جاسکتا ہے جنہیں استعمال کرتے ہوئے پوینٹنگ سمتیہ سے موج کی طاقت حاصل ہوتی ہے۔ دراصل برقی و مقناطیسی طاقت نالی کے کھوکھلے حصے میں برقی اور مقناطیسی امواج سے منتقل ہوتا ہے ناکہ نالی کے موصل حصے میں۔ برقی دباؤ اور برقی رو اس منتقلی کے محض اضافی اثرات ہیں۔

low cutoff frequency³



شکل 13.1: دو لا محدود وسعت کے متوازی موصل چادروں کا نظام۔

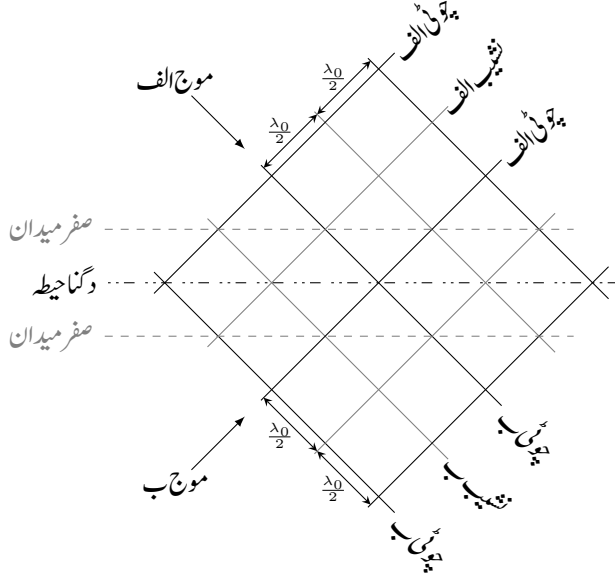
13.2 دو لا محدود وسعت کے مستوی چادروں کے موج میں عرضی برقی موج

شکل 13.1 میں دو لا محدود وسعت کے متوازی چادروں پر مبنی ترسیلی تار دکھائی گئی ہے جو y سمتی عرضی برقی و مقناطیسی موج گزار سکتی ہے۔ اس تار کی خاص خاصیت یہ ہے کہ ایک مخصوص تعدد کے اوپر یہ دیگر بلند درجی انداز⁴ کے امواج بھی گزار سکتی ہے۔ یوں ترسیلی تار سے شروع کرتے ہوئے موج تک بحث کو پہنچانے کے لئے یہ بہترین مثال ہے۔

ایسی بلند درجی انداز کی بات کرتے ہیں جس میں برقی میدان ہر نقطے پر y سمتی ہے جبکہ سمت حرکت a_x ہے۔ چونکہ برقی میدان سمت حرکت کے عمودی ہے لہذا اس انداز کو عرضی برقی انداز⁵ (TE) کہا جائے گا اور ایسی موج کو عرضی برقی موج کہا جائے گا۔ اگرچہ اس موج میں برقی میدان عرضی ہے، مقناطیسی میدان عرضی اور طویل اجزاء پر مشتمل ہے۔ کامل موصل چادروں کی صورت میں چادروں پر برقی میدان صفر ہو گا البتہ چادر سے دور اس کی کچھ بھی قیمت ممکن ہے۔ ایسی عرضی برقی انداز موج کے خصوصیات باآسانی یوں حاصل کئے جاسکتے ہیں کہ اسے دو عرضی برقی و مقناطیسی انداز TEM امواج کا مجموعہ تصور کیا جائے جو موصل چادروں کے درمیان بار بار انعکاس کرتی ہوں۔

آئیں پہلے شکل 13.2 پر غور کریں جہاں خالی خلاء میں ایک ہی تعدد کے دو سطحی TEM امواج کے ملاپ کی صورت حال دکھائی گئی ہے۔ اس شکل میں امواج خطی قطبی تصور کئے گئے ہیں جن کا برقی میدان صفحہ کے عمودی فرض کیا گیا ہے۔ موج الف کی شعاع اوپر بائیں ہاتھ سے نیچے دائیں ہاتھ کی طرف جبکہ موج ب کی شعاع نیچے بائیں ہاتھ سے اوپر دائیں ہاتھ کی جانب گامزن ہے۔ یوں ان کا آپس میں ملاپ کسی زاویے پر ہوتا ہے۔ شکل میں گہری سیاہی کی

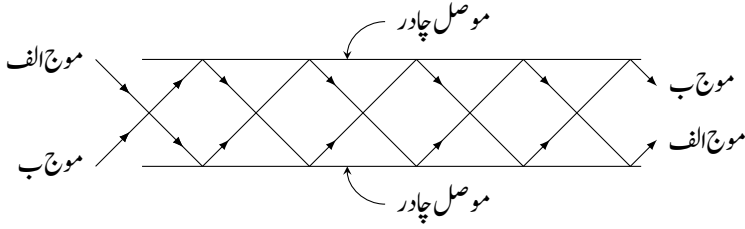
⁴ higher order mode
⁵ transverse electric mode, TE mode



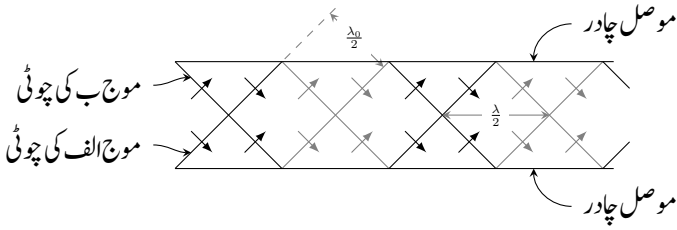
شکل 13.2: دو عرضی برقی و مقناطیسی امواج خلاء میں مختلف سمتوں میں حرکت کر رہی ہیں۔

ٹھوس لکیر سے موج کی چوٹی جبکہ ہلکی سیاہی کے ٹھوس لکیر سے اس کا نشیب دکھایا گیا ہے۔ یوں سطحی موج الف کی چوٹیاں اور نشیب، شعاع الف کے عمودی دکھائے گئے ہیں۔ گہری سیاہی کے ٹھوس لکیر کو برقی میدان کی چوٹی تصور کیا جائے۔ یوں اس لکیر پر برقی میدان زیادہ سے زیادہ قیمت رکھتا ہے اور اس کی سمت صفحہ سے عمودی باہر جانب کو ہے۔ اسی طرح ہلکی ٹھوس لکیر میدان کی نشیب کو ظاہر کرتی ہے لہذا یہاں میدان کی قیمت زیادہ سے زیادہ ہوگی البتہ اس کی سمت صفحہ کے عمودی اندر جانب کو ہوگی۔ چوٹی اور نشیب کے درمیان فاصلہ $\frac{\lambda_0}{2}$ کے برابر ہے۔

جس نقطے پر ایک موج کی چوٹی اور دوسری موج کا نشیب ملتے ہیں اس نقطے پر کل میدان صفر کے برابر ہوگا۔ یوں جہاں گہری سیاہی اور ہلکی سیاہی کے لکیر ملتے ہیں وہاں میدان صفر ہوگا۔ شکل میں ہلکی سیاہی میں ایسی دو نقطے دار لکیریں کھینچی گئی ہیں جن پر میدان صفر کے برابر ہے۔ آپ غور کر کے تسلی کر لیں کہ ان لکیروں کے ہر نقطے پر برقی میدان صفر ہی ہے۔ مزید آپ ذہن میں دونوں امواج کو حرکت دیتے ہوئے تسلی کر لیں کہ امواج کے حرکت کے باوجود ان دو لکیروں پر میدان صفر ہی رہتا ہے۔ اسی طرح جن نقطوں پر دونوں امواج کی چوٹیاں آپس میں ملتی ہوں یا دونوں کے نشیب آپس میں ملتے ہوں وہاں میدان دگنا ہوگا۔ شکل میں ہلکی سیاہی اور دو نقطوں والی ایسی ایک عدد لکیر دکھائی گئی ہے جہاں میدان دگنا پایا جائے گا۔



شکل 13.3: شعاعیں دو چادروں کے درمیان بار بار انعکاس کرتی حرکت کرتی ہیں۔

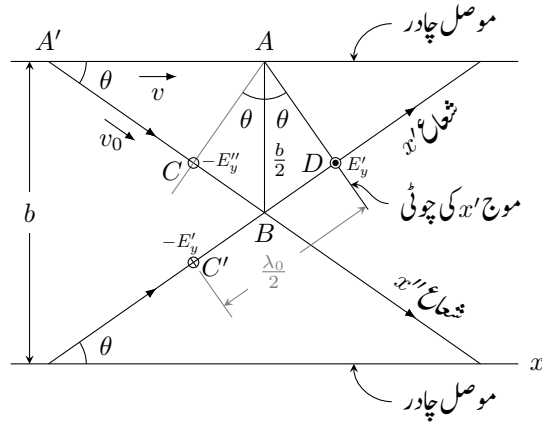


شکل 13.4: موجوں کی چوٹیاں، نشیب، خالی خلاء اور موج میں طول موج۔

صفر میدان دکھاتے نقطہ دار لکیر پر برقی میدان صفر کے برابر ہے لہذا ان پر موصل سطح کے سرحدی برقی میدان کا شرط پورا اترتا ہے۔ یوں ان لکیروں پر، صفحہ کے عمودی موصل چادر رکھے جاسکتے ہیں۔ البتہ ایسا کرنے سے موج کی سیدھی حرکت متاثر ہوگی چونکہ آمدی زاویے کے برابر، موصل سطح پر، انعکاسی زاویے سے موج انعکاس کرے گی۔ یوں موج موصل سطح سے گزر نہیں پائے گی۔ ہاں اگر دو موصل چادروں کے درمیان ان امواج کو بھیجا جائے، تب یہ دونوں موصل سطحوں کے درمیان بار بار انعکاس کرتی حرکت کریں گی۔ شکل 13.3 میں ایسا دکھایا گیا ہے۔ شکل 13.4 میں موج میں موج کی چوٹی اور نشیب دکھائے گئے ہیں۔ خالی خلاء میں طول موج اور موج میں طول موج کا تعلق بھی دکھایا گیا ہے۔ اس شکل میں موصل چادروں کے درمیان میدان ہو، ہو شکل 13.2 میں دو متوازی نقطہ دار لکیروں کے درمیان میدان ہے۔ یہاں بھی گہری سیاہی میں ٹھوس لکیر E کی چوٹی اور ہلکی سیاہی میں لکیر اس کا نشیب ہے۔ موصل چادر پر یہ دونوں مل کر صفر برقی میدان پیدا کرتے ہیں۔

اگرچہ ہم دو عدد عرضی برقی و مقناطیسی TEM امواج کی بات کرتے آ رہے ہیں، درحقیقت ان کا مجموعہ بلند درجی TE انداز کی موج ہے۔ بلند درجی انداز کے موج کی اہم خصوصیت یہ ہے کہ اس کا طول موج ایک مخصوص حد سے کم ہونا لازم ہے۔ ایسا نہ ہونے کی صورت میں یہ موج سے نہیں گزر سکتی۔ طول کی یہ حد انقطاعی طول⁶ پکاری

cutoff wavelength⁶



شکل 13.5: متوازی لامحدود وسعت کے چادروں کے موج میں میدان کے اجزاء۔

جاتی ہے۔ آئیں انقطاعی طول حاصل کریں۔

شکل 13.5 میں TE موج کے دو TEM اجزاء دکھائے گئے ہیں جو x' اور x'' سمت میں گامزن ہیں۔ دونوں جزو موصل چادر یعنی x محدد کے ساتھ θ زاویہ بناتے ہیں۔ برقی میدان صفحہ کے عمودی یا محدد کی سمت میں ہے۔ چادروں کے درمیان فاصلہ b ہے۔ نقطہ D پر موج x' کی چوٹی ہے لہذا یہاں برقی میدان E_y' مثبت قیمت رکھتا ہے جو صفحہ کے عمودی باہر کو ہے اور جسے گول دائرے میں بند نقطے سے ظاہر کیا گیا ہے۔ اس نقطے پر لکیر AD لہر کی چوٹی ظاہر کرتی ہے۔ عین اسی لمحہ نقطہ C پر موج x'' کا نشیب ہے جسے گول دائرے میں بند صلیبی نشان سے ظاہر کیا گیا ہے۔ اس لہر کے نشیب کو ہلکی سیاہی میں لکیر AC سے ظاہر کیا گیا ہے۔ ایک لہر کی چوٹی اور دوسرے لہر کا نشیب نقطہ A پر مل کر صفر میدان پیدا کرتے ہیں۔ ہم جانتے ہیں کہ عین دو چادروں کے درمیان دونوں امواج کی چوٹیاں مل کر دگنا میدان پیدا کرتی ہیں۔ اس نقطے کو شکل میں B سے ظاہر کیا گیا ہے۔ یوں موج x'' کا نشیب C پر جبکہ اس کی چوٹی B پر ہے۔ اس طرح ان نقطوں کے درمیان فاصلہ طول موج کا چوتھا حصہ ہو گا۔ اسی طرح BD اور $C'B$ بھی طول موج کے چوتھائی برابر ہیں

$$(13.1) \quad BC = BC' = BD = \frac{\lambda_0}{4}$$

جہاں لامحدود خلاء میں TEM موج کا طول موج λ_0 ہے اور یہ خلاء اسی مادے سے بھری ہے جو دو چادروں کے درمیان پایا جاتا ہے۔ موصل چادر پر ایک موج کی کوئی بھی چوٹی اور دوسری موج کا کوئی بھی نشیب مل کر صفر میدان

پیدا کر سکتے ہیں۔ یوں مندرجہ بالا مساوات کی عمومی شکل

$$(13.2) \quad BC = \frac{n\lambda_0}{4}$$

ہے جہاں $n = 1, 2, 3, \dots$ ہو سکتے ہیں۔ ہفت n کی صورت میں دو چادروں کے عین درمیان برقی میدان صفر حاصل ہو گا جبکہ طاق n کی صورت میں یہاں میدان دگنا ہو گا۔ ان حقائق ہر تفصیلاً جلد بات کی جائے گی۔ شکل 13.5 میں ٹکون ABC سے

$$AB \sin \theta = \frac{b}{2} \sin \theta = \frac{n\lambda_0}{4}$$

یعنی

$$(13.3) \quad \lambda_0 = \frac{2b}{n} \sin \theta$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں لمبائی BC کے لئے مساوات 13.2 استعمال کیا گیا۔ اس مساوات کے تحت زیادہ سے زیادہ طول موج λ_{0c} کی قیمت $\sin \theta = 1$ یعنی $\theta = 90^\circ$ پر

$$(13.4) \quad \lambda_{0c} = \frac{2b}{n}$$

حاصل ہوتی ہے جس سے n کی ہر قیمت کے مقابل طول کی انتظامی قیمت حاصل کی جا سکتی ہے۔ جب $n = 1$ ہو تب

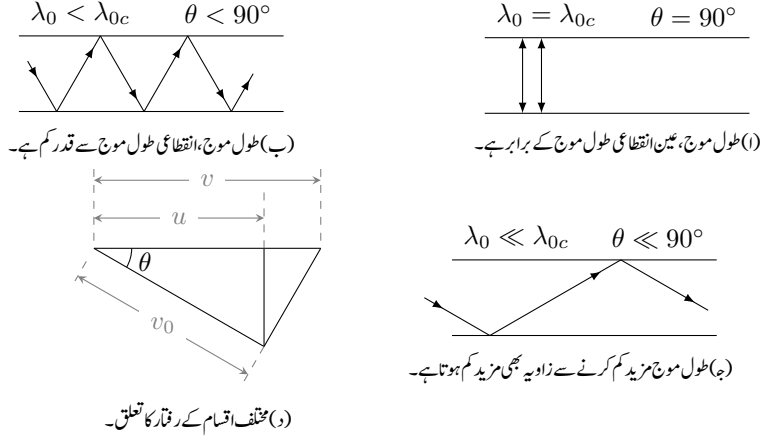
$$(13.5) \quad \lambda_{0c} = 2b$$

حاصل ہوتا ہے۔ یہ کم تر درجے کی TE موج کا انتظامی طول ہے جو ان چادروں کے درمیان صفر کر سکتی ہے۔ یہ مساوات کہتا ہے کہ چادروں کے درمیان فاصلہ کم از کم آدھے طول کے برابر ہو گا تو موج چادروں کے درمیان سے گزر پائے گی۔

$n = 1$ کو بلند درجی TE امواج کا کم تر درجہ کہا جاتا ہے۔ $n = 2$ اس سے ایک قدم بلند درجے کی موج کہلائے گی اور اس کا انتظامی طول

$$(13.6) \quad \lambda_{0c} = b$$

ہو گا۔ یوں $n = 2$ درجے کی TE موج کے گزرنے کا لئے چادروں کے درمیان کم از کم فاصلہ موج کے طول کے برابر ضروری ہے۔ اسی طرح $n = 3$ کے لئے $\lambda_{0c} = \frac{2b}{3}$ حاصل ہوتا ہے، وغیرہ وغیرہ۔



شکل 13.6: طول موج اور انعکاس موج کے زاویے۔ مختلف اقسام کے رفتاروں کا آپس میں تعلق۔

مساوات 13.4 اور مساوات 13.3 کو ملا کر

$$(13.7) \quad \lambda_0 = \lambda_{0c} \sin \theta$$

یا

$$(13.8) \quad \theta = \sin^{-1} \frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ یوں کسی بھی درجے کی موج کا انقطاعی زاویہ $\theta = 90^\circ$ حاصل ہوتا ہے۔ اس زاویے پر موج دونوں چادروں کے مابین، x تبدیل کئے بغیر، انعکاس کرتی رہتی ہے۔ یوں چادروں کے درمیان ساکن موج پیدا ہوتی ہے جو x سمت میں طاقت منتقل نہیں کر سکتی۔ اگر طول موج λ_0 انقطاعی طول موج λ_{0c} سے قدر کم ہو تب θ کی قیمت 90° سے کم ہو گی اور موج، بار بار انعکاس کرتی ہوئی، چادروں کے درمیان x سمت میں حرکت کر پائے گی۔ جیسے شکل 13.6 میں دکھایا گیا ہے، طول موج مزید کم کرنے سے زاویہ مزید کم ہوتا ہے۔ آخر کار انتہائی کم طول موج پر صورت حال لامحدود خلاء میں موج کے حرکت مانند ہو جاتی ہے اور یہ شعاع کی طرح چادروں کے درمیان سیدھا گزرنے کے قابل ہو جاتی ہے۔

شکل 13.5 میں TEM امواج کی دوری رفتار v_0 لامحدود خلاء میں آزاد موج کی دوری رفتار

$$(13.9) \quad v_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \quad \left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)$$

phase velocity⁷

ہی ہے جہاں خلاء کا مقناطیسی مستقل μ اور اس کا برقی مستقل ϵ ہیں۔ شکل 13.6-د میں TE موج کی x سمت میں دوری رفتار v ہے۔ TE موج کی چوٹی یا نشیب یا کوئی اور زاویائی نقطہ اس رفتار سے x سمت میں حرکت کرتا نظر آئے گا۔ ان دو اقسام کے رفتار کا تعلق شکل 13.6-د سے

$$(13.10) \quad \frac{v_0}{v} = \cos \theta$$

لکھا جا سکتا ہے جس سے

$$(13.11) \quad v = \frac{v_0}{\cos \theta} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon} \cos \theta} \quad \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس مساوات کے تحت جیسے جیسے طول موج کو انقطاعی طول موج کے قریب لایا جائے، ویسے ویسے TE موج کی دوری رفتار کی قیمت بڑھتی ہے حتیٰ کہ عین λ_{0c} پر دوری رفتار لامحدود قیمت اختیار کر لیتی ہے۔ اس کے برعکس جیسے جیسے طول موج کو کم کیا جائے، یعنی جیسے جیسے θ کو کم کیا جائے، ویسے ویسے TE موج کی دوری رفتار TEM کے دوری رفتار کے قریب ہوگی حتیٰ کہ انتہائی کم طول موج یعنی انتہائی بلند تعدد کے موج کی صورت میں یہ قیمت v_0 کے برابر ہو جائے گی۔ یوں موج میں بند، بلند درجی موج کا دوری رفتار TEM موج کے دوری رفتار سے زیادہ یا اس کے برابر ممکن ہے۔ طاقت کی منتقلی انکاس کرتی موج کے مجموعی رفتار⁸ سے ہوتی ہے جسے شکل میں u سے ظاہر کیا گیا ہے۔ شکل 13.6-د سے

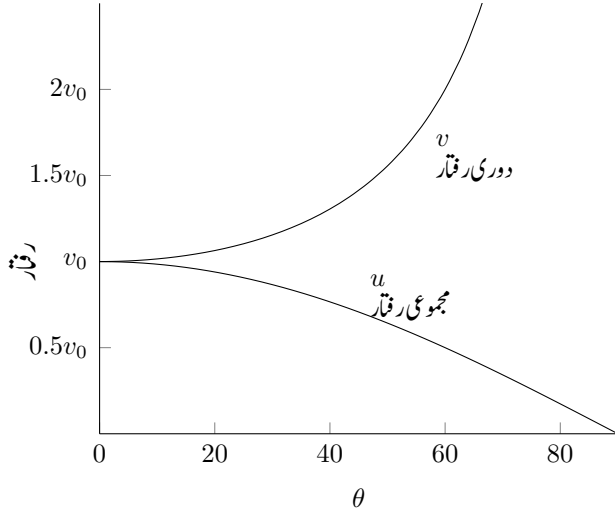
$$(13.12) \quad u = v_0 \cos \theta$$

لکھا جا سکتا ہے لہذا طاقت کی منتقلی کی رفتار TEM کے رفتار سے کم یا اس کے برابر ممکن ہے۔ طاقت کسی صورت بھی TEM موج کی رفتار سے زیادہ رفتار پر منتقل کرنا ممکن نہیں ہے۔ یہ حقیقت آئن سٹائن کے قانون کے عین مطابق ہے جس کے تحت کوئی بھی چیز رفتار شعاع سے تجاوز نہیں کر سکتی۔ یاد رہے کہ TE موج کی دوری رفتار درحقیقت کسی چیز کی منتقلی نہیں کرتی لہذا اس کی قیمت v_0 سے بڑھ سکتی ہے۔ مساوات 13.11 اور مساوات 13.12 کو ملا کر

$$(13.13) \quad uv = v_0^2$$

حاصل ہوتا ہے۔

دو چادروں میں بند ہونے سے TEM موج کا تعدد تبدیل نہیں ہوتا۔ اسی طرح ایسے دو یکساں تعدد کے امواج سے حاصل TE موج کا تعدد بھی وہی رہتا ہے۔ چونکہ طول موج ضرب تعدد کا حاصل رفتار کے برابر ہوتا ہے لہذا مساوات



شکل 13.7: دوری اور مجموعی رفتار بالمقابل زاویہ موج۔

13.11 کو

$$f\lambda = \frac{f\lambda_0}{\cos \theta}$$

لکھا جا سکتا ہے جس سے

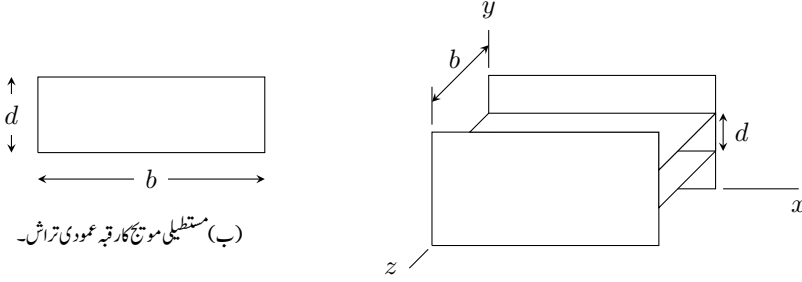
$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\cos \theta}$$

حاصل ہوتا ہے جو بلند درجہ موج کے طول λ اور آزاد موج کے طول λ_0 کا تعلق ہے۔

شکل 13.7 میں دوری رفتار بالمقابل زاویہ موج اور مجموعی رفتار بالمقابل زاویہ موج دکھائے گئے ہیں۔ جیسے جیسے θ کی قیمت 90° کے قریب آتی ہے ویسے ویسے دوری رفتار کی قیمت لامحدود جبکہ مجموعی رفتار کی قیمت صفر کے قریب تر ہوتی ہے۔

حقیقت میں دو متوازی لامحدود وسعت⁹ کے چادروں پر مبنی موج کہیں نہیں پایا جاتا۔ حقیقی موج عموماً کھوکھلے مستطیل یا کھوکھلے نالی کے اشکال رکھتے ہیں۔ چونکہ برقی میدان کے عمودی موصل چادر رکھنے سے میدان متاثر نہیں ہوتا لہذا دو

⁹حقیقی دنیا میں لامحدود وسعت کے چادر نہیں پائے جاتے۔



(i) لامحدود متوازی چادر موج سے مستطیلی موج کا حصول۔

شکل 13.8: مستطیلی موج کا حصول اور اس کا قہ عمودی تراش۔

لامحدود وسعت کے متوازی چادر، جن کے درمیان فاصلہ b ہو، میں TE موج کے عمودی دو چادر رکھنے سے میدان میں کوئی تبدیلی رونما نہیں ہوگی، لیکن ایسا کرنے سے مستطیلی موج حاصل ہوتا ہے۔ شکل 13.8-الف میں مستطیلی موج بنتا دکھایا گیا ہے جہاں d فاصلے پر دو متوازی چادر رکھے گئے ہیں۔ مستطیل شکل کے علاوہ بقایا چادر ہٹانے سے مستطیل موج حاصل ہوتا ہے جسے شکل 13.8-ب میں دکھایا گیا ہے۔ اس طرح ہم دیکھتے ہیں کہ اگرچہ دو لامحدود چادروں کا موج تو استعمال نہیں ہوتا لیکن اس کے TE امواج جوں کے توں مستطیلی موج کے لئے استعمال کئے جا سکتے ہیں۔ موجودہ TE امواج کے نقطہ نظر سے مستطیل کی d لمبائی کچھ بھی ممکن ہے۔

لامحدود چادر کے موج پر غور کرنے سے انقطاعی طول موج کے علاوہ دوری رفتار اور مجموعی رفتار کے مساوات بھی حاصل کئے گئے۔ دیگر بلند درجے کے امواج پر معلومات حاصل کرنے کی خاطر میکس ویل کے مساوات حل کرنا لازم ہے۔ آئیں مستطیلی موج کے لئے میکس ویل مساوات حل کرتے ہیں۔

13.3 کھوکھلا مستطیل موج

مستطیلی موج کے اطراف پر برقی اور مقناطیسی سرحدی شرائط، کارتیسی محدود میں نہایت آسانی سے لاگو کئے جا سکتے ہیں۔ اسی لئے مستطیلی موج کو کارتیسی نظام میں حل کیا جائے گا۔ ہم کارتیسی نظام میں میکس ویل کے مساوات سے موج کی مساوات حاصل کرتے ہیں۔ موج کو x محدود پر رکھتے ہوئے ہم سمت موج کو اسی سمت حرکت کے پابند بناتے ہیں اور ساتھ ہی ساتھ اسے سائن نما تصور کرتے ہیں۔ اس کے بعد بلند درجے موج کی قسم کا انتخاب کرتے ہیں۔ یوں

ہم برقی میدان E کو سمت موج کے عمودی رہنے کے پابند رکھتے ہوئے عرضی برقی TE^{10} موج پر غور کر سکتے ہیں یا مقناطیسی میدان کو سمت موج کے عمودی رہنے کے پابند رکھتے ہوئے عرضی مقناطیسی TM^{11} موج پر غور کر سکتے ہیں۔ TEM موج میں برقی اور مقناطیسی میدان سمت حرکت کے عمودی ہوتے ہیں۔ بلند درجی موج میں میدان، سمت حرکت کی سمت میں بھی پائے جاتے ہیں۔ اب عرضی برقی TE موج کی صورت میں $E_x = 0$ ہو گا لہذا ایسی صورت میں H_x صفر کے برابر نہیں ہو سکتا۔ اگر H_x بھی صفر کے برابر ہو تب موج TEM قسم کی ہو گی تاکہ TE قسم کی۔ TE کی صورت میں تمام مساوات کو H_x کی صورت میں لکھنا بہتر ثابت ہوتا ہے۔ حاصل موج پر سرحدی شرائط لاگو کرتے ہوئے اسے H_x کے لئے حل کیا جاتا ہے۔ حاصل H_x کو بقایا مساوات میں پر کرتے ہوئے E_y, E_z, H_y اور H_z حاصل کئے جاتے ہیں۔ یوں برقی اور مقناطیسی میدان کے تمام کارتیسی اجزاء کی مکمل معلومات حاصل ہوتی ہے۔ یہ عمومی طریقہ کار ہے جسے دیگر مسائل حل کرنے کے لئے بھی استعمال کیا جاسکتا ہے۔

اس طریقے کو مستطیلی موج میں TE موج کے لئے تفصیلاً استعمال کرتے ہیں۔ ایسا کرنے کی خاطر مندرجہ ذیل قدم سلسلہ وار اٹھائے جائیں گے۔

- میکس ویل مساوات سے شروع کریں۔
- موج کو وقت کے ساتھ سائن نما رہنے کا پابند بنائیں۔
- موج کو x سمت کے ساتھ سائن نما رہنے کا پابند بناتے ہوئے حرکی مستقل بروئے کار لائیں۔
- بلند درجی موج کا انتخاب کریں۔ ہم عرضی برقی TE موج کا انتخاب کرتے ہوئے $E_x = 0$ اور $H_x \neq 0$ رکھیں گے۔
- بقایا چار اجزاء یعنی E_y, E_z, H_y اور H_z کے مساوات H_x کی صورت میں لکھیں۔
- موج کی مساوات H_x کی صورت میں حاصل کریں۔
- مستطیلی موج کے اطراف کے سرحدی شرائط لاگو کرتے ہوئے موج کی اس مساوات کو H_x کے لئے حل کریں۔

• E_x, E_y, E_z اور H_x کے مساوات میں حاصل H_x پر کرتے ہوئے ان کی مساوات بھی حاصل کریں۔

ان قدموں پر چلتے ہوئے مکمل حل حاصل ہو گا۔

آئیں پہلے قدم سے شروع کرتے ہوئے میکس ویل کے مساوات کو کارتیسی نظام میں لکھتے ہیں۔ صفحہ 417 پر مساوات 9.28 اور مساوات 9.29

$$(13.14) \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$(13.15) \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

کارتیسی محرد میں

$$(13.16) \quad \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} + \mu \frac{\partial H_x}{\partial t} = 0$$

$$(13.17) \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} + \mu \frac{\partial H_y}{\partial t} = 0$$

$$(13.18) \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} + \mu \frac{\partial H_z}{\partial t} = 0$$

اور

$$(13.19) \quad \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - \sigma E_x - \epsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} = 0$$

$$(13.20) \quad \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} - \sigma E_y - \epsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} = 0$$

$$(13.21) \quad \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} - \sigma E_z - \epsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} = 0$$

لکھے جائیں گے جہاں $B = \mu H$ اور $D = \epsilon E$ کا استعمال کیا گیا ہے۔ اسی طرح خالی خلاء میں $\rho_h = 0$ لیتے ہوئے مساوات 9.30 اور مساوات 9.31 کارتیسی محرد میں

$$(13.22) \quad \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

$$(13.23) \quad \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0$$

لکھے جائیں گے۔

اب دوسرا قدم کہتا ہے کہ موج وقت کے ساتھ سائن نما تعلق رکھتا ہے جبکہ تیسرا قدم کہتا ہے کہ موج x فاصلے کے ساتھ بھی سائن نما تعلق رکھتا ہے۔ ساتھ ہی ساتھ x سمت میں حرکی مستقل بھی بروئے کار لانا ہے۔ ان دو اقدام کو استعمال کرتے ہوئے میدان کے تمام اجزاء لکھتے ہیں۔ یوں E_y اور H_x کو مثال بناتے ہوئے

$$(13.24) \quad \begin{aligned} E_y &= E_1 e^{j\omega t - \gamma x} \\ H_x &= H_1 e^{j\omega t - \gamma x} \end{aligned}$$

لکھے جائیں گے جہاں

γ حرکی مستقل ($\gamma = \alpha + j\beta$)

α تضعیفی مستقل

β زاویائی مستقل

ہیں۔ مساوات 13.24 کے طرز پر بقایا میدان بھی لکھتے ہوئے مساوات 13.16

$$\left[\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} + j\omega\mu H_x \right] e^{j\omega t - \gamma z} = 0$$

یا

$$(13.25) \quad \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} + j\omega\mu H_x = 0$$

لکھا جائے۔ اسی طرح مساوات 13.24 کے طرز پر بقایا میدان بھی لکھتے ہوئے مساوات 13.17 تا مساوات 13.23 یوں لکھے جائیں گے۔

$$(13.26) \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} + \gamma E_z + j\omega\mu H_y = 0$$

$$(13.27) \quad -\gamma E_y - \frac{\partial E_x}{\partial y} + j\omega\mu H_z = 0$$

$$(13.28) \quad \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - (\sigma + j\omega\epsilon) E_x = 0$$

$$(13.29) \quad \frac{\partial H_x}{\partial z} + \gamma H_z - (\sigma + j\omega\epsilon) E_y = 0$$

$$(13.30) \quad -\gamma H_y - \frac{\partial H_x}{\partial y} - (\sigma + j\omega\epsilon) E_z = 0$$

$$(13.31) \quad -\gamma E_x + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

$$(13.32) \quad -\gamma H_x + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0$$

مندرجہ بالا آٹھ مساوات میں ترسیلی تار کے برقی رکاوٹ Z اور برقی فراوانی γ کی طرز کے مستقل

$$(13.33) \quad Z = -j\omega\mu \quad (\Omega/m)$$

$$(13.34) \quad Y = \sigma + j\omega\epsilon \quad (S/m)$$

استعمال کرتے ہوئے انہیں قدر چھوٹا لکھتے ہیں۔

$$(13.35) \quad \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} - ZH_x = 0$$

$$(13.36) \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} + \gamma E_z - ZH_y = 0$$

$$(13.37) \quad -\gamma E_y - \frac{\partial E_x}{\partial y} - ZH_z = 0$$

$$(13.38) \quad \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - YE_x = 0$$

$$(13.39) \quad \frac{\partial H_x}{\partial z} + \gamma H_z - YE_y = 0$$

$$(13.40) \quad -\gamma H_y - \frac{\partial H_x}{\partial y} - YE_z = 0$$

$$(13.41) \quad -\gamma E_x + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

$$(13.42) \quad -\gamma H_x + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0$$

یہ سمت میں حرکت کرتی موج کی عمومی مساوات ہیں۔

ابھی تک نا تو موج کی شکل اور نا ہی بلند درجی موج کا انتخاب کیا گیا ہے لہذا چوتھے قدم کا اطلاق کرتے ہوئے TE قسم کا انتخاب کرتے ہیں جس کا مطلب ہے کہ $E_x = 0$ لیا جائے گا۔ ایسا کرنے سے مندرجہ بالا مساوات

$$(13.43) \quad \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} - ZH_x = 0$$

$$(13.44) \quad \gamma E_z - ZH_y = 0$$

$$(13.45) \quad -\gamma E_y - ZH_z = 0$$

$$(13.46) \quad \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = 0$$

$$(13.47) \quad \frac{\partial H_x}{\partial z} + \gamma H_z - Y E_y = 0$$

$$(13.48) \quad -\gamma H_y - \frac{\partial H_x}{\partial y} - Y E_z = 0$$

$$(13.49) \quad \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

$$(13.50) \quad -\gamma H_x + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0$$

صورت اختیار کر لیتے ہیں۔

پانچویں قدم پر تمام مساوات کو H_x کی صورت میں لکھنا ہو گا۔ ایسا کرنے کی خاطر پہلے مساوات 13.44 اور 13.45 سے

$$(13.51) \quad \frac{E_z}{H_y} = -\frac{E_y}{H_z} = \frac{Z}{\gamma}$$

لکھتے ہیں۔ اب $\frac{E_y}{H_z}$ یا $\frac{E_z}{H_y}$ کی شرح قدرتی رکاوٹ کی مانند ہے لہذا اس شرح کو عرضی برفی موج کی رکاوٹ Z_{yz} ¹² یا صرف عرضی برفی رکاوٹ کہا جائے گا جہاں

$$(13.52) \quad Z_{yz} = \frac{E_y}{H_z} = -\frac{E_z}{H_y} = -\frac{Z}{\gamma} = \frac{j\omega\mu}{\gamma} \quad (\Omega)$$

کے برابر ہے۔ مساوات 13.52 کو مساوات 13.48 میں پر کرتے ہوئے H_y کے لئے حل کرنے سے

$$(13.53) \quad H_y = \frac{-1}{\gamma - YZ_{yz}} \frac{\partial H_x}{\partial y}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح مساوات 13.52 کو مساوات 13.47 میں پر کرتے ہوئے H_z کے لئے حل کرنے سے

$$(13.54) \quad H_z = \frac{-1}{\gamma - YZ_{yz}} \frac{\partial H_x}{\partial z}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اب مساوات 13.53 کو مساوات 13.52 میں پر کرتے ہوئے

$$(13.55) \quad E_z = \frac{Z_{yz}}{\gamma - YZ_{yz}} \frac{\partial H_x}{\partial y}$$

¹² transverse electric wave impedance

اور مساوات 13.54 کو مساوات 13.52 میں پر کرتے ہوئے

$$(13.56) \quad E_y = \frac{-Z_{yz}}{\gamma - YZ_{yz}} \frac{\partial H_x}{\partial z}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ مساوات 13.53 تا مساوات 13.56 تمام اجزاء کو H_x کی صورت میں پیش کرتے ہیں۔

چھٹے قدم پر ان مساوات سے موج کی مساوات کا حصول ہے۔ ایسا کرنے کی خاطر مساوات 13.53 کا y کے ساتھ تفرق اور مساوات 13.54 کا z کے ساتھ تفرق لیتے ہوئے دونوں حاصل جواب کو مساوات 13.50 میں پر کرتے ہوئے

$$-\gamma H_x - \frac{1}{\gamma - YZ_{yz}} \left(\frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} \right) = 0$$

یا

$$\frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} + \gamma (\gamma - YZ_{yz}) H_x = 0$$

حاصل کرتے ہیں جس میں

$$(13.57) \quad k^2 = \gamma (\gamma - YZ_{yz})$$

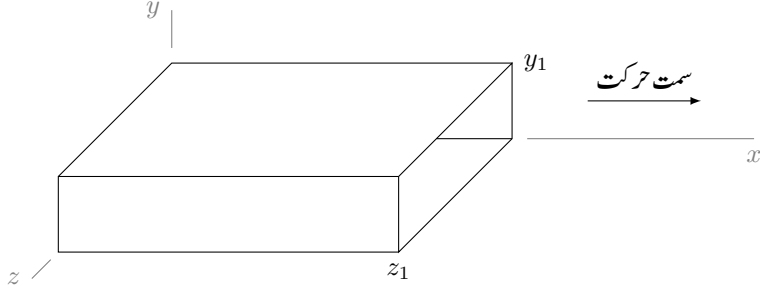
پر کرتے ہوئے

$$(13.58) \quad \frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} + k^2 H_x = 0$$

لکھا جا سکتا ہے۔ مساوات 13.58 موج کے عرضی برقی موج کی عمومی مساوات ہے۔ موج کا عمودی تراش کسی بھی شکل کا ہو سکتا ہے۔ یہاں چھٹا قدم پورا ہوتا ہے۔

ساتویں قدم میں موج کے اطراف کے سرحدی شرائط لاگو کرتے ہوئے موج کو حل کرنا ہے۔ شکل 13.9 میں کامل موصل چادروں سے بنایا گیا مستطیلی موج دکھایا گیا ہے جس کی چوڑائی z_1 اور اونچائی y_1 ہے۔ موصل اور ہوا کے سرحدی برقی شرائط کے مطابق سرحد پر متوازی برقی میدان صفر ہوتا ہے لہذا موج کے اطراف پر متوازی E صفر ہو گا۔ یوں موج کے نچلی اور بالائی سطحوں پر $E_z = 0$ ہو گا۔ اسی طرح موج کے بائیں اور دائیں کھڑے سطحوں پر $E_y = 0$ ہو گا۔ اب ان شرائط پر پورا اترتا مساوات 13.58 کا حل درکار ہے۔ علیحدگی متغیرات کا طریقہ یہاں قابل استعمال ہے جس میں H_x کو دو متغیرات کے حاصل ضرب کے طور پر لکھا جاتا ہے یعنی

$$(13.59) \quad H_x = YZ$$



شکل 13.9: مستطیل موج۔

جہاں Y ایسا متغیر ہے جو صرف y پر منحصر ہے جبکہ Z ایسا متغیر ہے جو صرف z پر منحصر ہے۔ اصل میں ان متغیرات کو $Y(y)$ اور $Z(z)$ لکھنا چاہیے لیکن غیر ضروری علامات کم کرنے کی غرض سے انہیں Y اور Z ہی لکھا جائے گا۔ مساوات 13.59 کے استعمال سے مساوات 13.58

$$(13.60) \quad Z \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + Y \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + k^2 YZ = 0$$

صورت اختیار کر لیتا ہے۔ دونوں اطراف کو YZ سے تقسیم کرتے ہوئے اسے یوں

$$(13.61) \quad \frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = -k^2$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اب بائیں ہاتھ پہلا جزو صرف y پر منحصر ہے جبکہ دوسرا جزو صرف z پر منحصر ہے۔ یوں y کی تبدیلی سے صرف پہلے جزو میں تبدیلی کا امکان ہے لیکن پہلے جزو میں کسی بھی تبدیلی کے بعد مساوات کے دونوں اطراف برابر نہیں رہ سکتے۔ اس طرح صاف ظاہر ہے کہ پہلے جزو میں y کے تبدیلی سے کوئی تبدیلی رونما نہیں ہو سکتی یعنی یہ جزو ناقابل تبدیل مستقل قیمت رکھتا ہے جسے ہم $-A_1$ لکھتے ہیں۔ اسی منطق سے دوسرا جزو بھی اٹل قیمت رکھتا ہے جسے ہم $-A_2$ لکھتے ہیں۔ یوں

$$(13.62) \quad \frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = -A_1$$

$$(13.63) \quad \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = -A_2$$

ہوں گے لہذا مساوات 13.61 سے

$$(13.64) \quad A_1 + A_2 = k^2$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 13.62 اور مساوات 13.63 ایک متغیرہ پر مبنی دو درجی تفرقی مساوات ہیں جن کا حل آپ جانتے ہی ہوں گے۔ مساوات 13.62 کا حل تجربے سے

$$(13.65) \quad Y = c_1 \cos b_1 y + c_2 \sin b_1 y$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں m_1 ، c_2 اور b_1 مساوات کے مستقل ہیں۔ مساوات 13.65 کو واپس مساوات 13.62 میں پر کرنے سے

$$b_1 = \sqrt{A_1}$$

حاصل ہوتا ہے۔ یوں مساوات 13.62 کا حل

$$(13.66) \quad Y = c_1 \cos \sqrt{A_1} y + c_2 \sin \sqrt{A_1} y$$

ہے۔ اسی طرح مساوات 13.63 کا حل

$$(13.67) \quad Z = c_3 \cos \sqrt{A_2} z + c_4 \sin \sqrt{A_2} z$$

ہے۔ ان دو جوابات کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 13.59 کو

$$(13.68) \quad H_x = \left(c_1 \cos \sqrt{A_1} y + c_2 \sin \sqrt{A_1} y \right) \left(c_3 \cos \sqrt{A_2} z + c_4 \sin \sqrt{A_2} z \right)$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اسے مساوات 13.55 میں پر کرنے سے

$$E_z = \frac{Z_{yz}}{\gamma - Y Z_{yz}} \sqrt{A_1} \left(-c_1 \sin \sqrt{A_1} y + c_2 \cos \sqrt{A_1} y \right) \left(c_3 \cos \sqrt{A_2} z + c_4 \sin \sqrt{A_2} z \right)$$

حاصل ہوتا ہے۔ مستطیل کا نچلا چادر $y = 0$ پر پایا جاتا ہے جس پر، برقی سرحدی شرط کے مطابق، $E_z = 0$ ہو گا لہذا $y = 0$ پر مندرجہ بالا مساوات صفر کے برابر ہو گا، جس سے

$$0 = \frac{Z_{yz}}{\gamma - Y Z_{yz}} \sqrt{A_1} c_2 \left(c_3 \cos \sqrt{A_2} z + c_4 \sin \sqrt{A_2} z \right)$$

یعنی

$$(13.69) \quad c_2 = 0$$

حاصل ہوتا ہے لہذا

$$E_z = \frac{-Z_{yz}}{\gamma - Y Z_{yz}} \sqrt{A_1} c_1 \sin \sqrt{A_1} y \left(c_3 \cos \sqrt{A_2} z + c_4 \sin \sqrt{A_2} z \right)$$

حاصل ہوتا ہے۔ مستطیل کا بالائی چادر $y = y_1$ پر پایا جاتا ہے جس پر برقی سرحدی شرط کے مطابق متوازی برقی دباؤ صفر کے برابر ہو گا لہذا مندرجہ بالا مساوات میں y_1 پر $E_z = 0$ پر کرتے ہوئے

$$0 = \frac{-Z_{yz}}{\gamma - YZ_{yz}} \sqrt{A_1} c_1 \sin \sqrt{A_1} y_1 \left(c_3 \cos \sqrt{A_2} z + c_4 \sin \sqrt{A_2} z \right)$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس مساوات کا ایک ممکنہ حل c_1 مساوی صفر ہے جس سے $H_x = 0$ حاصل ہو گا۔ اگرچہ یہ درست جواب ہے لیکن ہمیں زیادہ غرض حرکت کرتے موج سے ہے ناکہ ہر قسم کے میدان سے خالی موج سے، لہذا ہم

$$(13.70) \quad c_1 \neq 0$$

لیتے ہیں۔ یوں مندرجہ بالا مساوات سے

$$\sqrt{A_1} y_1 = n\pi$$

یعنی

$$(13.71) \quad \sqrt{A_1} = \frac{n\pi}{y_1}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں $n = 0, 1, 2, \dots$ ممکن ہے۔ یوں

$$(13.72) \quad H_x = n_1 \cos \frac{n\pi y}{y_1} \left(c_3 \cos \sqrt{A_2} z + c_4 \sin \sqrt{A_2} z \right)$$

ہو گا۔ اس مساوات کو مساوات 13.56 میں پر کرنے سے

$$E_y = \frac{-Z_{yz}}{\gamma - YZ_{yz}} c_1 \sqrt{A_2} \cos \frac{n\pi y}{y_1} \left(-c_3 \sin \sqrt{A_2} z + c_4 \cos \sqrt{A_2} z \right)$$

حاصل ہوتا ہے۔ مستطیل کا دایاں کھڑا چادر $z = 0$ پر ہے، جہاں سرحدی شرط کے تحت متوازی برقی میدان صفر ہو گا لہذا

$$0 = \frac{-Z_{yz}}{\gamma - YZ_{yz}} c_1 c_4 \sqrt{A_2} \cos \frac{n\pi y}{y_1}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اب چونکہ $c_1 \neq 0$ ہے لہذا

$$(13.73) \quad c_4 = 0$$

حاصل ہوتا ہے اور یوں

$$E_y = \frac{Z_{yz}}{\gamma - YZ_{yz}} c_1 c_3 \sqrt{A_2} \cos \frac{n\pi y}{y_1} \sin \sqrt{A_2} z$$

ہوگا۔ مستطیل کا بائیں کھڑا چادر $z = z_1$ پر پایا جاتا ہے جہاں سرحدی شرائط کے تحت E_y ہوگا لہذا مندرجہ بالا مساوات میں یہ حقائق پر کرتے ہوئے

$$0 = \frac{Z_{yz}}{\gamma - YZ_{yz}} c_1 c_3 \sqrt{A_2} \cos \frac{n\pi y}{y_1} \sin \sqrt{A_2} z_1$$

لکھا جائے گا۔ اب $c_1 \neq 0$ اور اس مساوات کا ایک ممکنہ حل c_3 برابر صفر ہے جس سے H_x کے علاوہ تمام میدان صفر کے برابر حاصل ہوتے ہیں۔ ہم چونکہ حرکت کرتے موج کی تلاش میں ہیں لہذا ہم اس ممکنہ جواب کو رد کرتے ہوئے

$$(13.74) \quad c_3 \neq 0$$

چنتے ہیں۔ اس شرط کے ساتھ مندرجہ بالا مساوات سے

$$(13.75) \quad \sqrt{A_2} z_1 = m\pi$$

یعنی

$$(13.76) \quad \sqrt{A_2} = \frac{m\pi}{z_1}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں $m = 0, 1, 2, \dots$ ممکن ہے۔ یوں $c_1 c_3 = H_0$ لکھتے ہوئے

$$(13.77) \quad H_x(y, z) = H_0 \cos \frac{n\pi y}{y_1} \cos \frac{m\pi z}{z_1}$$

حاصل ہوتا ہے جو مقداری مساوات ہے۔ اس مساوات میں وقت t اور x سمت میں حرکت کا کوئی ذکر نہیں ہے۔ یاد رہے کہ اصل میدان مساوات 13.24 کی طرز کا ہے جس میں یہ معلومات بھی شامل ہیں لہذا

$$(13.78) \quad H_x(x, y, z, t) = H_0 \cos \frac{n\pi y}{y_1} \cos \frac{m\pi z}{z_1} e^{i\omega t - \gamma x}$$

لکھا جائے گا جو مکمل جواب ہے۔

مساوات 13.52 اور مساوات 13.57 کی مدد لیتے ہوئے آٹھویں قدم میں H_x کو مساوات 13.53 تا مساوات 13.56 میں پر کرتے ہوئے بقایا میدان حاصل کرتے ہیں یعنی

$$(13.79) \quad H_y = \frac{\gamma H_0}{k^2} \frac{n\pi}{y_1} \sin \frac{n\pi y}{y_1} \cos \frac{m\pi z}{z_1} e^{j\omega t - \gamma x}$$

$$(13.80) \quad H_z = \frac{\gamma H_0}{k^2} \frac{m\pi}{z_1} \cos \frac{n\pi y}{y_1} \sin \frac{m\pi z}{z_1} e^{j\omega t - \gamma x}$$

$$(13.81) \quad E_z = -\frac{j\omega\mu H_0}{k^2} \frac{n\pi}{y_1} \sin \frac{n\pi y}{y_1} \cos \frac{m\pi z}{z_1} e^{j\omega t - \gamma x}$$

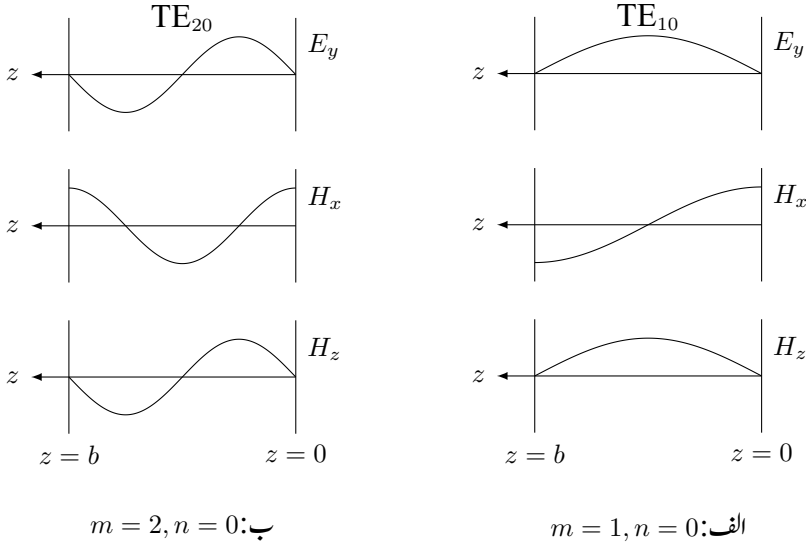
$$(13.82) \quad E_y = \frac{j\omega\mu H_0}{k^2} \frac{m\pi}{z_1} \cos \frac{n\pi y}{y_1} \sin \frac{m\pi z}{z_1} e^{j\omega t - \gamma x}$$

$$(13.83) \quad E_x = 0$$

جہاں آخر میں $E_x = 0$ بھی شامل کیا گیا ہے۔ مساوات 13.78 تا مساوات 13.83 مستطیلی موج میں TE موج کا مکمل حل ہے۔ یہاں آٹھواں قدم پورا ہوتا ہے۔

آئیں مستطیلی موج میں m اور n مستقل پر غور کریں۔ اگر $m = 1$ اور $n = 0$ ہوں تب مندرجہ بالا مساوات میں E_z, H_z, H_x اور E_x صفر کے برابر حاصل ہوتے ہیں۔ یوں موج میں صرف H_x, H_z اور E_y میدان پائے جاتے ہیں۔ دائیں چادر، یعنی $z = 0$ پر $E_y = 0$ پایا جاتا ہے جبکہ دونوں چادروں کے عین درمیان $z = \frac{z_1}{2}$ پر میدان کی چوٹی پائی جاتی ہے۔ شکل 13.10-الف میں پہلا خط E_y ہی ہے۔ اگر H_x کی بات کی جائے تو دائیں چادر، یعنی $z = 0$ پر H_x کی چوٹی جبکہ بائیں چادر، یعنی $z = z_1$ پر H_x کا نشیب پایا جاتا ہے۔ ان دو اطراف کے عین درمیان $z = \frac{z_1}{2}$ پر $H_x = 0$ پایا جاتا ہے۔ شکل 13.10-الف میں دوسرا خط H_x ہے۔ مقناطیسی میدان H_z بھی دائیں اور بائیں چادروں پر صفر کے برابر ہے جبکہ ان کے عین درمیان اس کی چوٹی پائی جاتی ہے۔ یوں $m = 1$ اور $n = 0$ کی صورت میں میدان z کے ساتھ تبدیل ہوتے ہیں جبکہ y کا ان پر کوئی اثر نہیں پایا جاتا۔ ساتھ ہی ساتھ z پر میدان کا آدھا چکر پایا جاتا ہے۔

$m = 2$ اور $n = 0$ کی صورت میں میدان شکل 13.10-ب میں دکھائے گئے ہیں۔ اب بھی میدان z کے ساتھ تبدیل ہوتے ہیں جبکہ y کا ان پر کوئی اثر نہیں پایا جاتا۔ ساتھ ہی ساتھ z پر میدان کا مکمل چکر، یعنی دو آدھے چکر، پائے جاتے ہیں۔ ان سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ m کی قیمت z پر میدان کے آدھے چکروں کی گنتی ہے۔ آپ جلد دیکھیں گے کہ n بالکل اسی طرح y پر میدان کے آدھے چکروں کی گنتی ہے۔ ان حقائق کو سامنے رکھتے ہوئے بلند درجی TE موج کو m اور n سے پہچانا جاتا ہے۔ یوں شکل 13.10-الف کے امواج TE₁₀ جبکہ شکل 13.10-ب کے امواج TE₂₀ کہلاتے ہیں۔ یوں عمومی بلند درجی عرضی برقی موج TE_{mn} کہلائے گی جہاں z پر آدھے چکروں



شکل 13.10: بلند انداز TE امواج۔

کی تعداد m ہے جبکہ y پر آدھے چکروں کی تعداد n ہے۔ مستطیلی موج میں عموماً z سے لمبی طرف کو ظاہر کیا جاتا ہے۔ اسی طرح مقناطیسی امواج TM_{mn} کہلائے جاتے ہیں۔

آئیں TE پر تفصیلاً غور کریں۔

13.3.1 مستطیلی موج کے میدان پر تفصیلی غور

بلند درجی TE₁₀ موج:

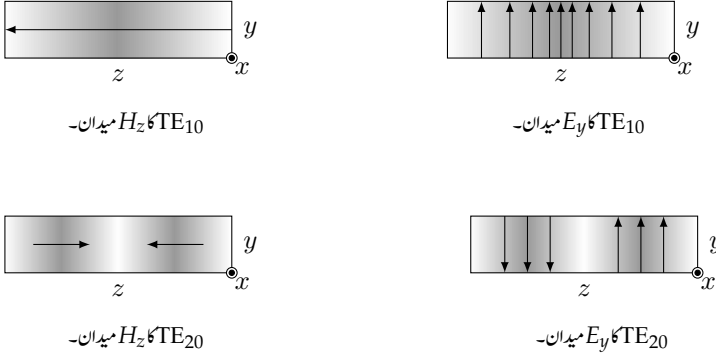
مساوات 13.78 تا مساوات 13.83 میں $m = 1$ اور $n = 0$ پر کرنے سے مندرجہ ذیل TE₁₀ امواج حاصل ہوتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
 E_x &= 0 && \text{TE کا بنیادی شرط} \\
 E_y &= \frac{j\omega\mu H_0}{k^2} \frac{\pi}{z_1} \sin \frac{\pi z}{z_1} e^{j\omega t - \gamma x} \\
 E_z &= 0 \\
 H_x &= H_0 \cos \frac{\pi z}{z_1} e^{j\omega t - \gamma x} \\
 H_y &= 0 \\
 H_z &= \frac{\gamma H_0}{k^2} \frac{\pi}{z_1} \sin \frac{\pi z}{z_1} e^{j\omega t - \gamma x}
 \end{aligned}
 \tag{13.84}$$

ان میں پہلی مساوات، یعنی $E_x = 0$ ، درحقیقت TE موج کی تعریف ہے۔ ان امواج کے حیطوں کو شکل 13.10- الف میں $x = 0$ اور $t = 0$ کی صورت میں دکھایا گیا ہے۔ ان اشکال میں میدان بالمقابل z دکھایا گیا ہے۔ مندرجہ بالا مساوات میں کوئی میدان بھی y پر منحصر نہیں ہے لہذا y کے تبدیلی سے یہ میدان تبدیل نہیں ہوں گے۔ TE₁₀ تمام اقسام کے بلند درجی امواج میں سب سے لمبی انقطاعی طول موج رکھتی ہے لہذا اس کی انقطاعی تعداد سب سے کم ہے۔ شکل 13.11 میں E_y اور H_z کو بطور سمتیہ دکھایا گیا ہے۔ شکل- الف میں $z = \frac{z_1}{2}$ پر سمتیوں کی تعداد زیادہ دکھا کر گھنے میدان کو ظاہر کرنے کی کوشش کی گئی ہے۔ ساتھ ہی ساتھ اس خطے کو گہرا رنگ بھی دے کر گھنے میدان کو ظاہر کیا گیا ہے۔ شکل- ب میں مقناطیسی میدان کی سمت کو سمتیہ سے جبکہ میدان کو گہرے رنگ سے ظاہر کیا گیا ہے۔

بلند درجی TE₂₀ موج:

شکل 13.11 میں TE₂₀ کے E_y اور H_z اشکال بھی دکھائے گئے ہیں۔

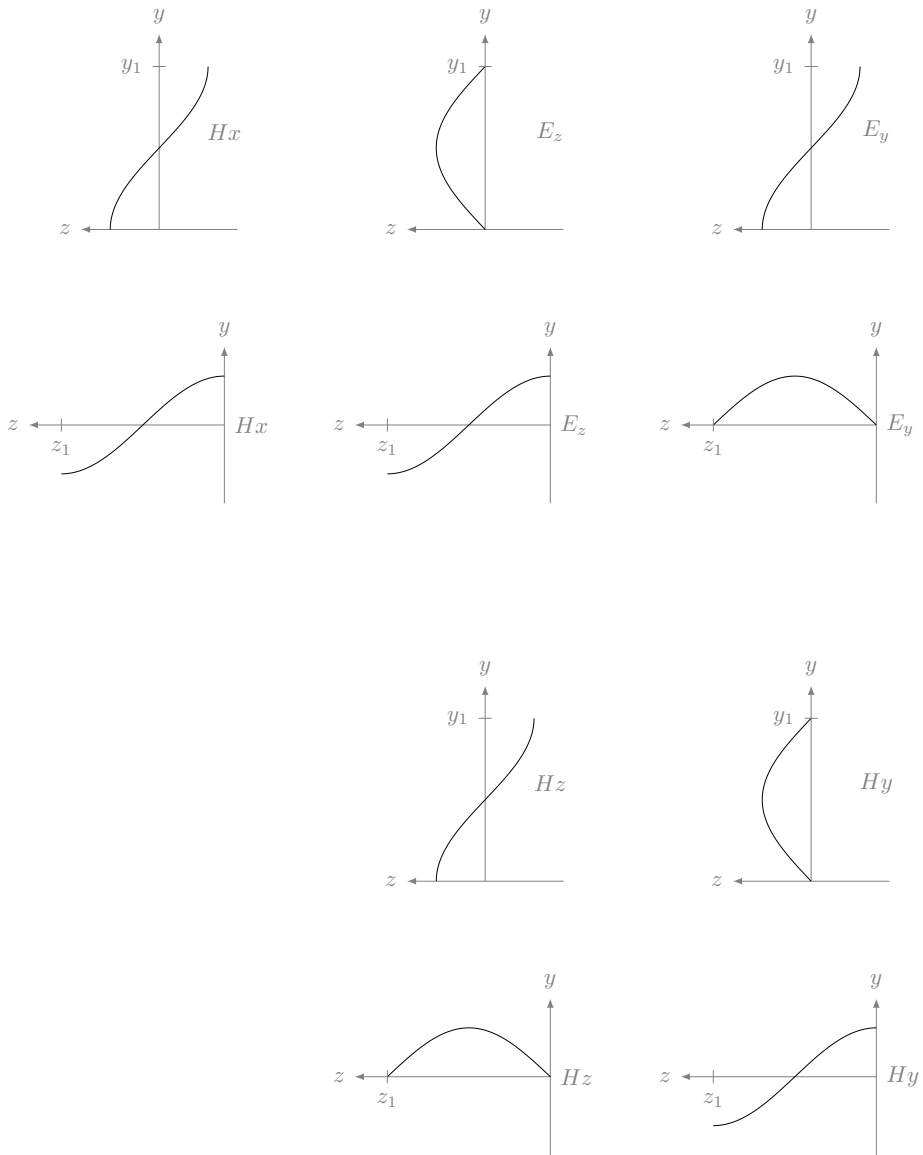
شکل 13.11: TE₁₀ اور TE₂₀ کے E_y اور H_z میدان۔بلند درجی TE₁₁ موج:

مساوات 13.78 تا مساوات 13.83 میں $m = 1$ اور $n = 1$ پر کرنے سے مندرجہ ذیل TE₁₁ امواج حاصل ہوتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
 E_x &= 0 && \text{TE کا بنیادی شرط} \\
 E_y &= \frac{j\omega\mu H_0}{k^2} \frac{\pi}{z_1} \cos \frac{\pi y}{y_1} \sin \frac{\pi z}{z_1} e^{j\omega t - \gamma x} \\
 E_z &= -\frac{j\omega\mu H_0}{k^2} \frac{\pi}{y_1} \sin \frac{\pi y}{y_1} \cos \frac{\pi z}{z_1} e^{j\omega t - \gamma x} \\
 H_x &= H_0 \cos \frac{\pi y}{y_1} \cos \frac{\pi z}{z_1} e^{j\omega t - \gamma x} \\
 H_y &= \frac{\gamma H_0}{k^2} \frac{\pi}{y_1} \sin \frac{\pi y}{y_1} \cos \frac{\pi z}{z_1} e^{j\omega t - \gamma x} \\
 H_z &= \frac{\gamma H_0}{k^2} \frac{\pi}{z_1} \cos \frac{\pi y}{y_1} \sin \frac{\pi z}{z_1} e^{j\omega t - \gamma x}
 \end{aligned}
 \tag{13.85}$$

اس بلند درجی انداز میں صرف E_x ہر نقطے پر تمام اوقات صفر کے برابر رہتا ہے۔ ان میدان کو شکل 13.12 میں دکھایا گیا ہے۔

مستطیل موج کے حاصل حل میدان تمام ممکنہ میدان ہیں جو کسی موج میں پائے جاسکتے ہیں۔ حقیقت میں کسی بھی موج میں پائے جانے والے امواج کا دارومدار موج کی جسامت، موج پیدا کرنے کا طریقہ اور موج میں ناہمواریوں پر ہے۔ کسی بھی نقطے پر موجود تمام میدانوں کا مجموعی میدان پایا جائے گا۔



شکل 13.12: TE₁₁ میدان۔

واپس اپنی گفتگو پر آتے ہوئے مساوات 13.64، مساوات 13.71 اور مساوات 13.76 کو ملا کر

$$(13.86) \quad k^2 = \left(\frac{n\pi}{y_1} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{z_1} \right)^2$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں مساوات 13.33، مساوات 13.52 اور مساوات 13.57 سے

$$(13.87) \quad k^2 = \gamma^2 - j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)$$

حاصل ہوتا ہے۔ بے ضیاع ذو برق ($\sigma = 0$) کی صورت میں مندرجہ بالا دو مساوات سے

$$(13.88) \quad \gamma = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{y_1} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{z_1} \right)^2 - \omega^2\mu\epsilon}$$

حاصل ہوتا ہے۔

ایک مخصوص قیمت سے کم تعدد پر جذر میں آخری جزو پہلے دو اجزاء کے مجموعے سے کم ہو گا لہذا γ حقیقی ہو گا۔ حقیقی γ کی صورت میں موج گھٹے گی اور یہ موج میں صفر نہیں کر پائے گی۔

اسی طرح اس مخصوص قیمت سے زیادہ تعدد پر γ خیالی عدد ہو گا لہذا موج میں موج صفر کرے گی۔

ان دو قیمتوں کے درمیان تعدد کی وہ قیمت ہو گی جس پر $\gamma = 0$ حاصل ہوتا ہے۔ اس تعدد کو انقطاعی تعدد¹³ کہتے ہیں۔ انقطاعی تعدد سے بلند تعدد کے امواج، بغیر گھٹے، موج میں صفر کر سکتے ہیں جبکہ اس سے کم تعدد کے امواج گھٹے ہیں لہذا یہ موج میں صفر نہیں کر پاتے۔

ان تین تعددی خطوں کو ایک جگہ دوبارہ پیش کرتے ہیں۔

• کم تعدد یعنی کم ω پر γ حقیقی ہوتا ہے۔ موج غیر شفاف ہوتا ہے جس میں امواج صفر نہیں کر سکتے۔

• مخصوص درمیانی تعدد پر $\gamma = 0$ ہوتا ہے۔ یہ انقطاعی تعدد ہے۔

• زیادہ تعدد پر γ خیالی ہوتا ہے۔ موج شفاف ہوتا ہے جس میں امواج صفر کر سکتے ہیں۔

¹³cutoff frequency

مساوات 13.88 میں $\sqrt{\omega^2 \mu \epsilon}$ درحقیقت ایسی لامحدود خطے کا زاویائی مستقل β_0 ہے جس میں وہی ذو برق ہو جو موج میں پایا جاتا ہے۔ یوں ہم

$$(13.89) \quad \gamma = \sqrt{k^2 - \beta_0^2}$$

لکھ سکتے ہیں جہاں

$$\beta_0 = \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \quad \text{لامحدود خطے کا زاویائی مستقل}$$

λ_0 لامحدود خطے میں طول موج

$$k = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{z_1}\right)^2}$$

ہیں۔ یوں انقطاعی تعدد سے بلند تعدد پر $\beta_0 > k$ ہو گا لہذا

$$(13.90) \quad \gamma = \sqrt{k^2 - \beta_0^2} = j\beta$$

ہو گا جہاں

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = \sqrt{\beta_0^2 - k^2} \quad \text{موج میں زاویائی مستقل}$$

λ موج میں طول موج

ہیں۔ کافی بلند تعدد پر $k \gg \beta_0$ ہو گا اور یوں موج کے زاویائی مستقل β کی قیمت لامحدود خطے کے زاویائی مستقل β_0 کے قیمت کے قریب ہو گی۔ اس کے برعکس انقطاعی تعدد سے کم تعدد پر $\beta_0 < k$ ہو گا جس سے

$$(13.91) \quad \gamma = \sqrt{k^2 - \beta_0^2} = \alpha$$

حاصل ہوتا ہے جہاں α تضعیفی مستقل ہے۔

کافی کم تعدد پر $k \ll \beta_0$ ہو گا لہذا تضعیفی مستقل کی قیمت k کے قریب ہو گی۔

عین انقطاعی تعدد پر $\beta_0 = k$ ہو گا لہذا $\gamma = 0$ ہو گا۔ یوں انقطاعی تعدد پر

$$(13.92) \quad \omega^2 \mu \epsilon = \left(\frac{n\pi}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{z_1}\right)^2$$

ہو گا جس سے انقطاعی تعدد¹⁴

$$(13.93) \quad f_c = \frac{1}{2\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\left(\frac{n}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{m}{z_1}\right)^2} \quad (\text{Hz})$$

اور انقطاعی طول موج

$$(13.94) \quad \lambda_{0c} = \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{n\pi}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{z_1}\right)^2}} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{n}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{m}{z_1}\right)^2}} = \frac{2\pi}{k} \quad (\text{m})$$

یا

$$(13.95) \quad k = \frac{2\pi}{\lambda_{0c}}$$

حاصل ہوتے ہیں جہاں λ_{0c} لا محدود نکلے میں انقطاعی تعدد پر طول موج ہے جسے چھوٹا کر کے انقطاعی طول موج¹⁵ پکارا جاتا ہے۔ مساوات 13.93 اور مساوات 13.94 سے کھوکھلے مستطیلی موج کے کسی بھی TE_{mn} موج کا انقطاعی تعدد اور انقطاعی طول موج حاصل کیا جاسکتا ہے۔ مثال کے طور پر TE_{10} موج کا انقطاعی طول موج

$$(13.96) \quad \lambda_{0c} = 2z_1$$

حاصل ہوتا ہے جو وہی قیمت ہے جو مساوات 13.5 میں حاصل کی گئی تھی جہاں $z_1 = b$ کے برابر ہے۔ انقطاعی تعدد سے بلند تعدد ($\beta_0 > k$) پر

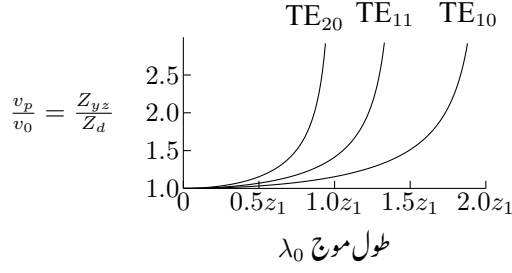
$$(13.97) \quad \beta = \sqrt{\beta_0^2 - k^2} = \sqrt{\omega^2\mu\epsilon - \left(\frac{n\pi}{y_1}\right)^2 - \left(\frac{m\pi}{z_1}\right)^2}$$

کے برابر ہے۔ اب $\beta_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$ اور مساوات 13.95 مندرجہ بالا مساوات میں پر کرتے ہوئے

$$(13.98) \quad \beta = \sqrt{\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\right)^2 - \left(\frac{2\pi}{\lambda_{0c}}\right)^2} = \beta_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2}$$

لکھا جاسکتا ہے لہذا موج میں طول موج

$$(13.99) \quad \lambda_{\text{موج}} = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2}}$$



شکل 13.13: مختلف بلند درجی امواج کے مستطیلی موج میں دوری رفتار بالمتقابل طول موج λ_0 ۔

اور موج میں دوری رفتار¹⁶ v_p

$$(13.100) \quad v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{v_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{n\lambda_0}{2y_1}\right)^2 - \left(\frac{m\lambda_0}{2z_1}\right)^2}}$$

یا

$$(13.101) \quad v_p = \frac{v_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2}}$$

حاصل ہوتے ہیں جہاں

$$v_0 \text{ لامحدود خطے میں دوری رفتار } \frac{\omega}{\beta_0} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \text{ ہے،}$$

λ_0 لامحدود خطے میں طول موج،

λ_{0c} انتظامی طول موج (انتظامی تعدد پر لامحدود خطے میں طول موج)

ہیں۔

شکل 13.13 میں مختلف بلند انداز امواج کے دوری رفتار بالمتقابل طول موج λ_0 دکھائے گئے ہیں۔ دوری رفتار کو لامحدود خطے کے دوری رفتار v_0 کی نسبت سے دکھایا گیا ہے۔ ان اشکال میں مستطیلی موج کے دونوں اطراف برابر لمبائی ($y_1 = z_1$) کے تصور کئے گئے ہیں۔

¹⁶ phase velocity

مندرجہ بالا تجزیے میں موج کے اطراف کامل موصل کے تصور کئے گئے اور ساتھ ہی ساتھ موج میں بے ضیاع ذو برق بھرا تصور کیا گیا۔ اسی لئے انقطاعی تعدد سے بلند تعدد پر امواج بغیر گھٹے موج میں صفر کرتے ہیں۔ حقیقت میں موج کے اطراف کے موصل کی موصلیت اور ذو برق میں طاقت کی ضیاع سے $\gamma = \alpha + j\beta$ ہو گا لہذا انقطاعی تعدد سے بلند تعدد کے امواج بھی صفر کے دوران کچھ نہ کچھ گھٹتے ہیں۔

کھوکھلا موج جس میں صرف ہوا بھری ہو میں ذو برق یعنی ہوا کا ضیاع قابل نظر انداز ہوتا ہے۔ ایسے موج میں طاقت کا ضیاع صرف موج کے چادروں کی موصلیت کی بنا ہے۔ موصل چادر مکمل طور پر کامل نہ ہونے کا مطلب لے کہ حقیقت میں چادر کے متوازی برقی میدان E_m صفر نہیں ہو گا۔ اچھے موصل مثلاً تانبے کی بنی چادر میں E_m کی قیمت قابل نظر انداز ہوتی ہے۔ یوں تانبے یا دیگر اچھے موصل کے چادر سے بنی موج کے طول موج λ ، زاویائی مستقل β یا دوری رفتار v_p حاصل کرتے وقت موج کے چادر کو کامل ہی تصور کیا جاتا ہے۔ ایسی صورت میں تضعیفی مستقل α کا تخمینہ علیحدہ طور پر لگایا جاتا ہے۔

آخر میں مستطیلی موج میں عرضی برقی موج کی رکاوٹ Z_{yz} مساوات 13.52 سے حاصل کرتے ہیں۔

$$(13.102) \quad Z_{yz} = \frac{j\omega\mu}{\gamma}$$

انقطاعی تعدد سے بلند تعدد پر $\gamma = j\beta$ ہوتا ہے لہذا

$$(13.103) \quad Z_{yz} = \frac{\omega\mu}{\beta} = \frac{Z_z}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2}} \quad (\Omega)$$

ہو گا جہاں

$$Z_z = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

λ_0 لامحدود نخطے میں طول موج،

λ_{0c} انقطاعی طول موج (انقطاعی تعدد پر لامحدود نخطے میں طول موج)

ہیں۔ ہوا کے لئے $Z_z = 120\pi = 376.7 \Omega$ کے برابر ہے۔ چونکہ Z_{yz} اور Z_z کی شرح بالکل v_p اور v_0 کی شرح کے برابر ہے لہذا شکل 13.13 $\frac{Z_{yz}}{Z_z}$ بالقابل λ_0 بھی دیتا ہے۔

مشق 13.1: TE_{10} ، TE_{20} اور TE_{11} امواج کی انقطاعی طول موج مندرجہ ذیل مستطیلی موج کے لئے حاصل کریں۔

• ہوا سے بھرا موج جس کے اطراف چار سنٹی میٹر اور دو سنٹی میٹر ہیں۔

• ہوا سے بھرا موج جس کے دونوں اطراف چار سنٹی میٹر کے برابر ہیں۔

جوابات: پہلا موج 8 cm، 4 cm، 3.577 cm۔ دوسرا موج 8 cm، 4 cm، 5.656 cm

13.4 مستطیلی موج میں عرضی مقناطیسی TM_{mn} موج

عرضی برقی امواج حل کرنے کے آٹھ قدم صفحہ 654 پر بتلائے گئے۔ انہیں آٹھ قدم سے شکل 13.9 کے مستطیلی موج میں عرضی مقناطیسی موج TM_{mn} بھی حاصل کئے جاتے ہیں۔ فرق صرف اتنا ہے کہ یہاں $H_x = 0$ فرض کر کے مسئلہ حل کیا جاتا ہے۔ TM_{mn} موج کہتے ہی اس موج کو ہیں جن میں $H_x = 0$ ہو۔ انہیں TM_{mn} حاصل کرنے کے اہم نکات کا تذکرہ کریں۔

موج حاصل کرنے کے پہلے تین قدم میں کوئی تبدیلی نہیں پائی جاتی لہذا مساوات 13.14 تا مساوات 13.42 جوں

کے توں استعمال کئے جائیں گے۔ چوتھے قدم میں $H_x = 0$ پر کرنے سے

$$(13.104) \quad \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0$$

$$(13.105) \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} + \gamma E_z - Z H_y = 0$$

$$(13.106) \quad -\gamma E_y - \frac{\partial E_x}{\partial y} - Z H_z = 0$$

$$(13.107) \quad \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - Y E_x = 0$$

$$(13.108) \quad \gamma H_z - Y E_y = 0$$

$$(13.109) \quad -\gamma H_y - Y E_z = 0$$

$$(13.110) \quad -\gamma E_x + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

$$(13.111) \quad \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 13.108 اور مساوات 13.109 سے

$$(13.112) \quad Z_{yz} = \frac{E_y}{H_z} = -\frac{E_z}{H_y} = \frac{\gamma}{Y}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس مساوات کا مساوات 13.52 کے ساتھ موازنہ کریں۔ اگرچہ دونوں جگہ Z_{yz} کی تعریف $\frac{E_y}{H_z}$ ہی ہے لیکن دونوں جگہ اس شرح کی قیمت مختلف ہے۔ یہیں سے آپ توقع کر سکتے ہیں کہ TM_{mn} موج کی رکاوٹ TE_{mn} کے رکاوٹ سے مختلف ہوگی۔ یہاں Z_{yz} عرضی مقناطیسی موج کی رکاوٹ¹⁷ کہلاتی ہے۔

پانچویں قدم میں تمام میدان کو E_x کی صورت میں حاصل کرنا ہے۔ مساوات 13.112 کو مساوات 13.105 میں پر کرتے ہوئے H_y کے لئے حل کرتے ہوئے

$$(13.113) \quad H_y = \frac{Y}{\gamma^2 + YZ} \frac{\partial E_x}{\partial z}$$

اور اسی طرح مساوات 13.112 کو مساوات 13.106 میں پر کرتے ہوئے H_z کے لئے حل کرتے ہوئے

$$(13.114) \quad H_z = \frac{-Y}{\gamma^2 + YZ} \frac{\partial E_x}{\partial y}$$

¹⁷transverse magnetic wave impedance

حاصل ہوتے ہیں۔ ان دو مساوات اور مساوات 13.112 سے

$$(13.115) \quad E_y = \frac{-\gamma}{\gamma^2 + YZ} \frac{\partial E_x}{\partial y}$$

$$(13.116) \quad E_z = \frac{-\gamma}{\gamma^2 + YZ} \frac{\partial E_x}{\partial z}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ یوں پانچواں قدم پورا ہوتا ہے۔

چھٹے قدم میں E_x کے موج کی مساوات حاصل کرنے کی غرض سے مساوات 13.115 کا y کے ساتھ تفرق اور مساوات 13.116 کا z کے ساتھ تفرق مساوات 13.110 میں پر کرتے ہوئے

$$-\gamma E_x - \frac{\gamma}{\gamma^2 + YZ} \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} - \frac{\gamma}{\gamma^2 + YZ} \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = 0$$

یا

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + (\gamma^2 + YZ) E_x = 0$$

حاصل ہوتا ہے جسے

$$(13.117) \quad \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + k^2 E_x = 0$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں

$$(13.118) \quad k^2 = \gamma^2 + YZ = \gamma \left(\gamma + \frac{Z}{Z_{yz}} \right)$$

کے برابر ہے۔ مساوات 13.57 کے ساتھ موازنہ کرتے ہوئے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ TE_{mn} اور TM_{mn} امواج کے k^2 مختلف قیمت رکھتے ہیں۔

ساتویں قدم پر مساوات 13.117 کا ایسا حل درکار ہے جو مستطیلی موج کے اطراف پر برقی اور مقناطیسی سرحدی شرائط پر پورا اترتا ہو۔ بالکل پہلے کی طرح حل کرتے ہوئے

$$(13.119) \quad k^2 = \left(\frac{n\pi}{y_1} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{z_1} \right)^2$$

اور میدان

$$(13.120) \quad E_x = E_0 \sin \frac{n\pi y}{y_1} \sin \frac{m\pi z}{z_1} e^{j\omega t - \gamma x}$$

حاصل ہوتا ہے جسے باری باری مساوات 13.113 تا مساوات 13.116 میں پر کرتے ہوئے

$$(13.121) \quad H_y = \frac{YE_0}{k^2} \frac{m\pi}{z_1} \sin \frac{n\pi y}{y_1} \cos \frac{m\pi z}{z_1} e^{j\omega t - \gamma x}$$

$$(13.122) \quad H_z = \frac{-YE_0}{k^2} \frac{n\pi}{y_1} \cos \frac{n\pi y}{y_1} \sin \frac{m\pi z}{z_1} e^{j\omega t - \gamma x}$$

$$(13.123) \quad E_y = \frac{-\gamma E_0}{k^2} \frac{n\pi}{y_1} \cos \frac{n\pi y}{y_1} \sin \frac{m\pi z}{z_1} e^{j\omega t - \gamma x}$$

$$(13.124) \quad E_z = \frac{-\gamma E_0}{k^2} \frac{m\pi}{z_1} \sin \frac{n\pi y}{y_1} \cos \frac{m\pi z}{z_1} e^{j\omega t - \gamma x}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ ان جوابات کے ساتھ

$$(13.125) \quad H_x = 0 \quad \text{TM}_{mn} \text{ موج ہونے کا شرط}$$

شامل کرتے ہوئے تمام میدان حاصل ہوتے ہیں۔ بے ضیاع ذو برق ($\sigma = 0$) کی صورت میں مساوات 13.120 تا مساوات 13.125 میں $Y = j\omega\epsilon$ ہو گا۔

مساوات 13.120 تا مساوات 13.125 کے TM_{mn} امواج میں m یا n صفر کے برابر ہونے سے تمام میدان صفر ہو جاتے ہیں لہذا TM_{mn} کا کم سے کم تعددی موج TM_{11} ہے۔

بے ضیاع ذو برق ($\sigma = 0$) تصور کرتے ہوئے، مساوات 13.118، مساوات 13.119 اور مساوات 13.33 سے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$(13.126) \quad \gamma = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{z_1}\right)^2 - \omega^2\mu\epsilon}$$

$$= \sqrt{k^2 - \beta_0^2}$$

جہاں $\omega\sqrt{\mu\epsilon}$ لامحدود وسعت کے نخطے میں موج کا زاویائی مستقل β_0 ہے۔ مندرجہ بالا مساوات میں $k > \beta_0$ کی صورت میں $\gamma = \alpha + j\beta$ سے

$$(13.127) \quad \alpha = \sqrt{k^2 - \beta_0^2} \quad (k > \beta_0)$$

$$\beta = 0$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس صورت میں موج صفر نہیں کر پائے گی۔ اس کے برعکس $k < \beta_0$ کی صورت میں

$$(13.128) \quad \begin{aligned} \alpha &= 0 \\ \beta &= \sqrt{\beta_0^2 - k^2} \quad (k < \beta_0) \end{aligned}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ اس صورت میں موج، بغیر گھٹے موج میں صفر کرے گی۔ انقطاعی تعدد ان دو تعددی خطوں کے عین درمیان پایا جائے گا جہاں γ کی قیمت حقیقی سے خیالی ہوتے ہوئے صفر سے گزرے گی۔ مساوات 13.126 میں $\gamma = 0$ پر کرنے سے انقطاعی تعدد

$$(13.129) \quad \omega_c^2 \mu \epsilon = \left(\frac{n\pi}{y_1} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{z_1} \right)^2$$

یا

$$(13.130) \quad f_c = \frac{1}{2\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\left(\frac{n}{y_1} \right)^2 + \left(\frac{m}{z_1} \right)^2}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس طرح انقطاعی طول موج

$$(13.131) \quad \lambda_{0c} = \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{n\pi}{y_1} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{z_1} \right)^2}} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{n}{y_1} \right)^2 + \left(\frac{m}{z_1} \right)^2}} = \frac{2\pi}{k}$$

یا

$$(13.132) \quad k = \frac{2\pi}{\lambda_{0c}}$$

حاصل ہوتا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ TE_{mn} اور TM_{mn} امواج کے انقطاعی تعدد کے مساوات ہو بہو ایک جیسے ہیں۔

انقطاعی تعدد سے بلند تعدد $k > \beta_0$ کی صورت میں

$$(13.133) \quad \beta = \sqrt{\beta_0^2 - k^2} = \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - \left(\frac{n\pi}{y_1} \right)^2 - \left(\frac{m\pi}{z_1} \right)^2}$$

ہو گا جس سے موج میں طول موج

$$(13.134) \quad \lambda_{\text{موج}} = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2}}$$

اور موج میں دوری رفتار

$$(13.135) \quad v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{v_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{n\lambda_0}{2y_1}\right)^2 - \left(\frac{m\lambda_0}{2z_1}\right)^2}} \\ = \frac{v_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2}}$$

حاصل ہوتے ہیں جہاں

$$v_0 \text{ لامحدود خطے میں دوری رفتار } v_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \text{ جبکہ}$$

λ_0 لامحدود خطے میں طول موج اور

λ_{0c} انتظامی طول موج (انتظامی تعدد پر لامحدود خطے میں طول موج)

ہیں۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ TM_{mn} اور TE_{mn} کے دوری رفتار کے مساوات بھی ہو بہو یکساں ہیں۔

عرضی مقبض طیبی موج کی رکاوٹ مساوات 13.112 سے

$$Z_{yz} = \frac{\gamma}{Y}$$

ہے جو انتظامی تعدد سے بلند تعدد $\gamma = j\beta$ کی صورت میں

$$(13.136) \quad Z_{yz} = \frac{\beta}{\omega\epsilon} = Z_z \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2}$$

ہو گا جہاں

$$Z_z = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \text{ موج کے ذو برق کی قدرتی رکاوٹ}$$

λ_0 لامحدود خطے میں طول موج اور

λ_{0c} انقطاعی طول موج

کے برابر ہیں۔ مساوات 13.136 کا مساوات 13.103 کے ساتھ موازنہ کرنے سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ TM_{mn} اور TE_{mn} امواج کی رکاوٹ مختلف ہیں۔

ہم نے دیکھا کہ ہر بلند درجی انداز کا اپنا مخصوص انقطاعی تعدد، رفتار اور رکاوٹ ہوتے ہیں۔ اگر تعدد اتنی ہو کہ مختلف بلند انداز موج میں صفر کر سکتے ہوں تب میدان ان تمام میدانوں کا مجموعہ ہو گا جو موج میں پائے جاتے ہوں۔

جدول 13.1 مستطیلی موج میں TE_{mn} موج کے متغیرات کے تعلق دیتا ہے۔ Z_{yz} کے علاوہ یہی تعلق TM_{mn} کے لئے بھی درست ہیں۔

جدول 13.1: مستطیلی موج میں TE_{mn} امواج کے متغیرات کے تعلق۔

تعلق	اکائی	نام تفاعل
$f_c = \frac{1}{2\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\left(\frac{n}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{m}{z_1}\right)^2}$	Hz	انقطاعی تعدد
$\lambda_{0c} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{n}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{m}{z_1}\right)^2}}$	m	انقطاعی طول موج
$\lambda_{\text{موج}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2}}$	m	موج میں طول موج
$v_p = \frac{v_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2}}$	$\frac{m}{s}$	دوری رفتار
$Z_{yz} = \frac{Z_z}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2}}$	Ω	عرضی موج کی رکاوٹ

13.5 کھوکھلی نالی موج

کھوکھلی نالی جس کا اندرونی رداس ρ ہو کے مسائل نکلی محدود میں باآسانی حاصل ہوتے ہیں لہذا ایسے موج میں TE_{mn} یا TM_{mn} امواج حاصل کرنے کی خاطر نکلی محدود ہی استعمال کرتے ہیں۔ یہاں بھی صفحہ 654 پر دیے آٹھ قدم لیتے ہوئے جواب حاصل کیا جائے گا۔ نکلی موج z محدود پر رکھا گیا ہے لہذا اس میں امواج z جانب حرکت کریں گے۔

میکس ویل کے گردش کے دو مساوات کو تکلی محدود میں لکھ کر

$$\left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} - \frac{\partial E_\phi}{\partial z} \right] \mathbf{a}_\rho + \left(\frac{\partial E_\rho}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial \rho} \right) \mathbf{a}_\phi + \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial (E_\phi \rho)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_\rho}{\partial \phi} \right] \mathbf{a}_z$$

$$= -\mu \left(\frac{\partial H_\rho}{\partial t} \mathbf{a}_\rho + \frac{\partial H_\phi}{\partial t} \mathbf{a}_\phi + \frac{\partial H_z}{\partial t} \mathbf{a}_z \right)$$

$$\left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} - \frac{\partial H_\phi}{\partial z} \right] \mathbf{a}_\rho + \left(\frac{\partial H_\rho}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \right) \mathbf{a}_\phi + \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial (H_\phi \rho)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_\rho}{\partial \phi} \right] \mathbf{a}_z$$

$$= \sigma \left(E_\rho \mathbf{a}_\rho + E_\phi \mathbf{a}_\phi + E_z \mathbf{a}_z \right) + \epsilon \left(\frac{\partial E_\rho}{\partial t} \mathbf{a}_\rho + \frac{\partial E_\phi}{\partial t} \mathbf{a}_\phi + \frac{\partial E_z}{\partial t} \mathbf{a}_z \right)$$

محددی اجزاء علیحدہ علیحدہ لکھتے ہوئے مندرجہ ذیل چھ مساوات

$$(13.137) \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} - \frac{\partial E_\phi}{\partial z} = -\mu \frac{\partial H_\rho}{\partial t}$$

$$(13.138) \quad \frac{\partial E_\rho}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial \rho} = -\mu \frac{\partial H_\phi}{\partial t}$$

$$(13.139) \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial (E_\phi \rho)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_\rho}{\partial \phi} = -\mu \frac{\partial H_z}{\partial t}$$

$$(13.140) \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} - \frac{\partial H_\phi}{\partial z} = \sigma E_\rho + \epsilon \frac{\partial E_\rho}{\partial t}$$

$$(13.141) \quad \frac{\partial H_\rho}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial \rho} = \sigma E_\phi + \epsilon \frac{\partial E_\phi}{\partial t}$$

$$(13.142) \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial (H_\phi \rho)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_\rho}{\partial \phi} = \sigma E_z + \epsilon \frac{\partial E_z}{\partial t}$$

حاصل ہوتے ہیں جن کے ساتھ بار سے خالی $\rho_h = 0$ خطے میں پھیلاؤ کے دو مساوات

$$(13.143) \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\rho E_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

$$(13.144) \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\rho H_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0$$

شامل کرتے ہیں۔

مساوات 13.137 تا مساوات 13.144 کو وقت کے ساتھ اور z فاصلے کے ساتھ سائن نما تعلق کا پابند ($E_\phi = E_1 e^{j\omega t - \gamma z}$) بناتے ہوئے

$$(13.145) \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} + \gamma E_\phi - Z H_\rho = 0$$

$$(13.146) \quad -\gamma E_\rho - \frac{\partial E_z}{\partial \rho} - Z H_\phi = 0$$

$$(13.147) \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial (E_\phi \rho)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_\rho}{\partial \phi} - Z H_z = 0$$

$$(13.148) \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} + \gamma H_\phi - Y E_\rho = 0$$

$$(13.149) \quad -\gamma H_\rho - \frac{\partial H_z}{\partial \rho} - Y E_\phi = 0$$

$$(13.150) \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial (H_\phi \rho)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_\rho}{\partial \phi} - Y E_z = 0$$

$$(13.151) \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\rho E_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

$$(13.152) \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\rho H_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_\phi}{\partial \phi} - \gamma H_z = 0$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

$$Z = -j\omega\mu \quad (\Omega/m) \quad \text{سلسلہ وار رکاوٹ}$$

$$Y = \sigma + j\omega\epsilon \quad (S/m) \quad \text{متوازی فراوانی}$$

$$\gamma = \alpha + j\beta \quad \text{حرکی مستقل}$$

ہیں۔

یہاں ہم عرضی برقی یا عرضی مقناطیسی موج منتخب کرتے ہوئے آگے بڑھ سکتے ہیں۔ ہم TE_{mn} منتخب کرتے ہوئے

آگے بڑھتے ہیں۔ یوں $E_z = 0$ ہو گا جس سے

$$(13.153) \quad \gamma E_\phi - Z H_\rho = 0$$

$$(13.154) \quad -\gamma E_\rho - Z H_\phi = 0$$

$$(13.155) \quad \frac{E_\phi}{\rho} + \frac{\partial E_\phi}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_\rho}{\partial \phi} - Z H_z = 0$$

$$(13.156) \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} + \gamma H_\phi - Y E_\rho = 0$$

$$(13.157) \quad -\gamma H_\rho - \frac{\partial H_z}{\partial \rho} - Y E_\phi = 0$$

$$(13.158) \quad \frac{H_\phi}{\rho} + \frac{\partial H_\phi}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_\rho}{\partial \phi} = 0$$

$$(13.159) \quad \frac{E_\rho}{\rho} + \frac{\partial E_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_\phi}{\partial \phi} = 0$$

$$(13.160) \quad \frac{H_\rho}{\rho} + \frac{\partial H_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_\phi}{\partial \phi} - \gamma H_z = 0$$

حاصل ہوتا ہے جہاں مساوات 13.147 میں $\frac{\partial(E_\phi \rho)}{\partial \rho}$ تفرق کو کھول کر $E_\phi + \rho \frac{\partial E_\phi}{\partial \rho}$ لکھا گیا ہے۔ ایسا ہی بقایا تفرق کے ساتھ بھی کیا گیا ہے۔

تمام میدان کو H_z کی صورت میں لکھنے کی خاطر مساوات 13.153 اور مساوات 13.154 سے عرضی موج کی رکاوت $Z_{\rho\phi}$

$$(13.161) \quad Z_{\rho\phi} = \frac{E_\rho}{H_\phi} = -\frac{E_\phi}{H_\rho} = -\frac{Z}{\gamma} = \frac{j\omega\mu}{\gamma}$$

لیتے ہیں۔ مساوات 13.161 سے E_ρ مساوات 13.156 میں پر کرتے ہوئے H_ϕ کے لئے حل کرتے ہوئے

$$(13.162) \quad H_\phi = -\frac{1}{\gamma - Y Z_{\rho\phi}} \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \phi}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح مساوات 13.161 سے E_ϕ مساوات 13.157 میں پر کرتے ہوئے H_ρ کے لئے حل کرتے ہوئے

$$(13.163) \quad H_\rho = -\frac{1}{\gamma - Y Z_{\rho\phi}} \frac{\partial H_z}{\partial \rho}$$

حاصل ہوتا ہے۔ مندرجہ بالا دو مساوات اور مساوات 13.161 سے

$$(13.164) \quad E_\rho = -\frac{Z_{\rho\phi}}{\gamma - YZ_{\rho\phi}} \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \phi}$$

$$(13.165) \quad E_\phi = \frac{Z_{\rho\phi}}{\gamma - YZ_{\rho\phi}} \frac{\partial H_z}{\partial \rho}$$

لکھے جاسکتے ہیں۔ یہ مساوات تمام میدان کو H_z کی صورت میں بیان کرتے ہیں۔

مساوات 13.164 کا ϕ تفرق، مساوات 13.165 کا ρ تفرق اور مساوات 13.165 کو مساوات 13.155 میں پر کرتے ہوئے

$$(13.166) \quad \frac{Z_{\rho\phi}}{\gamma - YZ_{\rho\phi}} \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \rho} + \frac{Z_{\rho\phi}}{\gamma - YZ_{\rho\phi}} \frac{\partial^2 H_z}{\partial \rho^2} + \frac{Z_{\rho\phi}}{\gamma - YZ_{\rho\phi}} \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial \phi^2} - ZH_z = 0$$

موج کی مقداری مساوات حاصل ہوتی ہے۔ اس میں

$$(13.167) \quad \frac{Z(\gamma - YZ_{\rho\phi})}{Z_{\rho\phi}} = -k^2$$

یعنی

$$(13.168) \quad k^2 = \gamma^2 + YZ$$

لکھتے ہوئے

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial \phi^2} + k^2 H_z = 0$$

یا

$$(13.169) \quad \rho^2 \frac{\partial^2 H_z}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial H_z}{\partial \rho} + k^2 \rho^2 H_z = -\frac{\partial^2 H_z}{\partial \phi^2}$$

حاصل ہوتا ہے جس میں

$$(13.170) \quad H_z(\rho, \phi) = M(\rho)N(\phi)$$

لکھ کر متغیرات کی علیحدگی ممکن ہے۔ ایسا کرتے ہوئے

$$\rho^2 N \frac{\partial^2 M}{\partial \rho^2} + \rho N \frac{\partial M}{\partial \rho} + k^2 \rho^2 MN = -M \frac{\partial^2 N}{\partial \phi^2}$$

حاصل ہوتا ہے۔ دونوں اطراف کو MN سے تقسیم کرتے ہوئے

$$\frac{\rho^2}{M} \frac{\partial^2 M}{\partial \rho^2} + \frac{\rho}{M} \frac{\partial M}{\partial \rho} + k^2 \rho^2 = -\frac{1}{N} \frac{\partial^2 N}{\partial \phi^2}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں بائیں ہاتھ کا متغیر ρ ہے جبکہ دائیں ہاتھ کا متغیر ϕ ہے۔ یوں دونوں اطراف کو مستقل n^2 کے برابر پر کیا جاسکتا ہے یعنی

$$(13.171) \quad \frac{\rho^2}{M} \frac{\partial^2 M}{\partial \rho^2} + \frac{\rho}{M} \frac{\partial M}{\partial \rho} + k^2 \rho^2 = n^2$$

$$(13.172) \quad -\frac{1}{N} \frac{\partial^2 N}{\partial \phi^2} = n^2$$

مندرجہ بالا میں ٹیگی مساوات کا حل

$$(13.173) \quad N = c_1 \cos n\phi + c_2 \sin n\phi$$

ہے جہاں c_1 اور c_2 مساوات کے مستقل ہیں۔

مساوات 13.171 کو

$$(13.174) \quad \rho^2 \frac{\partial^2 M}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial M}{\partial \rho} + (k^2 \rho^2 - n^2) M = 0$$

لکھا جاسکتا ہے جو بیسل مساوات¹⁸ کہلاتی ہے اور جس کا حل

$$(13.175) \quad M = c_3 J_n(k\rho) + c_4 N_n(k\rho)$$

لکھا جاتا ہے جہاں c_3 اور c_4 مساوات کے مستقل ہیں۔

یوں مساوات 13.170 سے

$$(13.176) \quad H_z = [c_3 J_n(k\rho) + c_4 Y_n(k\rho)] (c_1 \cos n\phi + c_2 \sin n\phi)$$

حاصل ہوتا ہے جس پر مندرجہ ذیل دو عدد سرحدی شرائط لاگو کرتے ہوئے مساوات کے مستقل حاصل کئے جاسکتے ہیں۔

¹⁸Bessel's equation

کائنات میں کہیں پر بھی لامحدود میدان نہیں پایا جاتا لہذا نکلے موج میں بھی میدان کی قیمت محدود ہوگی۔ اس کے علاوہ موصل نکلے سطح پر برقی میدان صفر ہوگا، یعنی $(E_\phi(\rho_0) = 0)$ ، جہاں نکلے کا رداس ρ_0 کے برابر ہے۔

پہلے شرط کے تحت نکلے محد میں میدان کی قیمت محدود ہے، لیکن $\rho = 0$ پر $Y_n \rightarrow \infty$ کی قیمت لامحدود ہوتی ہے لہذا مساوات 13.176 میں

$$(13.177) \quad c_4 = 0$$

ہوگا۔ اگر $c_2 = 0$ ہو تب میدان کی چوٹی $\phi = 0^\circ$ پر ہوگی اور اگر $c_1 = 0$ ہو تب میدان کی چوٹی $\phi = 90^\circ$ پر ہوگی۔ کسی اور زاویے پر چوٹی کی صورت میں دونوں مستقل پائے جائیں گے۔ ہم چوٹی کو صفر زاویے پر تصور کرتے ہیں۔ یوں

$$(13.178) \quad H_z = H_0 \cos n\phi J_n(k\rho)$$

ہوگا جہاں $c_1 c_3 = H_0$ لکھا گیا ہے۔ اب چونکہ $\phi = 0$ اور $\phi = 2\pi$ ریڈین نکلے موج میں ایک ہی نقطے کو ظاہر کرتے ہیں لہذا دونوں زاویوں سے میدان برابر حاصل ہونا چاہیے۔ یوں

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

حاصل ہوتا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $n = 1$ کی صورت میں نکلے میں $\phi = 0$ تا $\phi = 2\pi$ یعنی ایک چکر کاٹتے ہوئے H_z کی موج بوجہ $\cos n\phi$ کے ایک چکر کاٹے گا۔ اسی طرح $n = 2$ کی صورت میں نکلے کے گرد ایک چکر کاٹتے ہوئے میدان دو چکر کاٹتا ہے۔ یوں نکلے کے گرد ایک چکر کاٹتے ہوئے میدان کے چکر کی تعداد n دیتا ہے۔

نکلے موج میں موج کی مساوات

$$(13.179) \quad H_z = H_0 \cos n\phi J_n(k\rho) e^{j\omega t - \gamma z} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

ہوگی جہاں میدان کا وقت اور فاصلے کے ساتھ سائن نما تبدیلی کو بھی شامل کیا گیا ہے۔ اس کو مساوات 13.165 میں پر کرتے ہوئے

$$(13.180) \quad E_\phi = \frac{Z_{\rho\phi}}{\gamma - YZ_{\rho\phi}} H_0 \cos n\phi \frac{dJ_n(k\rho)}{d\rho} e^{j\omega t - \gamma z}$$

حاصل ہوتا ہے۔ دوسری سرحدی شرط کے تحت موصل نکلے سطح پر متوازی برقی میدان صفر ہوگا لہذا مساوات 13.180 میں ρ_0 پر $E_\rho = 0$ پر کرتے ہوئے

$$(13.181) \quad \left. \frac{dJ_n(k\rho)}{d\rho} \right|_{\rho_0} = 0$$

حاصل ہوتا ہے جس سے

$$(13.182) \quad k\rho_0 = \alpha'_{nm}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں α'_{nm} بیسل تفاعل کے تفرق کے صفر کہلاتے ہیں یعنی

$$(13.183) \quad \frac{dJ_n(\alpha'_{nm})}{d\rho} = 0$$

مساوات 13.182 سے حاصل k کو k'_{nm} لکھتے ہوئے یوں

$$(13.184) \quad k'_{nm} = \frac{\alpha'_{nm}}{\rho_0} \quad (m = 1, 2, 3, \dots)$$

حاصل ہوتا ہے۔

مساوات 13.184 کو استعمال کرتے ہوئے یوں

$$(13.185) \quad H_z = H_0 \cos n\phi J_n(k'_{nm}\rho) e^{j\omega t - \gamma z}$$

حاصل ہوتا ہے جسے مساوات 13.162 تا مساوات 13.165 میں پر کرتے ہوئے بقایا تمام میدان

$$(13.186) \quad H_\phi = \frac{1}{\gamma - YZ_{\rho\phi}} \frac{n}{\rho} H_0 \sin n\phi J_n(k'_{nm}\rho) e^{j\omega t - \gamma z}$$

$$(13.187) \quad H_\rho = -\frac{1}{\gamma - YZ_{\rho\phi}} H_0 \cos n\phi \frac{dJ_n(k'_{nm}\rho)}{d\rho} e^{j\omega t - \gamma z}$$

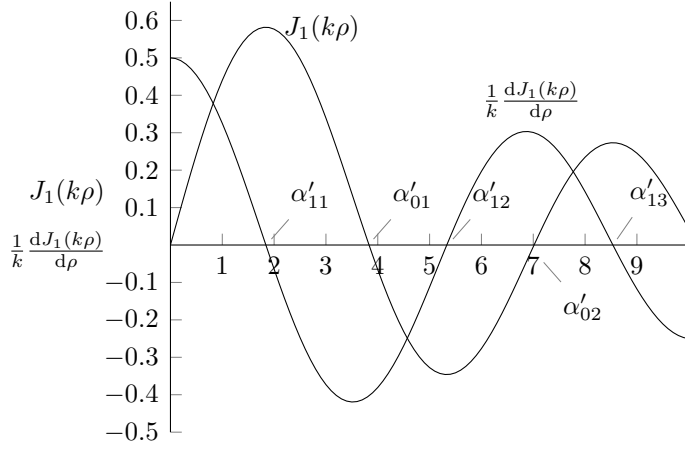
$$(13.188) \quad E_\rho = -\frac{Z_{\rho\phi}}{\gamma - YZ_{\rho\phi}} \frac{n}{\rho} H_0 \sin n\phi J_n(k'_{nm}\rho) e^{j\omega t - \gamma z}$$

$$(13.189) \quad E_\phi = \frac{Z_{\rho\phi}}{\gamma - YZ_{\rho\phi}} H_0 \cos n\phi \frac{dJ_n(k'_{nm}\rho)}{d\rho} e^{j\omega t - \gamma z}$$

$$(13.190) \quad E_z = 0$$

حاصل ہوتے ہیں جہاں E_z بھی شامل کیا گیا ہے۔

آئیں k'_{nm} کو سمجھیں۔ اگر $n = 1$ ہو تب بیسل تفاعل J_1 اور اس کا تفرق $\frac{dJ_1}{d\rho}$ استعمال کئے جائیں گے۔ $\frac{dJ_1}{d\rho}$ کے پہلے تین صفر $\alpha'_{11} = 1.84$ ، $\alpha'_{12} = 5.33$ اور $\alpha'_{13} = 8.54$ ہیں جو بالترتیب TE_{11} ، TE_{12} اور TE_{13} بلنڈ



شکل 13.14: بیسل تفاعل۔

عرضی برقی امواج کے مستقل ہیں۔ شکل 13.14 میں انہیں دکھایا گیا ہے۔ اسی طرح TE_{01} اور TE_{02} میں $n = 0$ ہے جبکہ $\alpha'_{01} = 3.832$ اور $\alpha'_{02} = 7.016$ ہیں۔ بیسل تفاعل کے تفرق $\frac{dJ_0}{d\rho}$ اور J_1 کے صفر عین برابر ہوتے ہیں۔ شکل میں یوں $\frac{dJ_0}{d\rho}$ کے صفر کو J_1 کے صفر سے حاصل کیا گیا دکھایا گیا ہے۔

کابل ذو برق کی صورت میں $\sigma = 0$ لیتے ہوئے مساوات 13.184 کو مساوات 13.168 میں پر کرنے سے

$$\left(\frac{\alpha'_{nm}}{\rho_0}\right)^2 = \gamma^2 + \omega^2\mu\epsilon$$

یا

$$(13.191) \quad \gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{\left(\frac{\alpha'_{nm}}{\rho_0}\right)^2 - \omega^2\mu\epsilon}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس مساوات سے تین صورتیں ممکن ہیں۔

- کم تعدد پر حقیقی γ ہو گا لہذا موج غیر شفاف ہو گا اور موج اس میں صفر نہیں کر پائے گی۔
- مخصوص درمیانے تعدد پر $\gamma = 0$ حاصل ہو گا۔ یہ انتظامی تعدد ہو گی۔

• بلند تعدد پر γ خیالی عدد ہو گا لہذا موج شفاف ہو گا اور موج اس میں صفر کر پائے گی۔

مساوات 13.191 کو صفر کے برابر پر کرنے سے انقطاعی تعدد

$$(13.192) \quad f_c = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}} \frac{k'_{nm}}{\rho_0} \quad (\text{Hz})$$

اور انقطاعی طول موج

$$(13.193) \quad \lambda_{0c} = \frac{2\pi\rho_0}{k'_{nm}} \quad (\text{m})$$

حاصل ہوتے ہیں۔ یوں TE_{11} کے لئے $\alpha'_{11} = 1.84$ سے $\lambda_{0c} = \frac{2\pi\rho_0}{1.84} = 3.41\rho_0$ حاصل ہو گا۔

انقطاعی تعدد سے زیادہ تعدد پر γ خیالی ہو گا لہذا اسے

$$(13.194) \quad \beta = \sqrt{\omega^2\mu\epsilon - \left(\frac{\alpha'_{nm}}{\rho_0}\right)^2} \quad (\text{rad/m})$$

لکھا جائے گا۔ مندرجہ بالا دو مساوات کو ملا کر z سمت میں موج میں طول موج

$$(13.195) \quad \lambda_g = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2}} \quad (\text{m})$$

حاصل ہوتی ہے جہاں

λ_0 موج کے ذو برق سے بھرے لامحدود خطے میں طول موج اور

λ_{0c} انقطاعی طول موج

ہیں۔ موج میں دوری رفتار $v_p = f\lambda_g$

$$(13.196) \quad v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{v_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2}} \quad (\text{m/s})$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

$$v_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$$

ہے۔

مساوات 13.195 اور مساوات 13.196 ہو بہو مستطیلی موج کے مساوات ہیں۔ یہی مساوات ہر شکل کے کھوکھلے موج کے لئے درست ثابت ہوتے ہیں۔

بیسل تفاعل کے صفر برابر فاصلوں پر نہیں پائے جاتے لہذا ٹنگی موج میں ممکنہ بلند انداز امواج برابر تعدد کے فاصلے پر نہیں پائے جاتے۔ اس کے برعکس مستطیلی موج میں یہ بلند انداز امواج برابر تعدد کے فاصلوں پر پائے جاتے ہیں۔ ٹنگی موج میں TE₁₁ تمام امواج، بشمول TM_{nm}، سے کم انقطاعی تعدد رکھتی ہے لہذا اسے غالب بلند درجی انداز¹⁹ کہتے ہیں۔ TE₀₁ بلند درجی انداز نہایت کم تضعیف کا حامل ہے لہذا کم موصلیت کے چادر کی بنی موج میں اس کی اہمیت مزید بڑھ جاتی ہے۔

13.6 انقطاعی تعدد سے کم تعدد پر تضعیف

ہم دیکھ چکے ہیں کہ انقطاعی تعدد سے کم تعدد کی موج تضعیف کا شکار ہوتی ہے اور یہ موج میں صفر کے قابل نہیں ہوتی۔ آئیں تضعیف کی مقدار کا حساب لگائیں۔ مستطیلی موج میں مساوات 13.127

$$(13.197) \quad \alpha = \sqrt{k^2 - \beta_0^2} = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{z_1}\right)^2 - \left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\right)^2}$$

انقطاعی تعدد سے کم تعدد پر تضعیفی مستقل دیتا ہے جسے مساوات 13.131 کی مدد سے

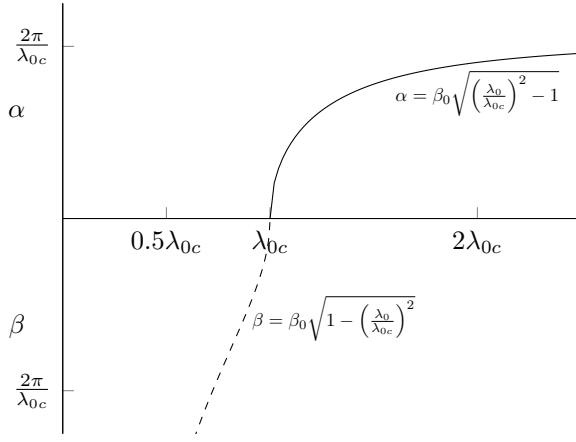
$$(13.198) \quad \alpha = \frac{2\pi}{\lambda_0} \sqrt{\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2 - 1} = \beta_0 \sqrt{\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2 - 1} \quad (\text{Np/m})$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں

λ_0 لا محدود خطے میں طول موج اور

λ_{0c} انقطاعی طول موج

dominant mode¹⁹



شکل 13.15: حرکی مستقل بالمقابل طول موج۔ انقطاعی طول موج سے کم طول موج پر تضعیفی مستقل صفر ہے جبکہ اس سے زیادہ طول موج پر زاویائی مستقل صفر ہے۔

ہیں۔ مساوات 13.198 ہر قسم کے شکل کے کھوکھلے موج کے لئے درست ہے۔

انقطاعی تعدد سے بہت کم تعدد ($\lambda_0 \gg \lambda_{0c}$) کی صورت میں مساوات 13.198 سے

$$(13.199) \quad \alpha \approx \frac{2\pi}{\lambda_{0c}} \text{ Np/m}$$

$$(13.200) \quad = \frac{2\pi \times 8.69}{\lambda_{0c}} = \frac{54.6 \text{ dB}}{\lambda_{0c} \text{ m}}$$

حاصل ہوتا ہے۔ شکل 13.15 میں تضعیفی مستقل α بالمقابل لامحدود خطے میں طول موج λ_0 کو ٹھوس خط سے دکھایا گیا ہے۔ انقطاعی طول موج سے کم طول موج پر $\alpha = 0$ ہے۔

مثال 13.1: ایک موج کا انقطاعی طول موج $\lambda_{0c} = 50 \text{ mm}$ ہے۔ اس موج میں $\lambda_0 = 2 \text{ m}$ کے موج کی فی میٹر صفر کے دوران تضعیف دریافت کریں۔

حل: چونکہ $\lambda_0 \gg \lambda_{0c}$ ہے لہذا

$$\alpha = \frac{2\pi}{50 \times 10^{-3}} = 125.68 \text{ Np/m} \quad \left(1092 \frac{\text{dB}}{\text{m}}\right)$$

ہو گا۔ یوں موج میں بہت کم فاصلے پر موج کی قیمت انتہائی گھٹ جائے گی۔

13.7 انقطاعی تعدد سے بلند تعدد پر تضعیف

کامل موصل چادر سے بنا اور کامل ذو برق سے بھرا موج بے ضیاع ہوتا ہے لہذا انقطاعی تعدد سے زیادہ تعدد پر $\alpha = 0$ ہو گا۔ مساوات 13.128 سے

$$\begin{aligned}\beta &= \sqrt{\beta_0^2 - k^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\right)^2 - \left(\frac{2\pi}{\lambda_{0c}}\right)^2} \\ &= \frac{2\pi}{\lambda_0} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2}\end{aligned}$$

یا

$$(13.201) \quad \beta = \beta_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2}$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 13.201 ہر قسم کے شکل کے کھوکھلے موج کے لئے درست ہے۔ شکل 13.15 میں نقطہ دار خط سے β دکھایا گیا ہے۔ انقطاعی طول موج سے زیادہ طول موج پر $\beta = 0$ ہے۔

شکل 13.15 میں طول موج کو افقی محور اور حرکی مستقل کو عمودی محور پر رکھا گیا ہے۔ عین انقطاعی طول موج λ_{0c} پر $\gamma = 0$ یعنی $\alpha = 0$ اور $\beta = 0$ ہیں۔ انقطاعی طول موج سے کم طول موج پر $\alpha = 0$ رہتا ہے جبکہ β کی قیمت طول موج کم کرنے سے لامحدود قیمت کی جانب بڑھتی ہے۔ انقطاعی طول موج سے زیادہ طول موج پر $\beta = 0$ رہتا ہے جبکہ α کی قیمت $\frac{2\pi}{\lambda_{0c}}$ تک پہنچنے کی کوشش کرتی ہے۔

حقیقی موج کامل نہیں ہوتے لہذا ان میں α صفر نہیں ہوتا۔ بہتر موصل، مثلاً تانبہ، کی چادر سے بنے اور ہوا سے بھرے موج میں α کی قیمت نہایت کم ہوتی ہے جبکہ β مندرجہ بالا مساوات کے عین مطابق ہوتا ہے۔ آئیں حقیقی موج میں α کی قیمت حاصل کریں۔

صفحہ 468 پر مساوات 10.56

$$\mathcal{P}_{\text{اوسط}} = \frac{1}{2} [E_s \times H_s^*]_{\text{حقیقی}}$$

موج کی اوسط طاقت دیتی ہے۔ کسی بھی موج میں میدان، مثلاً صفحہ 667 پر مساوات 13.85، میں حرکت کرتے میدان $e^{-\alpha x} e^{j(\omega t - \beta x)}$ خاصیت رکھتے ہیں۔ یوں $\frac{E}{H} = Z$ لیتے ہوئے

$$(13.202) \quad \mathcal{P}_{\text{اوسط}} = \frac{1}{2} \frac{|E|^2}{Z_h} e^{-2\alpha x} = \frac{1}{2} Z_h |H|^2 e^{-2\alpha x} = P_0 e^{-2\alpha x}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں $x = 0$ پر اوسط طاقت P_0 کے برابر ہے، قدرتی رکاوٹ Z کے حقیقی جزو کو Z_h اور $E \times H^* = |E|^2$ لکھے گئے ہیں۔ اس مساوات سے

$$(13.203) \quad \alpha = -\frac{1}{2} \frac{dP}{dx} \quad (\text{Np/m})$$

حاصل ہوتا ہے جہاں اوسط \mathcal{P} کو P لکھا گیا ہے۔ مساوات 13.203 میں کسی بھی نقطے پر x سمت میں P طاقت منتقل ہو رہا ہے جبکہ اسی نقطے پر $-\frac{dP}{dx}$ طاقت کے ضیاع کو ظاہر کرتا ہے۔ تضعیفی مستقل کی اس مساوات میں طاقت کا ضیاع، موج کی دیواروں میں پیدا برقی رو سے مزاحمتی برقی ضیاع ($I^2 R_c$) ہے جو حرارت میں تبدیل ہوتا ہے۔ انقطاعی تعدد سے کم تعدد پر موج کے تضعیفی مستقل پر طاقت کا ضیاع عمل درآمد نہیں ہوتا۔ انقطاعی تعدد سے کم تعدد پر امواج نہ گزارنے کی معزوری کو α سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ ایسی صورت میں موج میں موج نہیں گزر پاتی بلکہ یہ انعکاس پذیر ہوتی ہے۔

مساوات 13.203 کو یوں پڑھا جا سکتا ہے

$$\alpha = \frac{\text{طاقت کا ضیاع فی اکائی لمبائی}}{\text{منتقل طاقت کا دگنا}}$$

کابل ذو برق سے بھرے موج میں ذو برق کا ضیاع صفر ہو گا۔ ایسی صورت میں صرف موج کے چادروں میں مزاحمتی ضیاع پایا جائے گا لہذا اکائی لمبائی میں طاقت کا ضیاع

$$(13.204) \quad -\frac{dP}{dx} = \frac{1}{dx} \int \int \mathcal{P}_{\text{چادر}} dS = \int \mathcal{P}_{\text{چادر}} dl$$

ہو گا جہاں چادر \mathcal{P} سے مراد وہ اوسط طاقت (وقت کے مطابقت سے اوسط) ہے جو موج کے دیواروں کے موصل چادروں میں منتقل ہو رہا ہے۔ مساوات 13.204 میں سطح کا چھوٹا رقبہ dS موج کے اندرونی سطح پر لیا جاتا ہے۔ اس رقبے کی لمبائی dx اور چوڑائی dl ہے جہاں l اندرونی سطح پر ایک چکر کے برابر ہے۔ شکل 13.9 کے مستطیلی موج کی صورت میں $l = 2(y_1 + z_1)$ کے برابر ہو گا۔ مخلوط پوائنٹنگ سمتیہ سے موصل چادر میں منتقل طاقت کو

$$(13.205) \quad \mathcal{P}_{\text{چادر}} = \frac{1}{2} Z_{c,h} |H_m|^2$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں H_m چادر کے متوازی میدان اور $Z_{c,h}$ چادر کے موصل کا قدرتی رکاوٹ ہے جس کا حقیقی جزو $Z_{c,h}$ ہے۔ چادر کے متوازی میدان کی حتمی قیمت $|H_m|$ ہے۔ چونکہ موصل میں $\sigma \gg j\omega\epsilon$ ہوتا ہے لہذا

$$Z_c = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}} \approx \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma}} = (1 + j) \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}$$

ہو گا جس سے

$$Z_{c,h} = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}$$

حاصل ہوتا ہے۔ یوں مساوات 13.204 کو

$$(13.206) \quad -\frac{dP}{dx} = \frac{Z_{c,h}}{2} \int |H_m|^2 dl$$

لکھا جا سکتا ہے۔

موج میں کسی بھی نقطے پر لمبائی کے جانب منتقل طاقت کو

$$(13.207) \quad P = \frac{Z_{yz,h}}{1} \iint |H_{\perp}|^2 dS$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں H_{\perp} سے مراد وہ میدان ہے جو موج کے حرکت کے عمودی ہے۔ اس میدان کو موج کے سطح عمودی تراش کے متوازی بھی لکھا جا سکتا ہے۔ اس مساوات میں Z_{yz} موج کا قدرتی رکاوٹ ہے جس کے حقیقی جزو کو $Z_{yz,h}$ لکھا گیا ہے۔ اس طرح تضعیفی مستقل کو

$$(13.208) \quad \alpha = \frac{Z_{c,h} \int |H_m|^2 dl}{2Z_{yz,h} \iint |H_{\perp}|^2 dS} \quad (\text{Np/m})$$

لکھا جا سکتا ہے۔

مساوات 13.208 تمام موج کے تمام بلند انداز کے لئے درست ہے۔ کسی بھی بلند انداز کا تضعیفی مستقل حاصل کرتے وقت اسی بلند انداز کے میدان مساوات 13.208 میں پر کئے جائیں گے۔ بہتر موصل سے بنے موج کی صورت میں کامل موصل کے لئے حاصل کردہ میدان ہی استعمال کئے جاتے ہیں۔ مساوات 13.208 کا استعمال مندرجہ ذیل مثال میں دکھایا گیا ہے۔

مثال 13.2: دو متوازی چادروں کے موج کو صفحہ 645 پر شکل 13.1 میں دکھایا گیا ہے۔ اس موج میں 450 Hz کے TEM موج کا تضعیفی مستقل حاصل کریں۔ چادروں کے درمیان فاصلہ 20 cm ہے۔

حل: مساوات 13.208 سے

$$\alpha = \frac{2Z_{c,h} \int_0^{y_1} |H_m|^2 dy}{2Z_{yz,h} \int_0^{y_1} \int_0^{z_1} |H_{\perp}|^2 dz dy}$$

لکھا جائے گا جہاں کسر کے بالائی حصے میں دونوں اطراف کے چادروں میں طاقت کے ضیاع کی وجہ سے ضرب دو لکھا گیا ہے۔ اس موج میں TEM موج کے میدان حرکت کے سمت کے عمودی اور چادروں کے متوازی ہیں۔ یوں مقتناطیسی میدان H_{ay} ہے جو چادروں کے متوازی اور موج کے حرکت کے عمودی ہے۔ یوں H_m اور H_{\perp} دونوں H_{ay} ہی ہیں لہذا

$$\alpha = \frac{Z_{c,h} y_1}{Z_{yz,h} y_1 z_1} = \frac{Z_{c,h}}{z_1 Z_{yz,h}}$$

ہو گا۔ تانبے میں 450 MHz پر

$$\begin{aligned} Z_c &= \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}} \\ &= \sqrt{\frac{j2 \times \pi \times 450 \times 10^6 \times 4 \times \pi \times 10^{-7}}{5.8 \times 10^7 + j2 \times \pi \times 450 \times 10^6 \times 8.854 \times 10^{-12}}} \\ &= 0.0055 + j0.0055 \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے جس کا حقیقی جزو $Z_{c,h} = 0.0055$ اوہم ہے۔ ہوا کے لئے $Z_{yz,h} = Z_{yz} = 376.7 \Omega$ ہے۔ ان نتائج کے تحت

$$\alpha = \frac{0.0055}{0.2 \times 376.7} = 73 \mu\text{Np/m}$$

ہو گا۔ یوں ایک کلو میٹر فاصلہ طے کرنے پر میدان کی قیمت ابتدائی قیمت کے $e^{-0.073} = 0.9296$ یعنی 92.96 فی صد ہو گی۔

مثال 13.3: تانبے کی وسیع چادر کے متوازی 2 cm چوڑائی تانبے کی پٹی 1 mm کے فاصلے پر پائی جاتی ہے۔ پٹی اور چادر کے درمیان $\epsilon_R = 2.7$ کا ذو برق بھرا گیا ہے۔ اس ذو برق میں $E_{\text{موثر}} = 200 \frac{\text{mV}}{\text{m}}$ برقی شدت اور 600 MHz تعدد کی TEM موج پائی جاتی ہے۔ الف) اوسط منتقل طاقت دریافت کریں۔ ب) فی میٹر فاصلہ طے کرتے ہوئے تانبے میں کل توانائی کا ضیاع دریافت کریں۔ پ) تضعیفی مستقل حاصل کریں۔

حل: ذو برق اور تانبے کے قدرتی رکاوٹ بالترتیب

$$Z_z = \frac{\mu_0}{2.7\epsilon_0} = 227 \Omega$$

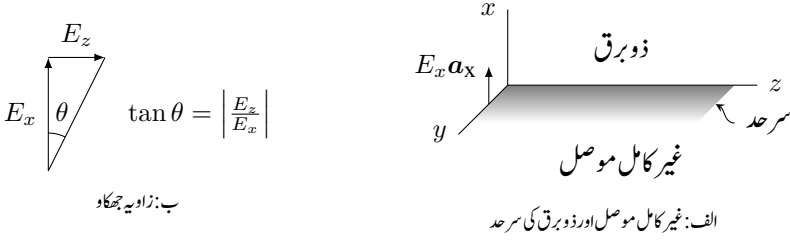
$$Z_c = \sqrt{\frac{j2 \times \pi \times 600 \times 10^6 \times 4 \times \pi \times 10^{-7}}{5.8 \times 10^7 + j2 \times \pi \times 600 \times 10^6 \times 8.854 \times 10^{-12}}} = 0.00639(1 + j) \Omega$$

ہیں۔ برقی میدان تانبے کے عمودی ہو گا لہذا تانبے کے متوازی مقناطیسی میدان کی موثر قیمت

$$H_{\text{موثر}} = \frac{E_{\text{موثر}}}{Z_z} = \frac{0.2}{227} = 0.881 \frac{\text{mA}}{\text{m}}$$

ہو گی۔ موج کا رقبہ عمودی تراش $S = 2 \text{ cm} \times 1 \text{ mm}$ ہے۔ یوں منتقل طاقت

$$P_{\text{منتقل}} = \frac{E^2}{2Z_z} S = \frac{E_{\text{موثر}}}{Z_z} S = \frac{0.2^2}{227} \times 0.02 \times 0.001 = 3.49 \text{ nW}$$



شکل 13.16: دو خطوں کے سرحد پر امواج۔

ہو گا جبکہ تانبے کی پٹی اور تانبے کی چادر میں پٹی کے برابر حصے میں مل کر کل طاقت کا ضیاع

$$\begin{aligned}
 P_{\text{ضیاع}} &= 2 \frac{Z_{c,h} H^2}{2} S = 2 Z_{c,h} H^2 S \\
 &= 2 \times 0.00639 \times (0.881 \times 10^{-3})^2 \times 0.02 \times 0.001 \\
 &= 0.195 \frac{\text{nW}}{\text{m}}
 \end{aligned}$$

ہو گا۔ اس طرح تضعیفی مستقل

$$\alpha = \frac{0.195 \times 10^{-9}}{3.49 \times 10^{-9}} = 55 \frac{\text{mNp}}{\text{m}} \quad \left(0.48 \frac{\text{dB}}{\text{m}} \right)$$

حاصل ہوتا ہے۔

13.8 سطحی موج

غیر کامل موصل اور ذو برق کی سطح شکل 13.16-الف میں $x = 0$ پر دکھائی گئی ہے۔ سطح کے نیچے ($x < 0$) غیر کامل موصل جبکہ اس کے اوپر ($x > 0$) ذو برق ہے۔ سطح کے ساتھ ساتھ TEM موج z سمت میں حرکت کر رہی ہے۔ آپس میں اس مسئلے کو حل کریں۔

اس مسئلے کو حل کرتے ہوئے تصور کیا جائے گا کہ موج میں y کے تبدیلی سے کوئی تبدیلی رو نما نہیں ہوتی۔ یوں $\frac{\partial}{\partial y} = 0$ ہو گا۔ چونکہ موج z سمت حرکت کر رہی ہے لہذا تمام میدان

$$(13.209) \quad H = H_0 e^{j\omega t - \gamma z}$$

خاصیت رکھتے ہیں۔ ان حقائق کو استعمال کرتے ہوئے، سطح سے اوپر ذو برق میں مساوات 13.16 تا مساوات 13.23 مندرجہ ذیل صورت اختیار کر لیتے ہیں

$$(13.210) \quad \gamma_1 E_y + j\omega\mu_1 H_x = 0$$

$$(13.211) \quad -\gamma_1 E_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} + j\omega\mu_1 H_y = 0$$

$$(13.212) \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} + j\omega\mu_1 H_z = 0$$

$$(13.213) \quad \gamma_1 H_y - j\omega\epsilon_1 E_x = 0$$

$$(13.214) \quad -\gamma_1 H_x - \frac{\partial H_z}{\partial x} - j\omega\epsilon_1 E_y = 0$$

$$(13.215) \quad \frac{\partial H_y}{\partial x} - j\omega\epsilon_1 E_z = 0$$

$$(13.216) \quad \frac{\partial E_x}{\partial x} - \gamma_1 E_z = 0$$

$$(13.217) \quad \frac{\partial H_x}{\partial x} - \gamma_1 H_z = 0$$

جہاں زیر نوشت میں 1 سرحد سے اوپر ذو برق کے نخطے کو ظاہر کرتا ہے۔ مساوات 13.213 سے ذو برق کی قدرتی رکاوٹ Z_z

$$(13.218) \quad \frac{E_x}{H_y} = \frac{\gamma_1}{j\omega\epsilon_1} = Z_z$$

لکھی جاسکتی ہے۔ موج کی مقداری مساوات حاصل کرنے کی خاطر مساوات 13.213 سے E_x اور مساوات 13.215 سے E_z کو مساوات 13.211 میں پر کرتے ہوئے

$$-\frac{\gamma_1^2}{j\omega\epsilon_1} H_y - \frac{1}{j\omega\epsilon_1} \frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} + j\omega\mu_1 H_y = 0$$

یعنی

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} + (\gamma_1^2 + \omega^2\mu_1\epsilon_1) H_y = 0$$

یا

$$(13.219) \quad \frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} = k_1^2 H_y$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

$$(13.220) \quad k_1^2 = -(\gamma_1^2 + \omega^2 \mu_1 \epsilon_1)$$

کے برابر ہے۔ مساوات 13.219 کا حل

$$H_y = c_1 e^{-k_1 x} + c_2 e^{k_1 x}$$

ہے۔ ذو برق میں x کی قیمت 0 تا ∞ ممکن ہے۔ اس مساوات میں سرحد سے دور لامحدود فاصلے $\infty \rightarrow x$ پر میدان کی قیمت لامحدود حاصل ہوتی ہے جو ناقابل قبول نتیجہ ہے لہذا اسے رد کرتے ہوئے $c_2 = 0$ لیا جاتا ہے۔ اور یوں

$$(13.221) \quad H_y = c_1 e^{-k_1 x} e^{j\omega t - \gamma_1 z} \quad \text{ذو برق خطہ}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں موج کو مساوات 13.209 کے طرز پر لکھا گیا ہے۔

موصل خطے کے لئے میکس ویل کے مساوات مندرجہ ذیل ہیں۔

$$(13.222) \quad \gamma_2 E_y + j\omega \mu_2 H_x = 0$$

$$(13.223) \quad -\gamma_2 E_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} + j\omega \mu_2 H_y = 0$$

$$(13.224) \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} + j\omega \mu_2 H_z = 0$$

$$(13.225) \quad \gamma_2 H_y - (\sigma_2 + j\omega \epsilon_2) E_x = 0$$

$$(13.226) \quad -\gamma_2 H_x - \frac{\partial H_z}{\partial x} - (\sigma_2 + j\omega \epsilon_2) E_y = 0$$

$$(13.227) \quad \frac{\partial H_y}{\partial x} - (\sigma_2 + j\omega \epsilon_2) E_z = 0$$

$$(13.228) \quad \frac{\partial E_x}{\partial x} - \gamma_2 E_z = 0$$

$$(13.229) \quad \frac{\partial H_x}{\partial x} - \gamma_2 H_z = 0$$

موج کی مقداری مساوات حاصل کرنے کی خاطر مساوات 13.225 سے E_x اور مساوات 13.227 سے E_z کو مساوات 13.223 میں پر کرتے ہوئے

$$-\frac{\gamma_2^2}{\sigma_2 + j\omega \epsilon_2} H_y - \frac{1}{\sigma_2 + j\omega \epsilon_2} \frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} + j\omega \mu_2 H_y = 0$$

یعنی

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} + \left[\gamma_2^2 - j\omega\mu_2 (\sigma_2 + j\omega\epsilon_2) \right] H_y = 0$$

یا

$$(13.230) \quad \frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} = k_2^2 H_y$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

$$(13.231) \quad k_2^2 = -\gamma_2^2 + \gamma_m^2$$

$$(13.232) \quad \gamma_m^2 = j\omega\mu_2 (\sigma_2 + j\omega\epsilon_2)$$

کے برابر ہیں۔

مساوات 13.230 کا حل

$$H_y = c_3 e^{-k_2 x} + c_4 e^{k_2 x}$$

ہے۔ موصل میں x کی قیمت 0 تا $-\infty$ ممکن ہے۔ اس مساوات میں سرحد سے دور لامحدود فاصلے $-\infty \rightarrow x$ پر میدان کی قیمت لامحدود حاصل ہوتی ہے جو ناقابل قبول نتیجہ ہے لہذا اسے رد کرتے ہوئے $c_3 = 0$ لیا جاتا ہے اور یوں

$$(13.233) \quad H_y = c_4 e^{k_2 x} e^{j\omega t - \gamma_2 z} \quad \text{موصل خطہ}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں موج کو مساوات 13.209 کے طرز پر لکھا گیا ہے۔

مقتناطیسی سرحدی شرط کے تحت سرحد کے دونوں اطراف تمام اوقات متوازی مقتناطیسی میدان برابر ہوں گے لہذا $x = 0$ پر کسی بھی z پر تمام t کے لئے مساوات 13.221 اور مساوات 13.233 برابر ہوں گے جس سے

$$(13.234) \quad \gamma_1 = \gamma_2$$

$$(13.235) \quad c_1 = c_4 = H_{y0}$$

حاصل ہوتے ہیں جہاں مستقل c_1 اور مستقل c_4 کو H_{y0} لکھا گیا ہے۔ ان حقائق کو استعمال کرتے ہوئے ذو برق میں مساوات 13.213 سے E_x اور مساوات 13.215 سے E_z یوں حاصل ہوتے ہیں۔

$$(13.236) \quad E_x = \frac{\gamma_1 H_{y0}}{j\omega\epsilon_1} e^{-k_1 x} e^{j\omega t - \gamma_1 z}$$

$$E_z = \frac{-k_1 H_{y0}}{j\omega\epsilon_1} e^{-k_1 x} e^{j\omega t - \gamma_1 z} \quad \text{ذو برق خطہ}$$

اسی طرح ان حقائق کو استعمال کرتے ہوئے موصل میں مساوات 13.225 سے E_x اور مساوات 13.227 سے E_z یوں حاصل ہوتے ہیں

$$(13.237) \quad \begin{aligned} E_x &= \frac{\gamma_1 H_{y0}}{\sigma_2 + j\omega\epsilon_2} e^{k_2 x} e^{j\omega t - \gamma_1 z} \\ E_z &= \frac{k_2 H_{y0}}{\sigma_2 + j\omega\epsilon_2} e^{k_2 x} e^{j\omega t - \gamma_1 z} \quad \text{موصل خطہ} \end{aligned}$$

جہاں $c_4 = c_1 = H_{y0}$ اور $\gamma_2 = \gamma_1$ پر کئے گئے ہیں۔

سرحد کے دونوں اطراف متوازی برقی میدان برابر ہونے کی شرط سے $x = 0$ پر دونوں اطراف E_z برابر ہوں گے جس سے

$$\frac{-k_1}{j\omega\epsilon_1} = \frac{k_2}{\sigma_2 + j\omega\epsilon_2}$$

یعنی

$$(13.238) \quad k_1 = \frac{-j\omega\epsilon_1}{\sigma_2 + j\omega\epsilon_2} k_2$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 13.220 سے

$$\begin{aligned} \gamma_1^2 &= -\omega^2 \mu_1 \epsilon_1 - k_1^2 \\ &= -\omega^2 \mu_1 \epsilon_1 + \left(\frac{\omega\epsilon_1}{\sigma_2 + j\omega\epsilon_2} \right)^2 k_2^2 \\ &= -\omega^2 \mu_1 \epsilon_1 + \left(\frac{\omega\epsilon_1}{\sigma_2 + j\omega\epsilon_2} \right)^2 (-\gamma_2^2 + \gamma_m^2) \end{aligned}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں پہلے قدم پر مساوات 13.238 اور دوسرے قدم پر مساوات 13.231 کا استعمال کیا گیا ہے۔ اس میں مساوات 13.234 سے $\gamma_2 = \gamma_1$ پر کرتے ہوئے

$$(13.239) \quad \gamma_1 = \sqrt{\frac{-\omega^2 \mu_1 \epsilon_1 + \left(\frac{\omega\epsilon_1}{\sigma_2 + j\omega\epsilon_2} \right)^2 \gamma_m^2}{1 + \left(\frac{\omega\epsilon_1}{\sigma_2 + j\omega\epsilon_2} \right)^2}}$$

حاصل ہوتا ہے۔

مساوات 13.236 میں E_x سرحد کے عمودی ہے جبکہ E_z سرحد کے متوازی ہے۔ کل برقی میدان ان دونوں کا سمتی مجموعہ ہو گا۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کل میدان حرکت کی سمت میں جھکا ہو گا۔ شکل 13.16-ب میں ایسا دکھایا گیا ہے۔ جھکنے کا زاویہ

$$(13.240) \quad \theta = \tan^{-1} \frac{|E_z|}{|E_x|} = \tan^{-1} \left| \frac{-k_1}{\gamma_1} \right|$$

ہو گا۔

آئیں چند مخصوص سرحدوں پر موج کے جھکاؤ کا زاویہ حاصل کریں۔

ہوا اور تانبے کے سرحد پر $\omega = 100 \text{ Mrad/s}$ تعدد کے موج کی بات کرتے ہوئے

$$\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_0$$

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$$

$$\sigma_2 = 5.8 \times 10^7$$

سے

$$\gamma_1 = \gamma_2 = j0.33356$$

$$k_1 = 0.9215(1 - j) \times 10^{-6}$$

$$k_2 = 6.038(1 - j) \times 10^4$$

حاصل ہوتے ہیں جن سے

$$\theta = \tan^{-1} \left| \frac{0.9215(1 - j) \times 10^{-6}}{j0.33356} \right| = 0.00022385^\circ$$

زاویہ حاصل ہوتا ہے۔ اس نتیجے سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ موصل کے سرحد پر برقی میدان تقریباً عمودی ہی ہوتا ہے۔ برقی میدان کا عمودی یعنی E_x حصہ حرکت موج کی سمت میں طاقت منتقل کرتا ہے جبکہ E_z حصہ موصل میں طاقت منتقل کرتا ہے جو ضائع ہو جاتا ہے۔

ہوا اور پانی $\epsilon_R = 78$ کے سرحد پر $\omega = 100 \text{ Mrad/s}$ تعدد کے موج کی بات کرتے ہوئے

$$\epsilon_1 = \epsilon_0$$

$$\epsilon_2 = 78\epsilon_0$$

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$$

$$\sigma_2 = 0$$

سے

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \gamma_2 = j0.33144 \\ k_1 &= j0.037528 \\ k_2 &= 2.9272\end{aligned}$$

حاصل ہوتے ہیں جو

$$\theta = \tan^{-1} \left| \frac{j0.037528}{j0.33144} \right| = 6.46^\circ$$

زاویہ دیتا ہے۔ ہوا اور پانی کے سرحد پر برقی میدان کی جھکاؤ باآسانی ناپی جاسکتی ہے۔

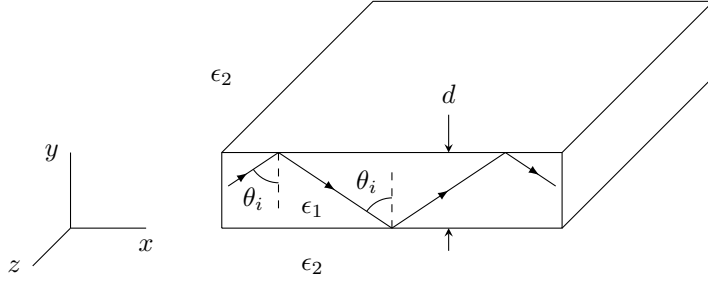
13.9 ذوبرق تختی موج

اب تک ہم موصل چادروں سے بنائے گئے موج پر غور کرتے رہے ہیں۔ اس حصے میں ذوبرق سے بنائے گئے موج پر غور کیا جائے گا۔ شکل 13.17 میں d موٹائی اور لامحدود وسعت کے ذوبرق کا تختہ دکھایا گیا ہے۔ اس تختے میں بائیں طرف سے TEM موج داخل کی جاتی ہے۔ ہم تختے میں پیدا کردہ موج کی حرکت پر غور کریں گے۔ یہ موج تختے میں بائیں سے دائیں یعنی بڑھتے x جانب حرکت کرے گی۔ جب تک ذوبرق کے نچلے اور بالائی سطحوں پر آمدی زاویہ کی قیمت فاصلہ زاویے سے زیادہ ہو، موج مکمل اندرونی انعکاس کرے گی۔ یوں ذوبرق میں بار بار انعکاس کرتے ہوئے موج صفر کرے گی۔ ایسا معلوم ہوتا ہے جیسے دو متوازی موصل چادروں کے درمیان موج انعکاس کر رہی ہے۔ حقیقت میں موصل چادروں کی صورت میں چادر پر متوازی برقی میدان صفر ہو گا جبکہ ذوبرق میں مکمل اندرونی انعکاس کی صورت میں ایسا نہیں ہوتا۔ ذوبرق کے باہر میدان لامحدود فاصلے تک پہنچتا ہے البتہ ایسا میدان سرحد سے دور جلد قابل نظر انداز حد تک گھٹ جاتا ہے۔ یوں میدان ذوبرق کے انتہائی قریب ہی رہتا ہے۔

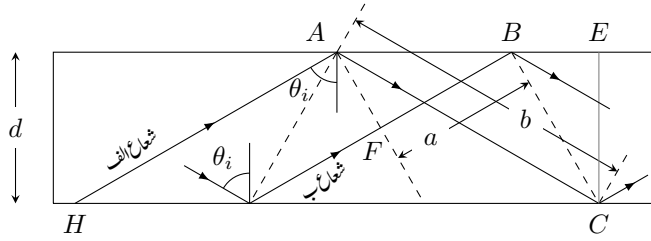
اگرچہ ایسا معلوم ہوتا ہے کہ جب تک آمدی زاویہ، فاصلہ زاویے سے زیادہ ہو، موج ذوبرق میں صفر کر پائے گی، حقیقت میں ایسا نہیں ہوتا۔ موج مخصوص زاویوں پر ہی صفر کر پاتی ہے۔ آئیں اس کی وجہ پر غور کریں۔ شکل کو دیکھتے ہوئے، دو TEM امواج پر نظر رکھیں جن کی تعدد برابر ہے۔ دونوں فاصلہ زاویے سے زیادہ زاویے پر آمد ہیں یعنی $\theta > \theta_{ic}$ ہے۔ یوں

$$(13.241) \quad \theta_i > \theta_{ic} = \sin^{-1} \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} = \sin^{-1} \frac{n_2}{n_1}$$

ہو گا جہاں



شکل 13.17: ذوبرق تختی موج میں اندرونی مکمل انعکاس سے موج صفر کرتی ہے۔



شکل 13.18: ذوبرق تختی کے اندرونی سطح پر ممکنہ آمدی زاویے۔

$$\text{اور } \epsilon_1 > \epsilon_2$$

ϵ_1 ذوبرق تختی کا برقی مستقل،

ϵ_2 ذوبرق تختی کے اوپر اور نیچے خطوں کا برقی مستقل

ہیں۔

شکل 13.18 میں شعاعوں کو ٹھوس لکیر جبکہ موج کی چوٹیوں کو نقطہ دار لکیروں سے ظاہر کیا گیا ہے۔ موج کی ترسیل کے لئے ضروری شرط یہ ہے کہ پہلی موج کا زاویائی فاصلہ a دوسری موج کے زاویائی فاصلے b کے برابر ہو اور یا ان میں فرق $2m\pi$ ہو جہاں $m = 0, 1, 2, \dots$ ممکن ہے۔ زاویائی فاصلے ناپتے وقت انعکاس سے پیدا زاویائی فرق کا بھی حساب رکھا جائے گا۔ اس شرط کو یوں لکھا جا سکتا ہے

$$(13.242) \quad \frac{2\pi}{\lambda_0} n_1 (b - a) + \phi = 2m\pi$$

جہاں

$$m = 0, 1, 2, \dots$$

n_1 پہلے خطے کا انعطافی مستقل $n_1 = \sqrt{\epsilon_{R1}}$ جبکہ

ϕ سطح سے انعکاس پر زاویائی فرق،

λ_0 خالی خلاء میں طول موج

ہیں۔ شکل 13.18 کو دیکھ کر

$$(13.243) \quad b = \frac{d}{\cos \theta_i}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اسی طرح تکتون ΔAEC ، تکتون ΔBEC اور تکتون ΔAFB سے بالترتیب

$$AB + BE = d \tan \theta_i$$

$$\tan \theta_i = \frac{d}{BE}$$

$$\sin \theta_i = \frac{a}{AB}$$

لکھے جا سکتے ہیں۔ یوں مساوات 13.242 کو

$$(13.244) \quad \frac{2\pi n_1 d}{\lambda_0} \left[\frac{1}{\cos \theta_i} - \sin \theta_i \left(\tan \theta_i - \frac{1}{\tan \theta_i} \right) \right] + \phi = 2m\pi$$

لکھا جا سکتا ہے جس کی سادہ صورت

$$(13.245) \quad \frac{4\pi n_1 d \cos \theta_i}{\lambda_0} + \phi = 2m\pi$$

ہے۔ عمودی برقی میدان E_{\perp} کو لے کر آگے بڑھتے ہیں۔ صفحہ 614 پر مساوات 12.30 کو یوں بھی لکھا جا سکتا ہے

$$(13.246) \quad \Gamma_{\perp} = \frac{\cos \theta_i - j \sqrt{\sin^2 \theta_i - \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}}{\cos \theta_i + j \sqrt{\sin^2 \theta_i - \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}} = 1/\phi$$

جہاں

$$(13.247) \quad \phi = -2 \tan^{-1} \frac{\sqrt{\sin^2 \theta_i - \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}}{\cos \theta_i}$$

کے برابر ہے۔

اس طرح شرح انعکاس Γ کی حتمی قیمت اکائی ہے جبکہ انعکاس سے پیدا زاویائی فرق ϕ ہے۔ مساوات 13.246 کو مساوات 13.245 میں پر کرتے ہوئے

$$(13.248) \quad \frac{4\pi n_1 d \cos \theta_i}{\lambda_0} - 2m\pi = 2 \tan^{-1} \frac{\sqrt{\sin^2 \theta_i - \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}}{\cos \theta_i}$$

یا

$$(13.249) \quad \tan \left(\frac{2\pi n_1 d \cos \theta_i}{\lambda_0} - m\pi \right) = \frac{\sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta_i - n_2^2}}{n_1 \cos \theta_i}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

$$m = 0, 1, 2, 3, \dots$$

n_1 پہلے خطے کا انعطافی مستقل $\sqrt{\epsilon_{R1}}$ ہے،

n_2 ذو برق تختے سے اوپر اور اس سے نیچے خطے کا انعطافی مستقل $\sqrt{\epsilon_{R2}}$ ہے،

d ذو برق تختے کی موٹائی،

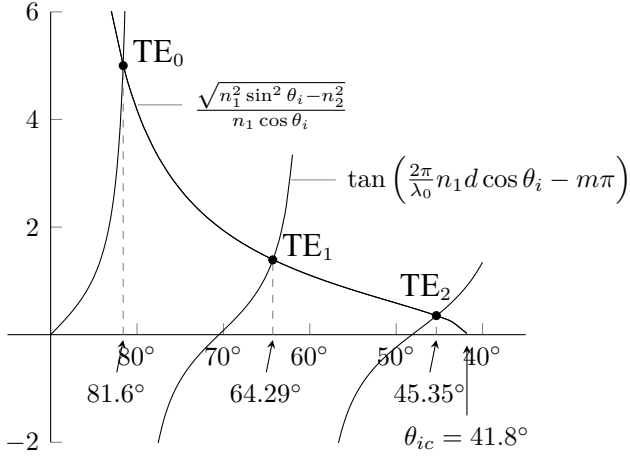
θ_i آمدی زاویہ اور

λ_0 لامحدود خطے میں طول موج

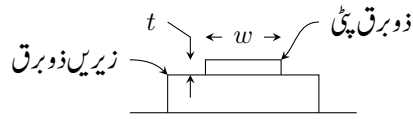
ہیں۔

چادر کی چوڑائی کم کرتے ہوئے w کرنے سے ذو برقی پٹی موج حاصل ہوتا ہے جسے شکل 13.20 میں دکھایا گیا ہے جہاں $t \ll w$ ہے۔ ذو برقی پٹی سے کم انعطافی مستقل کے زیریں ذو برقی²⁰ پر عموماً یہ نسب کئے جاتے ہیں۔

²⁰ dielectric substrate



شکل 13.19: تختی موج میں شعاع کے ممکن زاویے۔



شکل 13.20: ذوبرق پٹی موج

مثال 13.4: ذو برق کے 10 mm موٹی تختے کو بطور موج استعمال کیا جا رہے ہے۔ اس تختے کا انعطافی مستقل $n_1 = 1.5$ ہے جبکہ تختے سے اوپر اور نیچے خطے کا انعطافی مستقل $n_2 = 1$ ہے۔ برقی میدان تختے کے متوازی ہے یعنی شکل 13.17 میں x سمت کو ہے۔ طول موج $\lambda_0 = 10 \text{ mm}$ کی صورت میں آمدی زاویہ θ_i حاصل کریں۔

حل: برقی میدان تختے کے متوازی لیکن موج کے حرکت کی سمت کے عمودی ہے۔ مساوات 13.241 سے زاویہ فاصل

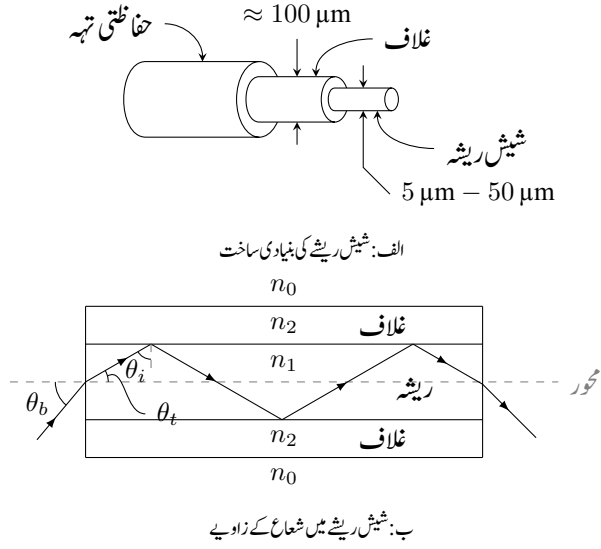
$$(13.250) \quad \theta_{ic} = \sin^{-1} \frac{1}{1.5} = 41.8^\circ$$

حاصل ہوتا ہے۔ زاویے کو θ_{ic} سے زیادہ رکھتے ہوئے، مساوات 13.249 کے بائیں اور دائیں ہاتھ کو شکل 13.19 میں کھینچا گیا ہے جس سے ممکنہ زاویے 45.35° ، 64.29° اور 81.6° حاصل ہوتے ہیں۔ یہ زاویے TE_0 ، TE_1 اور TE_2 امواج کے لئے ہیں۔ تینوں امواج بیک وقت موج میں پائے جاسکتے ہیں۔ تختے کی موٹائی کم یا زیادہ کرنے سے امواج کی ممکنہ تعداد بالترتیب زیادہ یا کم ہوگی۔ اسی طرح طول موج زیادہ (کم) کرنے سے ممکنہ امواج کی تعداد کم (زیادہ) ہوگی۔ ہاں کسی بھی صورت کم از کم ایک موج ضرور ممکن ہوگی لہذا تعدد کم کرتے کرتے صرف تک پہنچتے ہوئے بھی کوئی نہ کوئی موج ضرور ممکن ہوگی۔

13.10 شیش ریشہ

ذو برق تختی موج پر غور کے بعد ذو برق نلکی موج پر غور کرتے ہیں۔ ذرائع ابلاغ کے نظام میں اس طرز کے نلکی موج جنہیں شیش ریشہ²¹ کہتے ہیں، عام استعمال ہوتا ہے۔ بصری طول موج یا اس کے قریب طول موج پر استعمال کئے جانے والے نلکی موج کا رداس انتہائی کم ہوتا ہے۔ یہ n_1 شرح انعطاف کے انتہائی شفاف شیشے سے بنایا جاتا ہے جسے قدر کم شرح انعطاف n_2 کے شیشے کا غلاف پہنایا جاتا ہے۔ ان دونوں پر غیر شفاف حفاظتی تہ چڑھائی جاتی ہے۔ شیش ریشے کے مرکزی ریشے کا عمومی قطر $25 \mu\text{m}$ ہے جو انسانی سر کے بال جتنی موٹائی ہے۔ ایک شیش ریشہ ہزار سے زائد دو طرفہ گفتگو کی ترسیل کرنے کی صلاحیت رکھتا ہے۔ روشنی یا زیریں بصری²² شعاعوں کے لئے شیش ریشے کی تضعیفی مستقل $1.15 \times 10^{-4} \frac{\text{Np}}{\text{m}}$ کے برابر ہوتی ہے جو ایک انتہائی کم مقدار ہے۔ بصری اور زیریں بصری شعاعوں کے طول موج تقریباً 400 nm تا 1000 nm ہے۔

optical fiber²¹
infrared²²



شکل 13.21: شیش ریشہ کی ساخت اور ممکنہ آمدی زاویے

شکل 13.21-الف میں شیش ریشہ کی ساخت دکھائی گئی ہے۔ اندرونی شفاف ریشہ کا انعطافی مستقل n_1 جبکہ غلاف کا انعطافی مستقل n_2 ہے۔ ارد گرد خلاء کا انعطافی مستقل n_0 ہے۔ جیسے شکل 13.21-ب میں دکھایا گیا ہے، بیرون تار محور کے ساتھ θ_b زاویے پر آمدی شعاع تار کے اندر θ_t زاویے پر داخل ہو گا۔ یوں شفاف ریشہ اور غلاف کی سرحد پر شعاع کا زاویہ θ_i ہو گا۔ بیرونی اور اندرونی زاویوں کا تعلق ابن سہل کا قانون

$$(13.251) \quad \frac{\sin \theta_t}{\sin \theta_b} = \frac{n_0}{n_1}$$

دیتا ہے۔ جب تک مرکزی ریشہ اور غلاف کے سرحد پر آمدی زاویہ θ_i ، فاصل زاویہ θ_{ic} سے زیادہ ہو، شعاع مکمل اندرونی انعکاس کرے گی۔ شیش ریشہ اور غلاف کی سرحد پر قانون ابن سہل

$$(13.252) \quad \sin \theta_{ic} = \frac{n_2}{n_1}$$

سے فاصل زاویہ θ_{ic} حاصل ہوتا ہے۔ یوں

$$\sin \theta_b = \frac{n_1}{n_0} \sin \theta_t = \frac{n_1}{n_0} \sin(90^\circ - \theta_{ic}) = \frac{n_1}{n_0} \cos \theta_{ic}$$

یا

$$(13.253) \quad \sin \theta_b = \frac{\sqrt{n_1^2 - n_2^2}}{n_0}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں

 θ_b بیرون تار، محور کے ساتھ آمدی زاویہ، n_1 شیش ریشے کا انعطافی مستقل، n_2 شیش ریشے پر چڑھی تہہ کا انعطافی مستقل اور n_0 تار کے گرد خطے کا انعطافی مستقلہیں۔ خالی خلاء یا ہوا کی صورت میں $n_0 = 1$ ہو گا لہذا

$$(13.254) \quad \sin \theta_b = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$$

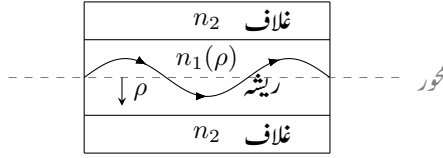
ہو گا۔

شیش ریشے اور غلاف کے انعطافی مستقل تقریباً $n_1 = 1.5$ اور $n_2 = 1.485$ ہوتے ہیں جس سے $\theta_b = 12.2^\circ$ حاصل ہوتا ہے۔ یوں جو شعاع شیش ریشے کے محور پر $\theta_b < 12.2^\circ$ سے آمد ہو شیش ریشے میں پھنس جائے گی۔ یہ شعاع شیش ریشے میں بار بار مکمل اندرونی انعکاس کرتے ہوئے صفر کرے گی۔ شیش ریشے میں کئی بلند انداز شعاع ممکن ہیں اور تختی موج کی طرح یہاں بھی ایک عدد بلند درجی انداز ایسا ہے جس کا کوئی انقطاعی تعدد نہیں پایا جاتا۔ یوں اگر

$$(13.255) \quad \lambda_0 > \frac{2\pi a \sqrt{n_1^2 - n_2^2}}{k_{01}} = \frac{2\pi a n_1 \cos \theta_{ic}}{k_{01}}$$

ہو جہاں

 k_{01} صفر درجی بیسل تفاعل J_0 کا پہلا صفر $k_{01} = 2.405$ ہے، λ_0 لامحدود خلاء میں طول موج



شکل 13.22: رداسی سمت ρ میں انعطافی مستقل مسلسل کم ہونے سے موج ہمواہی کے ساتھ مڑتی ہے۔

a شیش ریشے کا رداس

n_1 شیش ریشے کا انعطافی مستقل

n_2 شیش ریشے پر چڑھی تہہ کا انعطافی مستقل

θ_{ic} شیش ریشے اور اس پر چڑھی تہہ کے سرحد پر فاصل آمدی زاویہ

کے برابر ہیں تب صرف ایک عدد بلند درجی موج شیش ریشے میں پائی جائے گی۔ اس صورت میں شیش ریشہ اکائی بلند درجی انداز رکھتی ہے۔

اگر شفاف ریشے کا انعطافی مستقل محور سے رداسی سمت ρ سمت گھٹتا ہو تب شعاع کی راہ سرحد پر انعکاس سے اچانک تبدیل ہونے کی بجائے ہمواہی کے ساتھ مڑے گی۔ یوں شعاع کبھی بھی ریشے اور غلاف کے سرحد کو نہیں چھوئے گی۔ شکل 13.21-ب اور شکل 13.22 میں دونوں صورت حال دکھائے ہیں۔

شیش ریشے پر مبنی ذرائع ابلاغ کا نظام شکل میں دکھایا گیا ہے۔ ایک جانب نوردی ڈایوڈ²³ یا لیزر²⁴ برقی اشارے کو شعاع میں تبدیل کرتے ہوئے شیش ریشے میں خارج کرتا ہے۔ دوسری جانب یہی شعاع شیش ریشے سے خارج ہو کر نوری ٹرانزسٹر پر چمکتی ہے جو اسے واپس برقی اشارے میں تبدیل کرتا ہے۔

عمومی شیش ریشے میں کم سے کم تضعیف 700 nm تا 1100 nm زیریں بصری طول موج پر پائی جاتی ہے۔ انسانی آنکھ 400 nm تا 700 nm طول موج دیکھنے کی صلاحیت رکھتی ہے۔

light emitting diode, LED²³
laser²⁴

شیش ریشے $5 \mu\text{m}$ تا $50 \mu\text{m}$ قطر کے پائے جاتے ہیں جو کئی زیریں بصری طول موج کے برابر ہے لہذا اس سے شعاعی اخراج نہایت کم ہوتا ہے۔ قطر کم کرنے یا طول موج بڑھانے سے شعاعی اخراج بڑھتا ہے۔ ایسے شیش ریشے جن کا انعطافی مستقل 1.5 کے لگ بھگ ہو اور ان کا قطر اکائی طول موج سے زیادہ ہو بطور موج کردار ادا کرتے ہیں جبکہ اکائی طول موج سے کم قطر کے شیش ریشوں میں توانائی بیرون ریشہ سطح کے قریب رہتے ہوئے صفر کرتی ہے لہذا ان سے زیادہ شعاعی اخراج ہوتا ہے۔ یوں اگر اکائی طول موج سے زیادہ قطر کے شیش ریشے کا قطر کم ہوتے ہوتے اکائی طول موج سے کم ہو جائے تو توانائی شیش ریشے کے اندر سے باہر منتقل ہو گی اور ساتھ ہی ساتھ محوری سمت میں شعاعی اخراج بھی پایا جائے گا۔ ایسا شیش ریشہ بطور محوری اینٹینا²⁵ کردار ادا کرے گا۔

13.11 پردہ بصارت

انسانی آنکھ میں 10^8 سے زائد شیش ریشے پائے جاتے ہیں جو ناقص بطور موج کام کرتے ہیں بلکہ یہ ضیائی ذرے یعنی فوٹان²⁶ پکڑنے کا کام بھی سرانجام دیتے ہیں۔ آنکھ میں دو اقسام کے شیش ریشے پائے جاتے ہیں۔ آنکھ کے درمیان خطے میں مخروط شکل کے جبکہ اطراف پر نسبتاً زیادہ تعداد میں سلاخ نما شیش ریشے پائے جاتے ہیں جنہیں بالترتیب مخروطی²⁷ اور سلاخ²⁸ کہا جاتا ہے۔ تقریباً ہر مخروط علیحدہ علیحدہ انفرادی ترسیلی عصبی ریشے²⁹ کے ذریعہ دماغ کے ساتھ منسلک ہوتا ہے جہاں تصویر کشی کا عمل ہوتا ہے۔ مخروطی ہمیں باریک بینی اور رنگ پہچانے کی صلاحیت مہیا کرتے ہیں۔ مخروطوں کے برعکس اشکال پہچانے میں سلاخ کم مدد کرتے ہیں لیکن ان کی زیادہ تعداد اور حساس پن تاریکی میں دیکھنا ممکن بناتی ہے۔ دماغ سے جڑی ایک عدد ترسیلی تار کے ساتھ متوازی کئی سلاخ جڑے ہوتے ہیں جس سے کم روشنی میں بینائی مزید بہتر کرتی ہے۔ مرکز نگاہ سے ہٹ کر اطراف کی بینائی بھی سلاخ مہیا کرتے ہیں۔

شکل 13.23- الف میں آنکھ کا عمودی تراش دکھایا گیا ہے جس میں عدسہ چشم³⁰، پردہ بصارت³¹ اور دماغ کو جاتا عصب بصری³² دکھائے گئے ہیں۔ شکل 13.23- ب میں پردہ آنکھ کی زیادہ تفصیل دکھائی گئی ہے۔ آنکھ کا پردہ

end-fire antenna²⁵

photon²⁶

cones²⁷

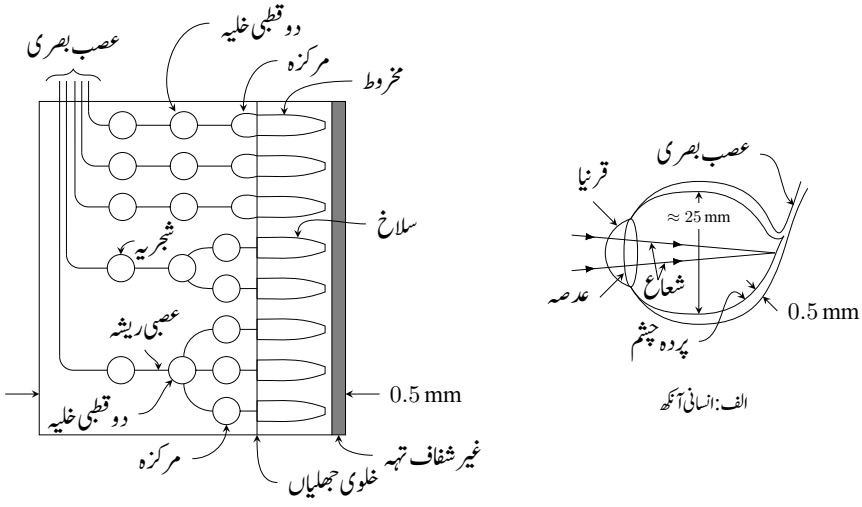
rods²⁸

axon²⁹

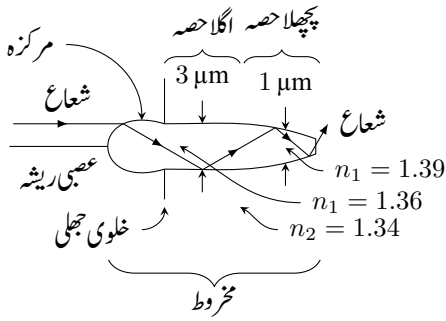
lens³⁰

retina³¹

optic nerve³²



ب: آنکھ کا پردہ



پ: مخروط

شکل 13.23: انسانی آنکھ اور اس کی تفصیل

شفاف ہوتا ہے۔ اس میں مخروط، سلاخ، دو قطبی خلیے³³ اور عصی خلیے³⁴ پائے جاتے ہیں۔ عصی خلیے کے دو اہم جزو شجریہ³⁵ اور عصی ریشہ کہلاتے ہیں۔ پردے کے پچھلی سطح پر غیر شفاف تہ پائی جاتی ہے۔ شکل 13.23- پ میں مخروط کی مزید وضاحت کی گئی ہے۔ مخروط اور سلاخ کے پچھلے دبلے سر کا قطر تقریباً $1 \mu\text{m}$ ، لمبائی بیس گنا زیادہ اور اس کا انعطافی مستقل $n_1 = 1.39$ جبکہ گرد مواد کا انعطافی مستقل n_2 اس سے چند فی صد کم ہوتا ہے۔ یاد رہے کہ ذرائع ابلاغ میں استعمال شیش ریشوں کے انعطافی مستقل $n_1 = 1.46$ اور $n_2 = 1.44$ تقریباً یہی قیمتیں ہیں البتہ مخروط اور سلاخ کے دبلے سر کا قطر 1.5λ تا 2λ ہے جو شیش ریشے کے قطر سے نسبتاً کم ہے لہذا ان سے شعاعی اخراج زیادہ ہو گا۔

مخروط یا سلاخ کا مرکزہ³⁶ بطور عدسہ چشم کردار ادا کرتا ہے۔ شعاع مخروط یا سلاخ میں بار بار مکمل اندرونی انعکاس سے صفر کرتی ہے اور جو فونان پچھلے دبلے حصے میں جذب نہ ہو پائے وہ پردے پر غیر شفاف تہ تک پہنچتی ہے۔ انسانی آنکھ میں غیر شفاف تہ فونان جذب کرتی ہے جبکہ رات کی تاریکی میں شکار کرنے والے جانور، مثلاً بلی، کی آنکھ میں غیر شفاف تہ کی جگہ انعکاسی مادے کی تہ پائی جاتی ہے جو فونان کو واپس مخروط یا سلاخ میں بھیجتی ہے جس سے ان کی بینائی مزید بہتر ہوتی ہے۔

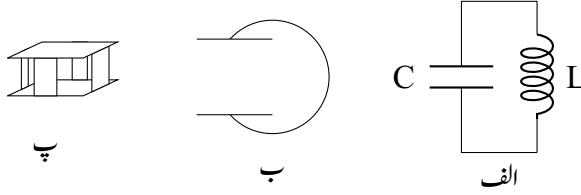
مخروط کے اگلے حصے میں $n_1 = 1.36$ جبکہ پچھلے حصے میں $n_1 = 1.39$ ہے۔ یوں اگرچہ مخروط میں لمبائی کی جانب انعطافی مستقل تبدیل ہوتا ہے لیکن یاد رہے کہ اس کی قیمت بیرونی مادے کی انعطافی مستقل سے زیادہ رہتی ہے۔

مخروط یا سلاخ کے پچھلے حصے کے مالیکیول ضیائی ذرہ پکڑتے ہیں۔ فونان پکڑنے سے برقی رو پیدا ہوتی ہے جو دو قطبی خلیے تک پہنچتی ہے۔ دو قطبی خلیے مختصر دورانیے کی موج پیدا کرتی ہے جو عصب بصری کے ذریعہ دماغ تک اشارہ پہنچاتی ہے۔ یوں مخروط یا سلاخ محوری لہنٹینا کی طرح ہیں البتہ ان میں 10^{15} Hz تعدد کے فونان پکڑنے اور اس کے عوض مختصر دورانیے کا عددی اشارہ پیدا کرنے کی صلاحیت بھی پائی جاتی ہے۔

13.12 گھمکی خلاء

موج کا مقصد طاقت کی منتقلی ہے۔ اس کے برعکس گھمکیا طاقت ذخیرہ کرتا ہے۔ گھمکیا کو امالہ اور برق گیر (کپیسٹر) کے گھمکی دور³⁷ کی طرح تصور کیا جا سکتا ہے۔ شکل 13.24- الف میں امالہ اور برق گیر (کپیسٹر) کا دور دکھایا گیا ہے

bipolar cells³³
nerve cells³⁴
dendrite³⁵
nucleus³⁶
resonant circuit³⁷



شکل 13.24: سادہ امالہ-کپیسٹر دور سے گھمکیا کا حصول۔

جس کی گھمکی تعدد $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ ہے۔ اس دور کے گھمکی تعدد کو بڑھانے کی خاطر امالہ اور برق گیر (کپیسٹر) کی قیمت کم کرنی ہوگی۔ شکل-ب میں امالہ کے چکر کم کرتے کرتے ایک تک پہنچ گئے ہیں۔ اسی طرح برق گیر (کپیسٹر) کی قیمت کم کرنے کی خاطر اس کے چادروں کے درمیان فاصلہ بڑھایا گیا ہے۔ متوازی امالہ جوڑنے سے کل امالہ کم ہوتی ہے۔ شکل-پ میں مزید امالہ متوازی جوڑ کر یہی کرنے کی کوشش کی گئی ہے۔ شکل-پ میں اتنے امالہ متوازی جوڑے جا سکتے ہیں کہ برق گیر (کپیسٹر) کے بلائی اور نچی چادروں کے اطراف پر کوئی جگہ خالی نہ رہ پائے۔ ایسی صورت میں بند مستطیلی ڈبیا حاصل ہوتی ہے جسے شکل 13.25 میں دکھایا گیا ہے۔ یہی بند ڈبیا گھمکی حناء³⁸ کہلاتی ہے۔

آہیں مستطیلی گھمکی حناء پر تفصیلی بحث کریں۔ صفحہ 663 پر مساوات 13.78 تا مساوات 13.83 مستطیلی موج میں تمام TE_{mn} میدان دیتے ہیں۔ ان میں $\gamma = j\beta$ پر کرتے ہوئے یہاں دوبارہ پیش کیا گیا ہے۔ مثبت x جانب حرکت کرتے میدان مثلاً H_x^+ پر زیر بالا (+) لکھ کر حرکت کی سمت بتلائی گئی ہے۔

$$(13.256) \quad H_x^+ = H_{x0} \cos \frac{n\pi y}{y_1} \cos \frac{m\pi z}{z_1} e^{j(\omega t - \beta x)}$$

$$(13.257) \quad H_y^+ = \frac{j\beta H_{x0}}{k^2} \frac{n\pi}{y_1} \sin \frac{n\pi y}{y_1} \cos \frac{m\pi z}{z_1} e^{j(\omega t - \beta x)}$$

$$(13.258) \quad H_z^+ = \frac{j\beta H_{x0}}{k^2} \frac{m\pi}{z_1} \cos \frac{n\pi y}{y_1} \sin \frac{m\pi z}{z_1} e^{j(\omega t - \beta x)}$$

$$(13.259) \quad E_z^+ = -\frac{j\omega\mu H_{x0}}{k^2} \frac{n\pi}{y_1} \sin \frac{n\pi y}{y_1} \cos \frac{m\pi z}{z_1} e^{j(\omega t - \beta x)}$$

$$(13.260) \quad E_y^+ = \frac{j\omega\mu H_{x0}}{k^2} \frac{m\pi}{z_1} \cos \frac{n\pi y}{y_1} \sin \frac{m\pi z}{z_1} e^{j(\omega t - \beta x)}$$

$$(13.261) \quad E_x^+ = 0 \quad TE$$

جہاں مساوات 13.52 کے تحت

$$(13.262) \quad Z_{yz} = \frac{E_y}{H_z} = -\frac{E_z}{H_y} = \frac{\omega\mu}{\beta}$$

ہے۔ اگر موج کو دائیں جانب موصل چادر سے بند کر دیا جائے تو امواج اس بند سرے پر عمودی آمد ہوں گے۔ برقی میدان E_y^+ بند سرے کی چادر کے متوازی ہے۔ موصل سطح سے انعکاس کی صورت میں انعکاسی مستقل $\Gamma_{\parallel} = -1$ حاصل ہوتا ہے۔ برقی میدان انعکاس کے بعد منفی x جانب حرکت کرے گا۔ انعکاسی برقی میدان

$$(13.263) \quad E_y^- = -\frac{j\omega\mu H_{x0}}{k^2} \frac{m\pi}{z_1} \cos \frac{n\pi y}{y_1} \sin \frac{m\pi z}{z_1} e^{j(\omega t + \beta x)}$$

ہے۔ آمدی اور انعکاسی میدان مل کر ساکن موج

$$\begin{aligned} E_y^+ + E_y^- &= \frac{j\omega\mu H_{x0}}{k^2} \frac{m\pi}{z_1} \left[\cos \frac{n\pi y}{y_1} \sin \frac{m\pi z}{z_1} e^{j(\omega t - \beta x)} - \cos \frac{n\pi y}{y_1} \sin \frac{m\pi z}{z_1} e^{j(\omega t + \beta x)} \right] \\ &= \frac{j\omega\mu H_{x0}}{k^2} \frac{m\pi}{z_1} \cos \frac{n\pi y}{y_1} \sin \frac{m\pi z}{z_1} e^{j\omega t} (e^{-j\beta x} - e^{j\beta x}) \end{aligned}$$

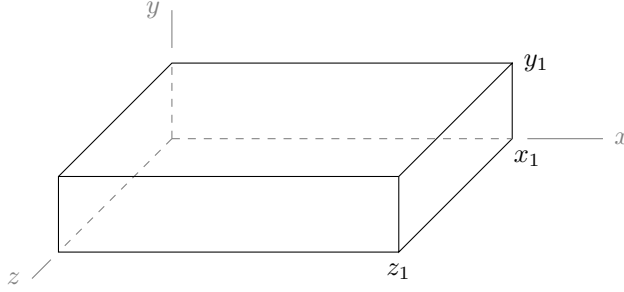
یعنی

$$(13.264) \quad E_y = 2 \frac{\omega\mu H_{x0}}{k^2} \frac{m\pi}{z_1} \cos \frac{n\pi y}{y_1} \sin \frac{m\pi z}{z_1} \sin \beta x e^{j\omega t}$$

کو جنم دیتے ہیں۔ موصل پر متوازی برقی میدان صفر ہوتا ہے لہذا مساوات 13.264 کا برقی میدان موج کے دائیں بند سرے پر صفر کے برابر ہو گا۔ اسی طرح بند سرے سے $\frac{\lambda}{2}$ یا $\frac{\lambda}{2}$ فاصلے پر بھی میدان صفر ہو گا جہاں $l = 1, 2, \dots$ ہے۔ یوں بند سرے سے $\frac{\lambda}{2}$ فاصلے پر موصل چادر رکھنے سے میدان پر کوئی اثر نہیں پڑے گا، البتہ E_y^- موج کے بائیں بند سرے سے انعکاس پذیر ہو گا۔ شکل 13.25 میں مستطیلی موج کے دائیں اور بائیں سرے بند کرتے ہوئے بقایا موج کو ہٹا لیا گیا ہے۔ یہ بند ڈبہ مستطیلی گھمکیا³⁹ ہے۔

شکل 13.25 میں گھمکیا کا بائیں سرا $x = 0$ اور دائیں سرا $x = x_1$ پر ہیں جہاں دونوں بند سروں کے درمیان فاصلہ

$$(13.265) \quad x_1 = \frac{l\lambda}{2} \quad (l = 1, 2, 3, \dots)$$



شکل 13.25: مستطیلی گھمکیا

ہے۔ اس مساوات کو استعمال کرتے ہوئے

$$\beta x_1 = \frac{2\pi l\lambda}{\lambda} = l\pi$$

حاصل ہوتا ہے جس سے

$$(13.266) \quad \beta = \frac{l\pi}{x_1}$$

ملتا ہے۔ اس کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 13.264

$$(13.267) \quad E_y = 2 \frac{\omega\mu H_{x0}}{k^2} \frac{m\pi}{z_1} \cos \frac{n\pi y}{y_1} \sin \frac{m\pi z}{z_1} \sin \frac{l\pi x}{x_1} e^{j\omega t}$$

لکھا جائے گا۔ اس مساوات میں گھمکیا کے x سمت میں l آدھے طول موج پائے جاتے ہیں، y سمت میں n آدھے طول موج پائے جاتے ہیں اور z سمت میں m آدھے طول موج پائے جاتے ہیں۔ گھمکیا میں بقایا میدان مندرجہ ذیل ہیں۔

$$(13.268) \quad E_x = 0 \quad \text{TE}_{lmm}$$

$$(13.269) \quad E_z = -2 \frac{\omega\mu H_{x0}}{k^2} \frac{n\pi}{y_1} \sin \frac{n\pi y}{y_1} \cos \frac{m\pi z}{z_1} \sin \frac{l\pi x}{x_1} e^{j\omega t}$$

$$(13.270) \quad H_z = 2 \frac{\beta H_{x0}}{k^2} \frac{m\pi}{z_1} \cos \frac{n\pi y}{y_1} \sin \frac{m\pi z}{z_1} \sin \frac{l\pi x}{x_1} e^{j\omega t}$$

$$(13.271) \quad H_y = 2 \frac{\beta H_{x0}}{k^2} \frac{n\pi}{y_1} \sin \frac{n\pi y}{y_1} \cos \frac{m\pi z}{z_1} \sin \frac{l\pi x}{x_1} e^{j\omega t}$$

$$(13.272) \quad H_x = -j2H_{x0} \cos \frac{n\pi y}{y_1} \cos \frac{m\pi z}{z_1} \sin \frac{l\pi x}{x_1} e^{j\omega t}$$

مساوات 13.267 میں $x = x_1$ یا $x = 0$ پر کرتے ہوئے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ دونوں بند سطحوں پر برقی میدان صفر کے برابر ہے۔

مساوات 13.86 میں دئے k کو k_{yz} لکھتے

(13.273)

$$k_{yz}^2 = \left(\frac{n\pi}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{z_1}\right)^2$$

ہوئے اور کامل ذو برق کے لئے $\sigma = 0$ لیتے ہوئے مساوات 13.87

$$k_{yz}^2 = \gamma^2 + \omega^2\mu\epsilon$$

لکھا جائے گا جہاں $\alpha = 0$ کی صورت میں $\gamma = j\beta$ ہو گا لہذا

$$k_{yz}^2 = -\beta^2 + \omega^2\mu\epsilon$$

یا

$$\left(\frac{n\pi}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{z_1}\right)^2 = -\left(\frac{l\pi}{x_1}\right)^2 + (2\pi f)^2 \frac{1}{(f\lambda)^2}$$

لکھا جا سکتا ہے جس سے گھمکی طول موج

(13.274)

$$\begin{aligned} \lambda_{\text{گھمکی}} &= \lambda_{lmn} = \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{l\pi}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{z_1}\right)^2}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{l}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{n}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{m}{z_1}\right)^2}} \end{aligned}$$

حاصل ہوتی ہے۔ اس مساوات کو استعمال کرتے ہوئے گھمکیا کا مستقل k یوں

(13.275)

$$k_{xyz}^2 = k_{lmn}^2 = \left(\frac{l\pi}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{z_1}\right)^2$$

بیان کیا جاتا ہے جس سے

(13.276)

$$\lambda_{\text{گھمکی}} = \frac{2\pi}{k_{xyz}}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

ڈبیا کے لمبے طرف کو x سے جبکہ چھوٹے طرف کو z سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ یوں لمبائی جانب گھمکیا میں l نصف طول موج پائے جائیں گے جبکہ اس سے چھوٹی طرف کی جانب n نصف طول موج اور سب سے چھوٹے طرف کی جانب m نصف طول موج پائے جائیں گے۔

یوں $x_1 > y_1 > z_1$ کی صورت میں گھمکی کے مندرجہ بالا امواج بلند درجی TE_{lmn} کہلائیں گے اور گھمکی طول موج λ_{lmn} لکھی جائے گی۔ گھمکیا λ طول موج یعنی $f = \frac{c}{\lambda_{lmn}}$ تعدد پر گھمکنے کی خاصیت رکھتی ہے۔

مثال 13.5: ایک کھوکھلے ڈبے کے اطراف 15 mm ، 15 mm اور 5 mm ہیں۔ اس میں TE_{110} گھمک کی طول موج λ_{110} دریافت کریں۔

حل: مساوات 13.274 کو استعمال کرتے ہوئے

$$\lambda_{110} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{1}{0.015}\right)^2 + \left(\frac{1}{0.015}\right)^2 + \left(\frac{0}{0.005}\right)^2}} = 21.21 \text{ mm}$$

حاصل ہوتا ہے جس سے گھمک کی تعدد

$$f_{110} = \frac{c}{\lambda_{110}} = \frac{3 \times 10^8}{0.02121} = 14.14 \text{ GHz}$$

حاصل ہوتی ہے۔

کسی بھی گھمکیا کی معیار سے مراد

$$(13.277) \quad Q = 2\pi \frac{\text{ذخیرہ توانائی}}{\text{فی چکر توانائی کا ضیاع}}$$

ہے جہاں Q معیاری مستقل⁴⁰ کہلاتا ہے۔ گھمکیا میں کثافت توانائی $w_e = \frac{\epsilon E^2}{2}$ کے حجمی تکمیل سے ذخیرہ توانائی حاصل کی جاسکتی ہے جہاں E برقی میدان کی بلند تر قیمت ہے۔ اسی طرح $T = \frac{1}{f}$ دورانیے کے لئے ڈبے کی اطراف کے چادر پر پونٹنگ سمتیہ کے سطحی تکمیل سے چادر میں طاقت کا ضیاع حاصل کیا جاسکتا ہے۔ یوں

$$(13.278) \quad Q = \frac{2\pi W}{T \left(-\frac{dW}{dt}\right)} = \frac{2\pi \iiint w_e dh}{T \frac{Z_{c,h}}{2} \iint |H_m|^2 dS}$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں H_m چادر کے متوازی مقناطیسی میدان جبکہ $Z_{c,h}$ چادر کی قدرتی رکاوٹ کا حقیقی جزو ہے۔

13.13 میکس ویل مساوات کا عمومی حل

اس حصے میں مستطیلی گھمکی مکمل طور پر حل کی جائے گی۔ امید کی جاتی ہے کہ آپ اس طریقے کو پسند کریں گے۔

کثافت بار سے خالی $\rho_h = 0$ خطے کے میکس ویل کے مساوات

$$(13.279) \quad \nabla \times \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

$$(13.280) \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

$$(13.281) \quad \nabla \cdot \mathbf{H} = 0$$

$$(13.282) \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$

سے شروع کرتے ہیں۔ مساوات 13.280 کی گردش لیتے ہوئے حاصل جواب میں مساوات 13.279 اور مساوات 13.282 پر کرنے سے موج کی مساوات

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} &= \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{H}) \\ -\nabla^2 \mathbf{E} &= -\mu \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \end{aligned}$$

حاصل ہوتی ہے۔ یہ سمتی مساوات حقیقت میں تین مساوات کو ظاہر کرتی ہے۔ ان میں سے E_x کی مساوات یوں

$$\nabla^2 E_x = \mu\sigma \frac{\partial E_x}{\partial t} + \mu\epsilon \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}$$

یا

$$(13.283) \quad \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \mu\sigma \frac{\partial E_x}{\partial t} + \mu\epsilon \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}$$

لکھی جائے گی جہاں برقی میدان $E_x(x, y, z, t)$ کے چار آزاد متغیرات ہیں۔ علیحدگی متغیرات⁴¹ استعمال کرتے ہوئے برقی میدان کو دو تفاعل کے حاصل ضرب کے برابر لکھا جاتا ہے

$$(13.284) \quad E_x(x, y, z, t) = M(x, y, z)T(t)$$

جہاں پہلے تفاعل M کے تین آزاد متغیرات x, y اور z ہیں جبکہ دوسرے تفاعل T کا صرف t آزاد متغیر ہے۔ یوں مساوات 13.283 سے

$$T \left(\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial z^2} \right) = M \left(\mu\sigma \frac{\partial T}{\partial t} + \mu\epsilon \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \right)$$

حاصل ہوتا ہے۔ دونوں اطراف کو MT سے تقسیم کرتے ہوئے

$$\frac{1}{M} \left(\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial z^2} \right) = \frac{1}{T} \left(\mu\sigma \frac{\partial T}{\partial t} + \mu\epsilon \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \right)$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس مساوات کا بائیں ہاتھ خلاء کے متغیرات x, y اور z پر منحصر ہے جبکہ دایاں ہاتھ وقت t پر منحصر ہے۔ یوں خلاء کے متغیرات تبدیل کرنے سے صرف بائیں ہاتھ تبدیل ہونے کا امکان ہے لیکن بائیں ہاتھ میں تبدیلی کے بعد مساوات کے دونوں اطراف برابر نہیں ہوں گے لہذا یہ لازم ہے کہ مساوات کے دونوں اطراف قابل تبدیل نہ ہوں۔ یوں انہیں مستقل k^2 کے برابر لکھا جاسکتا ہے یعنی

$$\frac{1}{M} \left(\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial z^2} \right) = \frac{1}{T} \left(\mu\sigma \frac{\partial T}{\partial t} + \mu\epsilon \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \right) = -k^2$$

جس سے دو مساوات

$$(13.285) \quad \mu\epsilon \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \mu\sigma \frac{\partial T}{\partial t} + k^2 T = 0$$

$$(13.286) \quad \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial z^2} + k^2 M = 0$$

حاصل ہوتے ہیں۔

مساوات 13.285 کا حل $T = e^{pt}$ فرض کرتے ہوئے

$$(\mu\epsilon p^2 + \mu\sigma p + k^2 T) e^{pt} = 0$$

سے

$$p = \frac{-\sigma \mp \sqrt{\sigma^2 - 4\frac{\epsilon}{\mu}k^2}}{2\epsilon}$$

حاصل ہوتا ہے۔ کامل ذو برق کی صورت میں $\sigma = 0$ ہو گا جس سے

$$(13.287) \quad p = \mp \frac{jk}{\sqrt{\mu\epsilon}}$$

حاصل ہوتا ہے جس سے

$$T(t) = c_{t1}e^{-\frac{jk}{\sqrt{\mu\epsilon}}t} + c_{t2}e^{+\frac{jk}{\sqrt{\mu\epsilon}}t}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں c_{t1} ، c_{t2} مساوات کے مستقل ہیں۔ اس میں

$$(13.288) \quad \omega = \frac{k}{\sqrt{\mu\epsilon}}$$

لیتے ہوئے مساوات کی جانی پہچانی شکل

$$(13.289) \quad T(t) = c_{t1}e^{-j\omega t} + c_{t2}e^{j\omega t}$$

حاصل ہوتی ہے۔

مساوات 13.286 کو بھی علیحدگی متغیرات کے طریقے سے حل کرتے ہیں۔ یوں

$$(13.290) \quad M(x, y, z) = X(x)N(y, z)$$

لیتے ہوئے

$$N \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + X \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} + X \frac{\partial^2 N}{\partial z^2} + k^2 XN = 0$$

یا

$$\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -\frac{1}{N} \left(\frac{\partial^2 N}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 N}{\partial z^2} \right) - k^2$$

حاصل ہوتا ہے جسے نئے مستقل k_x^2 کے برابر لکھا جا سکتا ہے۔ یوں

$$(13.291) \quad \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + k_x^2 X = 0$$

$$(13.292) \quad \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 N}{\partial z^2} + (k^2 - k_x^2)N = 0$$

حاصل ہوتے ہیں۔ ان میں دوسرے مساوات میں N کو مزید دو تفاعل کا حاصل ضرب

$$(13.293) \quad N(y, z) = Y(y)Z(z)$$

لکھتے ہوئے

$$Z \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + Y \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + (k^2 - k_x^2)YZ = 0$$

یا

$$\frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = -\frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} - k^2 + k_x^2$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اس کو نئے مستقل k_y^2 کے برابر پر کرتے ہوئے دو مساوات

$$(13.294) \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = -k_y^2 Y$$

$$(13.295) \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = -(k^2 - k_x^2 - k_y^2)Z = -k_z^2 Z$$

حاصل ہوتے ہیں جہاں آخری قدم پر $(k^2 - k_x^2 - k_y^2 = k_z^2)$ لکھا گیا ہے یعنی

$$(13.296) \quad k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$$

مساوات 13.291، مساوات 13.294 اور مساوات 13.295 کے حل

$$(13.297) \quad X(x) = c_{x1} e^{-jk_x x} + c_{x2} e^{jk_x x} = c'_{x1} \cos k_x x + c'_{x2} \sin k_x x$$

$$(13.298) \quad Y(y) = c_{y1} e^{-jk_y y} + c_{y2} e^{jk_y y} = c'_{y1} \cos k_y y + c'_{y2} \sin k_y y$$

$$(13.299) \quad Z(z) = c_{z1} e^{-jk_z z} + c_{z2} e^{jk_z z} = c'_{z1} \cos k_z z + c'_{z2} \sin k_z z$$

ہیں۔

مساوات 13.290، مساوات 13.293 اور مساوات 13.284 سے ظاہر ہے کہ

$$(13.300) \quad E_x(x, y, z, t) = TXYZ$$

کے برابر ہے۔ مساوات 13.300 میکس ویل مساوات کا عمومی حل ہے جو کسی ایک خطے میں ہر ممکنہ E_x موج کو ظاہر کرتی ہے۔ اصل موج اس مساوات کا حقیقی جزو ہو گا۔

اب تک k پر کوئی شرط عائد نہیں کی گئی۔ یوں $k_x = 0.32$ یا $k_x = -7.59$ ہو سکتا ہے۔ مندرجہ بالا مساوات لامحدود خطے میں مکمل آزاد موج کو ظاہر کرتی ہے۔ آئیں اب موج کو پابند کر کے دیکھیں۔

تصور کریں کہ لامحدود وسعت کے دو متوازی موصل چادروں کے درمیان موج پیدا کی جاتی ہے۔ صفحہ 645 پر شکل 13.1 میں ایسا دکھایا گیا ہے۔ ان موصل چادروں پر متوازی برقی دباؤ صفر ہو گا۔ یوں $z = 0$ اور $z = z_0$ پر E_x صفر ہو گا۔ ہم اس ترکیب کو کئی مرتبہ استعمال کر چکے ہیں۔ مساوات 13.299 میں ان شرائط کو پر کرتے ہوئے

$$(13.301) \quad c'_{z1} = 0$$

$$(13.302) \quad k_z = \frac{m\pi}{z_1}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

$$(13.303) \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

کے برابر ممکن ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ k_z اب صرف چنی گئی قیمت کا ہو سکتا ہے۔ یوں $k_z = \frac{\pi}{z_1}$ یا $k_z = \frac{2\pi}{z_1}$ ہو سکتا ہے لیکن ان دو قیمتوں کے درمیان یہ کسی اور قیمت کا نہیں ہو سکتا۔ یہی خصوصیت مقید موج کی نشانی ہے۔

اسی طرح $y = 0$ اور $y = y_0$ پر بھی دو متوازی موصل چادر نسب کرنے سے صفحہ 653 پر دکھایا شکل 13.8 حاصل ہوتا ہے۔ ان سطحوں پر بھی متوازی برقی میدان صفر ہو گا۔ اس طرح مساوات 13.298 سے

$$(13.304) \quad c'_{y1} = 0$$

$$(13.305) \quad k_y = \frac{n\pi}{y_1}$$

حاصل ہوتے ہیں جہاں

$$(13.306) \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

کے برابر ممکن ہیں۔ اب موج y اطراف سے بھی پابند ہے جس کی وجہ سے k_y بھی آزادانہ قیمت رکھنے سے قاصر ہے۔ یوں مستطیلی موج میں موج کی مساوات

$$(13.307) \quad E_x = E_{x0} \sin \frac{n\pi y}{y_0} \sin \frac{m\pi z}{z_0} e^{j(\omega t \mp k_x x)}$$

ہو گی جہاں $e^{j(\omega t - k_x x)}$ بڑھتے x جانب موج جبکہ $e^{j(\omega t + k_x x)}$ گھٹتے x جانب موج ہے۔ k_y اور k_z کی قیمتیں مساوات 13.302 اور مساوات 13.305 کے تحت ہوں گی۔ جیسے آپ جلد مساوات 13.321 میں دیکھیں گے، طول موج اور k کا ایک خاص تعلق ہے۔ یوں جس تعدد کی موج مستطیلی موج سے گزر رہی ہو مساوات 13.321 اس کا k دیتی ہے جو ایک اٹل قیمت ہو گی۔ اب کسی بھی k_y اور k_z کے لئے مساوات 13.296 سے k_x کی قیمت مخصوص تعدد کے موج کے لئے حاصل کی جا سکتی ہے۔ جب تک k_x کی قیمت حقیقی عدد حاصل ہو اس وقت تک مساوات 13.297 سے حرکت کرتی موج ہی حاصل ہو گی البتہ اگر k_y اور k_z کی جوڑی سے k_x کی قیمت خیالی حاصل ہو تب مساوات 13.297 سے

$$X(x) = c_{x1} e^{k_x x} + c_{x2} e^{-k_x x}$$

حاصل ہو گا۔ بڑھتے x جانب موج کی صورت میں $x \rightarrow \infty$ کی صورت میں اس مساوات سے لامحدود میدان حاصل ہو گا لہذا ایسی صورت میں $c_{x1} = 0$ لیا جائے گا۔ مساوات کا بقایا حصہ حرکت کرتے موج کو ظاہر نہیں کرتا بلکہ یہ گھٹتے میدان کو ظاہر کرتا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کسی مخصوص تعدد، k_y اور k_z سے مساوات 13.296 سے k_x کی مخصوص قیمت دیتا ہے۔

اگر $x = 0$ اور $x = x_0$ پر بھی موصل چادر نسب کئے جائیں تو صفحہ 717 پر دکھایا شکل 13.25 حاصل ہو گا۔ چونکہ E_x ان چادروں کے عمودی ہے لہذا ہمیں E_y یا E_z کی مساوات درکار ہو گی۔ میں لکھتے لکھتے بہت تکھ چکا ہوں۔ آپ بھی پڑھ پڑھ کر بہت کٹھے ہوں گے لہذا میں ان چادروں سے حاصل نتیجہ لکھ لیتا ہوں

$$(13.308) \quad c'_{x2} = 0$$

$$(13.309) \quad k_x = \frac{l\pi}{x_0}$$

جہاں

$$(13.310) \quad l = 1, 2, 3, \dots$$

کے برابر ممکن ہے۔

ان نتائج کو جمع کرتے ہوئے شکل 13.25 میں دکھائے مستطیلی گھمکیا کی مساوات

$$\begin{aligned} E_x &= E_{x0} \cos k_x x \sin k_y y \sin k_z z e^{j\omega t} \\ (13.311) \quad &= E_{x0} \cos \frac{l\pi x}{x_0} \sin \frac{n\pi y}{y_0} \sin \frac{m\pi z}{z_0} e^{j\omega t} \end{aligned}$$

حاصل ہوتی ہے جو ساکن موج ہے۔

انہیں ایک مرتبہ پھر مکمل آزاد موج کی بات کریں۔ مساوات 13.297 دراصل دو ممکنہ جوابات $e^{-jk_x x}$ اور $e^{jk_x x}$ کا مجموعہ ہے۔ اسی طرح مساوات 13.298 اور مساوات 13.299 بھی مجموعے ہیں۔ مساوات 13.300 میں Y ، X اور Z کے مختلف اجزاء پر کرتے ہوئے مختلف امواج کے مساوات حاصل ہوتے ہیں۔ یوں مساوات 13.297، مساوات 13.298 اور مساوات 13.299 کے پہلے جزو چنتے ہوئے ایک ممکنہ حل

$$(13.312) \quad E_x = E_{x0} e^{j(\omega t - k_x a_x - k_y a_y - k_z a_z)}$$

حاصل ہوتا ہے۔ کارتیسی محدود میں کسی بھی نقطہ (x, y, z) کو سمتیہ

$$(13.313) \quad \mathbf{r} = x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y + z\mathbf{a}_z$$

ظاہر کرتی ہے۔ ہم k_x ، k_y ، k_z اور k کو سمتیہ

$$(13.314) \quad \mathbf{k} = k_x\mathbf{a}_x + k_y\mathbf{a}_y + k_z\mathbf{a}_z$$

لکھ سکتے ہیں جو مساوات 13.296 کے شرط پر پورا اترتی ہے۔ اس طرح

$$(13.315) \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = k_x x + k_y y + k_z z$$

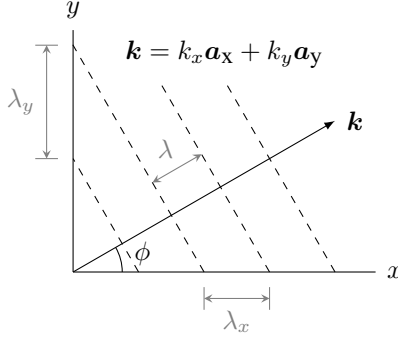
ہو گا لہذا مساوات 13.312 کو نہایت عمدگی کے ساتھ

$$(13.316) \quad E_x = E_{x0} e^{j(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}$$

لکھا جاسکتا ہے جس کا حقیقی جزو

$$(13.317) \quad E_x = E_{x0} \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$$

اصل موج دیتا ہے۔ مندرجہ بالا مساوات لامحدود خطے میں موج کی عمومی مساوات ہے جو بڑھتے k کی جانب حرکت کرے گی۔



شکل 13.26: مختلف طول موج کا آپس میں تعلق

شکل 13.26 میں موج کے حرکت کی سمت، x محدد کے ساتھ ϕ زاویہ بناتی ہے۔ یہ موج xy سطح پر پائی جاتی ہے یعنی $k_z = 0$ کے برابر ہے۔ موج کی چوٹیوں کو نقطہ دار لکیروں سے ظاہر کیا گیا ہے۔ کسی بھی نقطے پر ان چوٹیوں کو گن کر تعدد دریافت کی جاسکتی ہے۔ یوں x محدد پر نقطہ $(x_0, 0)$ سے فی سیکنڈ گزرتے چوٹیوں کی تعداد موج کی تعدد f ہوگی۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ y محدد پر نقطہ $(0, y_0)$ سے بھی فی سیکنڈ اتنی ہی چوٹیاں گزریں گی۔ اسی طرح k پر بھی کسی نقطے پر چوٹیاں گنتے ہوئے یہی تعدد حاصل ہوتی ہے۔

دو متواتر چوٹیوں کے درمیان فاصلہ طول موج کہلاتا ہے۔ وقت t کو روک کر x محدد پر رہتے ہوئے موج کی دو متواتر چوٹیوں کے درمیان فاصلہ λ_x ناپا جائے گا۔ اسی طرح y محدد پر طول موج λ_y ناپی جائے گی جبکہ حرکت کی سمت میں طول موج λ ناپی جائے گی۔ ان تمام کو شکل 13.26 میں دکھایا گیا ہے۔

کسی بھی موج کی تعدد f اور طول موج λ جانتے ہوئے اس کی رفتار $v = f\lambda$ لکھی جاسکتی ہے۔ سمت حرکت کی جانب موج کی رفتار $\frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$ کے برابر ہوتی ہے لہذا

$$(13.318) \quad f\lambda = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$$

ہوگا۔ اس مساوات کے دونوں اطراف کو 2π سے ضرب دیتے ہوئے

$$(13.319) \quad \lambda = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{\mu\epsilon}}$$

حاصل ہوتا ہے جس میں مساوات 13.288 پر کرنے سے

$$(13.320) \quad \lambda = \frac{2\pi}{k}$$

یا

$$(13.321) \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

حاصل ہوتا ہے لیکن ہم جانتے ہیں کہ $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$ ہوتا ہے۔ مندرجہ بالا مساوات کامل ذو برق $\sigma = 0$ کے لئے حاصل کئے گئے لہذا $\alpha = 0$ اور

$$(13.322) \quad \gamma = 0 + j\beta = jk$$

کے برابر ہے۔ اس طرح k کو β جبکہ k_x, k_y اور k_z کو بالترتیب β_x, β_y اور β_z لکھا جا سکتا ہے۔

ہم توقع کرتے ہیں کہ مساوات 13.321 کی طرح $\lambda_x = \frac{2\pi}{k_x}$ لکھنا ممکن ہو گا۔ آئیں اس حقیقت کو ثابت کریں۔ شکل 13.26 کو دیکھ کر $\lambda_x = \frac{\lambda}{\cos \phi}$ لکھا جا سکتا ہے جہاں شکل کو دیکھتے ہوئے $\cos \phi = \frac{k_x}{k}$ لکھا جا سکتا ہے۔ یوں

$$\lambda_x = \frac{\lambda}{\cos \phi} = \frac{\lambda k}{k_x}$$

لکھ کر $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ پر کرتے ہوئے

$$(13.323) \quad \lambda_x = \frac{2\pi}{k_x}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح ہم

$$(13.324) \quad \lambda_y = \frac{2\pi}{k_y}$$

$$(13.325) \quad \lambda_z = \frac{2\pi}{k_z}$$

بھی حاصل کر سکتے ہیں۔

سمت حرکت کی جانب رفتار جسے مجموعی رفتار⁴² کہتے ہیں

$$(13.326) \quad v = f\lambda = \frac{\omega}{k}$$

کے برابر ہے۔ موج اس رفتار سے توانائی ایک جگہ سے دوسری جگہ منتقل کرتی ہے۔ اس کے برعکس کار تیبی محدود پر دوری رفتار⁴³

$$v_x = f\lambda_x = \frac{\omega}{k_x}$$

$$v_y = f\lambda_y = \frac{\omega}{k_y}$$

$$v_z = f\lambda_z = \frac{\omega}{k_z}$$

ہوں گے۔ شکل 13.26 میں ϕ کی قیمت کم کرنے سے λ_y اور v_y کی قیمت بڑھتی ہے حتیٰ کہ $\phi = 0$ پر $v_y = \infty$ حاصل ہوتا ہے۔ یوں دوری رفتار، روشنی کے رفتار سے زیادہ ہو سکتی ہے۔ دوری رفتار صرف آنکھوں کا دھوکہ ہے، اس رفتار سے موج کا کوئی حصہ حرکت نہیں کرتا لہذا یہ آئن سٹائن کے قانون کی خلاف ورزی نہیں کرتا۔ آئن سٹائن کا قانون کہتا ہے کہ کوئی چیز روشنی سے زیادہ تیز سفر نہیں کر سکتی۔

سوالات

سوال 13.1: ہوا سے بھرے مستطیل موج کے اطراف کی لمبائی 25 mm اور 50 mm ہے۔ اس میں کمتر انقطاعی تعدد کے 1.7 گنا تعدد کی موج پائی جاتی ہے۔ الف) کم تر انقطاعی طول موج دریافت کریں۔ ب) موج میں دوری رفتار حاصل کریں۔

جوابات: 100 mm ، $3.843 \times 10^8 \frac{m}{s}$

سوال 13.2: ہوا سے بھرے 50 mm لمبائی کے اطراف کے چکور موج میں 40 mm سے زیادہ طول موج کے تمام ممکنہ TE اور TM امواج دریافت کریں۔

جوابات: TE_{10} ، TE_{01} ، TE_{11} ، TE_{20} ، TE_{02} ، TE_{21} ، TE_{12} ، TM_{11} ، TM_{21} ، TM_{12} ،

سوال 13.3: ہوا سے بھرے 20 mm اور 100 mm لمبائی کے اطراف کے مستطیل موج میں 150 mm سے زیادہ طول موج کے تمام ممکنہ TE اور TM امواج دریافت کریں۔

جوابات: TE_{10}

سوال 13.4: ہوا سے بھرے نلکی موج کا رداس 75 mm ہے۔ اس میں کم ضیاعی TE_{01} موج کی انقطاعی طول موج اور غالب TE_{11} موج کی انقطاعی طول موج دریافت کریں۔

جوابات: 123 mm ، 256 mm

سوال 13.5: ہوا سے بھرے نلکی موج کا رداس 100 mm ہے۔ اس میں مندرجہ ذیل بلند درجی امواج کے انقطاعی طول موج دریافت کریں۔ TM_{01} ، TM_{02} ، TM_{11} ، TM_{12} ، TM_{21} ، TM_{31} ، TM_{41}

جوابات: 261 mm ، 114 mm ، 164 mm ، 89 mm ، 122 mm ، 98 mm ، 83 mm

سوال 13.6: ہوا سے بھرے نلکی موج کا رداس 100 mm ہے۔ اس میں مندرجہ ذیل بلند درجی امواج کے انقطاعی طول موج دریافت کریں۔ TE_{01} ، TE_{02} ، TE_{11} ، TE_{12} ، TE_{21} ، TE_{22} ، TE_{31} ، TE_{41} ،

جوابات: 149 mm ، 94 mm ، 206 mm ، 118 mm ، 341 mm ، 89 mm ، 164 mm ، 118 mm

سوال 13.7: ثابت کریں کہ کامل موصل کے نکلے موج میں TE_{11} بلند درجی انداز اوسطاً $\frac{\omega\mu\beta\rho_0^4|H_0|^2}{82}$ واٹ کی طاقت ترسیل کرتی ہے۔

سوال 13.8: ثابت کریں کہ متوازی دو عدد لامحدود موصل چادروں کے موج میں انتظامی تعدد سے بلند تعدد پر TE_{10} موج کی تضعیفی مستقل

$$\alpha = \frac{2}{d} \frac{Z_{c,h}}{Z_{d,h}} \frac{\left(\frac{\lambda_0}{2d}\right)^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{2d}\right)^2}} \quad (\text{Np/m})$$

ہے جہاں

$Z_{c,h}$ موجی موصل چادر کی قدرتی رکاوٹ کا حقیقی جزو،

$Z_{d,h}$ موج میں بھرے ذو برق کی قدرتی رکاوٹ کا حقیقی جزو،

d دو لامحدود چادروں میں فاصلہ اور

λ_0 خالی خلاء میں طول موج ہیں

سوال 13.9: ثابت کریں کہ متوازی دو عدد لامحدود موصل چادروں کے موج میں انتظامی تعدد سے بلند تعدد پر TE_{m0} موج کی تضعیفی مستقل

$$\alpha = \frac{2}{d} \frac{Z_{c,h}}{Z_{d,h}} \frac{\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2}} \quad (\text{Np/m})$$

ہے جہاں

$Z_{c,h}$ موجی موصل چادر کے قدرتی رکاوٹ کا حقیقی جزو،

$Z_{d,h}$ موج میں بھرے ذو برق کی قدرتی رکاوٹ کا حقیقی جزو،

d دو لامحدود چادروں میں فاصلہ اور

λ_0 خالی خلاء میں طول موج ہیں

سوال 13.10: لامحدود جسامت کے تانبے کے دو چادروں کے درمیان 18 mm کا فاصلہ ہے۔ اس میں 10 MHz تعدد کی TEM موج کا تضعیفی مستقل اور TE₁₀ موج کا تضعیفی مستقل دریافت کریں۔

$$\text{جواب: } \alpha = 3.85 \frac{\text{mNp}}{\text{m}}, \quad \alpha = 9.67 \frac{\text{mNp}}{\text{m}}$$

سوال 13.11: ثابت کریں کہ متوازی دو عدد لامحدود موصل چادروں کے موج میں انتظامی طول موج سے کم طول موج λ_0 پر TM₁₀ موج کی تضعیفی مستقل

$$\alpha' = \frac{2\alpha}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{2d}\right)^2}}$$

ہے جہاں

α موج میں TEM موج کی تضعیفی مستقل اور

d چادروں کے درمیان فاصلہ ہے۔

سوال 13.12: ثابت کریں کہ ایسے مستطیل موج جس کی چوڑائی z_1 اور اونچائی y_1 ہو میں انتظامی تعدد سے زیادہ تعدد پر TE_{m0} موج کی تضعیفی مستقل مندرجہ ذیل ہے۔

$$(13.327) \quad \alpha = \frac{2Z_{c,h}}{z_1 Z_{d,h}} \frac{\left[\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2 + \frac{z_1}{2y_1} \right]}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2}}$$

سوال 13.13: تانبے کی 1 cm چوڑی پٹی تانبے کی وسیع چادر کے متوازی 1.2 mm فاصلے پر پائی جاتی ہے۔ ان کے درمیان $\epsilon_R = 2.6$ کا ذو برقی بھرا گیا ہے۔ اس موج میں 450 MHz تعدد کی TEM موج حرکت کرتی ہے۔ موج میں برقی میدان کا حیثہ $300 \frac{\text{mV}}{\text{m}}$ ہے۔ الف) موج کتنی طاقت منتقل کر رہا ہے۔ ب) فی میٹر موج میں طاقت کا ضیاع حاصل کریں۔ پ) موج کا تضعیفی مستقل دریافت کریں۔

جوابات: 2.3 nW ، 91 $\frac{pW}{m}$ ، 39.5 $\frac{mNp}{m}$ یا 0.343 $\frac{dB}{m}$

سوال 13.14: موصل چادر $\sigma = 10^6 \frac{S}{m}$ اور 3 cm چوڑی موصل پٹی $\sigma = 10^6 \frac{S}{m}$ کے مابین 2 mm موٹائی کا ذو برق $\epsilon_R = 7$ پایا جاتا ہے۔ برقی میدان $E = 3.2 \frac{V}{m}$ اور تعدد 500 MHz ہے۔ منتقل طاقت اور موج کا تضعیفی مستقل حاصل کریں۔

جوابات: 4.3 μW ، 0.312 $\frac{Np}{m}$ یا 2.7 $\frac{dB}{m}$

سوال 13.15: کامل موصل سے بنے مستطیل موج میں TE_{10} کے لئے ثابت کریں کہ اوسط منتقل طاقت مندرجہ ذیل ہے۔

$$(13.328) \quad P_{\text{اوسط}} = \frac{\omega \mu \beta |H_0|^2 y_1 z_1^3}{4\pi^2}$$

سوال 13.16: ہوا اور تانبے کے سرحد پر 1 GHz تعدد کے موج کا جھکاؤ حاصل کریں۔

جواب: 0.00177°

سوال 13.17: ہوا اور پانی $\epsilon_R = 78$ کے سرحد پر 1 GHz تعدد کے موج کا جھکاؤ حاصل کریں۔

جواب: 6.46°

سوال 13.18: تانبے کی چادر کے متوازی 150 MHz تعدد کی موج حرکت کر رہی ہے۔ برقی میدان $E = 50 \frac{V}{m}$ چادر کی سطح کے عمودی ہے۔ الف) چادر کے متوازی منتقل طاقت کا پوسٹنگ سمتیہ دریافت کریں۔ ب) مقناطیسی میدان کی موثر قیمت حاصل کریں۔ پ) چادر کی سطح پر برقی میدان حاصل کریں۔ ت) چادر میں داخل طاقت کا پوسٹنگ سمتیہ دریافت کریں۔

جوابات: 6.636 $\frac{W}{m^2}$ ، 0.133 $\frac{A}{m}$ ، 56.3 $\frac{\mu W}{m^2}$

سوال 13.19: موصل کی لامحدود سطح کے متوازی موج حرکت کر رہی ہے۔ سطح کے عمودی برقی میدان $E = 150 \frac{V}{m}$ ہے۔ موصل کی قدرتی رکاؤٹ کی حتمی قیمت $|Z_c| = 0.012 \Omega$ ہے۔ الف) سرحد کے متوازی فی میٹر رقبے سے گزرتی طاقت دریافت کریں۔ ب) موصل سطح کے فی میٹر رقبے میں داخل طاقت دریافت کریں۔

جوابات: $1.9 \frac{\text{mW}}{\text{m}^2}$ ، $59.7 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$

سوال 13.20: موصل $\sigma = 10^7 \frac{\text{S}}{\text{m}}$ کی سطح کے متوازی خالی خلاء میں 1.2 GHz تعدد اور $E_{\text{موج}} = 50 \frac{\text{mV}}{\text{m}}$ کی موج حرکت کر رہی ہے۔ مقناطیسی میدان سرحد کے متوازی ہے جبکہ برقی میدان سرحد کے عمودی ہے۔ فی مربع میٹر موصل رقبے میں طاقت کا ضیاع حاصل کریں۔

جواب: $0.38 \frac{\text{nW}}{\text{m}^2}$

سوال 13.21: موصل سطح کے متوازی TEM موج حرکت کر رہی ہے۔ ثابت کریں کہ $K = \rho_S v_S$ کی صورت میں، جہاں K ایمپیر فی میٹر میں سطحی کثافت برقی رو، ρ_S کولمب فی مربع میٹر میں سطحی کثافت بار اور v_S میٹر فی سیکنڈ میں موج کی رفتار ہو، $K = H$ ہو گا جہاں H موج کے مقناطیسی میدان H کا حیطہ ہے۔

سوال 13.22: مستطیل موج میں TE_{10} موج کی صورت میں نچلے اور بالائی اطراف (کے وسط) کے درمیان برقی دباؤ V اور نچلی یا بالائی طرف کے اندرونی سطح پر محوری برقی رو I کی شرح برقی رکاوٹ Z

$$(13.329) \quad Z = \frac{V}{I} = \frac{\pi y_1}{2z_1} Z_{yz}$$

دیتی ہے جہاں

y_1 موج کے چھوٹے طرف کی لمبائی،

z_1 موج کے لمبے طرف کی لمبائی اور

Z_{yz} موج کی عرضی رکاوٹ ہے۔

سوال 13.23: مستطیل موج میں مجموعی رفتار کے تعلق

$$(13.330) \quad u = v_0 \sqrt{1 - \left(\frac{n\lambda_0}{2y_1}\right)^2 - \left(\frac{m\lambda_0}{2z_1}\right)^2} = v_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2}$$

کو ثابت کریں جہاں v_0 دوری رفتار، λ_0 لامحدود خطے میں طول موج اور λ_{0c} انقطاعی تعدد پر لامحدود خطے میں طول موج ہیں۔

سوال 13.24: شیش ریشے کا انعطافی مستقل $n = 1.53$ اور شیش ریشے پر چڑھائی گئی غلاف کا انعطافی مستقل $n = 1.51$ ہے۔ داخلی زاویہ θ_i کی ایسی زیادہ سے زیادہ قیمت حاصل کریں جس پر $1 \mu\text{m}$ کی موج شیش ریشے میں مکمل طور پر پھنس جائے گی۔

جواب: 14.3

سوال 13.25: شیش ریشے کا انعطافی مستقل 1.54 اور غلاف کا انعطافی مستقل 1.535 ہیں۔ شیش ریشے میں اکلوتی $1.1 \mu\text{m}$ بلند درجی موج کی صورت میں شیش ریشے کا رداس دریافت کریں۔ داخلی زاویے کی زیادہ سے زیادہ حد دریافت کریں۔

جوابات: $3.4 \mu\text{m}$ ، 7.13

سوال 13.26: چکور گھمکی کے دو اطراف x لمبائی رکھتے ہیں جبکہ تیسرا طرف $\frac{x}{4}$ لمبا ہے۔ اس میں TE_{110} کی 25 mm موج کی صورت میں x دریافت کریں۔

جواب: 14.14 mm

سوال 13.27: مساوات 13.119 حاصل کریں۔

سوال 13.28: مساوات 13.120 حاصل کریں۔

سوال 13.29: مساوات 13.120 تا مساوات 13.125 حاصل کریں۔

سوال 13.30: نکلی گھمکی کا رداس اور اس کی لمبائی برابر ہیں جبکہ اس میں $\lambda_0 = 10 \text{ mm}$ کی TM_{02} پائی جاتی ہے۔ الف) نکلی کا رداس دریافت کریں۔ ب) نکلی کے چادر کی موصلیت $\sigma = 40 \frac{\text{MS}}{\text{m}}$ ہونے کی صورت میں Q حاصل کریں۔

جوابات: 17.5 mm ، $Q = 9544$

سوال 13.31: مساوات 13.269 حاصل کریں۔

حل: اسے ہو بہو E_{iy} کی طرز پر حاصل کیا جاسکتا ہے۔

سوال 13.32: مساوات 13.270 تا مساوات 13.272 حاصل کریں۔

سوال 13.33: ایک سرنگ کا قطر 7 m ہے۔ اس سرنگ سے کم سے کم کتنی تعدد کی موج گزر پائے گی۔

جواب: 25.1 MHz

باب 14

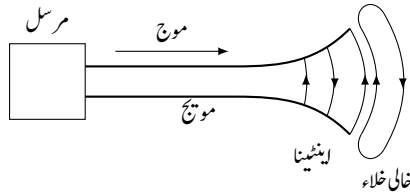
اینٹینا اور شعاعی اخراج

14.1 تعارف

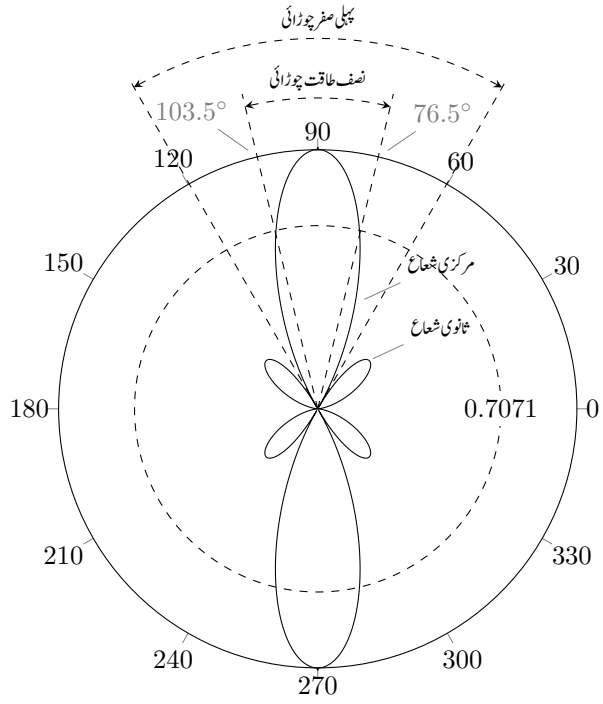
14.2 تاخیری دباؤ

کسی بھی اخراج شعاع کے نظام میں موج کے ترسیل کے لئے درکار دورانیہ اہمیت رکھتا ہے۔ یوں شکل 14.3 میں دکھائے تار میں برقی رو سے پیدا میدان کا اثر نقطہ N پر کچھ وقفے سے ہو گا۔ خالی خلاء میں یہ وقفہ موج کو تار سے نقطے تک پہنچنے کا دورانیہ $\frac{r}{c}$ ہے جہاں $c = 3 \times 10^8$ m/s خالی خلاء میں شعاع کی رفتار ہے۔ یوں N کے نقطہ نظر سے تار میں برقی رو

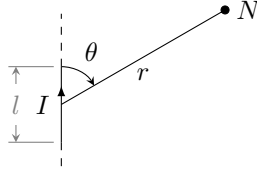
$$(14.1) \quad I = I_0 \cos \omega t$$



شکل 14.1: اینٹینا وہ عبوری خطہ ہے جہاں منضبط موج ترسیلی نظام سے نکل کر خلاء میں بطور آزاد موج خارج ہوتی ہے۔



شکل 14.2: اینٹینا کے شعاع کا نقشہ



شکل 14.3: برقی روگزارتی تار کی چھوٹی لمبائی

کی بجائے

$$(14.2) \quad [I] = I_0 \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right)$$

لکھی جاسکتی ہے جہاں $[I]$ تاخیری بوق دو¹ کہلاتی ہے۔ تاخیری تفاعل کو چکور قوسین میں بند لکھا جاتا ہے۔ تاخیری برقی رو لکھتے ہوئے وقت t کی جگہ تاخیری وقت $(t - \frac{r}{c})$ استعمال کیا جاتا ہے۔

مساوات 14.2 کہتا ہے کہ نقطہ N پر لمحہ t پر پیدا اثر، گزرے لمحے $(t - \frac{r}{c})$ پر تار میں برقی رو کا اثر ہے جہاں تار سے N تک فاصلہ r ہے۔ تار سے N تک شعاع پہنچنے کا دورانیہ $\frac{r}{c}$ ہے۔

گزشتہ بابوں میں امواج کی بات کرتے ہوئے $\cos(\omega t - \beta x)$ استعمال کیا گیا جس میں $\frac{\omega}{\beta} = c$ کے استعمال سے

$$(14.3) \quad \cos(\omega t - \beta x) = \cos \omega \left(t - \frac{x}{c} \right)$$

لکھا جاسکتا ہے جو تاخیری تفاعل کو ظاہر کرتی ہے۔

مساوات 14.2 کی دوری سمتیہ شکل

$$(14.4) \quad [I] = I_0 e^{j\omega(t-r/c)} = I_0 e^{j(\omega t - \beta r)}$$

ہے۔ اسی طرح کثافت برقی رو کی تاخیری دوری سمتیہ شکل

$$(14.5) \quad [J] = J_0 e^{j\omega(t-r/c)} = J_0 e^{j(\omega t - \beta r)}$$

retarded current¹

ہو گی جسے استعمال کرتے ہوئے تاخیری مقناطیسی دباو

$$(14.6) \quad [A] = \frac{\mu}{4\pi} \int_h \frac{[J]}{r} dh = \frac{\mu}{4\pi} \int_h \frac{J_0 e^{j\omega(t-r/c)}}{r} dh$$

لکھا جائے گا۔ اسی طرح تاخیری حجمی کثافت ہا

$$(14.7) \quad [\rho_h] = \rho_0 e^{j\omega(t-r/c)}$$

لکھتے ہوئے تاخیری برقی دباو

$$(14.8) \quad [V] = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_h \frac{[\rho_h]}{r} dh$$

لکھا جائے گا۔ باب-9 کے آخر میں مساوات 9.76 اور مساوات 9.75 کے بائیں ہاتھ کے تفاعل کو چکور تو سین میں لکھ کر موج کی رفتار c لیتے ہوئے اور فاصلے کو r سے ظاہر کرنے سے یہی مساوات حاصل ہوتے ہیں۔

ہم یہاں اصل موضوع سے ہٹ کر ایک تکمل پر غور کرتے ہیں جو اس باب میں بار بار استعمال کیا جائے گا۔

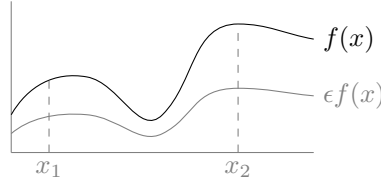
14.3 تکمل

شکل 14.4 میں تفاعل $f(x)$ دکھایا گیا ہے جس کا x_1 تا x_2 تکمل خط کے نیچے دو عمودی نقطہ دار لکیروں کے مابین رقبے کے برابر ہے۔ اس رقبے کو K کہتے ہوئے

$$(14.9) \quad \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = K$$

لکھا جاسکتا ہے۔ شکل میں ہلکی سیاہی میں $\frac{f(x)}{2}$ بھی دکھایا گیا ہے جسے $\epsilon f(x)$ لکھا گیا ہے جہاں $\epsilon = 0.5$ ہے۔ چونکہ x_1 تا x_2 کے ہر نقطے پر تفاعل کی قیمت آدھی ہے لہذا ہلکی سیاہی کے خط کے نیچے رقبہ $\frac{K}{2}$ ہو گا لہذا

$$(14.10) \quad \int_{x_1}^{x_2} \epsilon f(x) dx = \frac{K}{2} = \epsilon K$$



شکل 14.4: تقابل کا تکمیل

لکھا جائے گا۔ اب فرض کریں کہ $\epsilon(x)$ مستقل نہیں ہے بلکہ اس کی قیمت x پر منحصر ہے۔ مزید یہ کہ $\epsilon(x)$ کی قیمت 0 تا ϵ ممکن ہے۔ ایسی صورت میں x_1 تا x_2 پر $\epsilon(x)f(x)$ کی قیمت 0 تا $\epsilon f(x)$ ممکن ہے لہذا $\epsilon(x)f(x)$ کا تکمیل ϵK سے کم ہو گا یعنی

$$(14.11) \quad \int_{x_1}^{x_2} \epsilon(x)f(x) dx \leq \epsilon K$$

جہاں ہر جگہ $\epsilon(x) = 1$ کو بھی مد نظر رکھا گیا ہے۔ اگر $\epsilon \rightarrow 0$ ہو تب تکمیل قابل نظر انداز

$$(14.12) \quad \int_{x_1}^{x_2} \epsilon(x)f(x) dx \rightarrow 0 \quad (\epsilon \rightarrow 0)$$

ہو گا۔

آئیں اب $\frac{f(x)}{1+\epsilon}$ کے تکمیل

$$(14.13) \quad \int_{x_1}^{x_2} \frac{f(x)}{1+\epsilon} dx$$

پر غور کریں جہاں $\epsilon \rightarrow 0$ کے برابر ہے۔ ہم

$$(14.14) \quad \frac{1}{1+\epsilon} = (1+\epsilon)^{-1} = 1 - \frac{\epsilon}{1!} + \frac{\epsilon^2}{2!} - \frac{\epsilon^3}{3!} + \dots$$

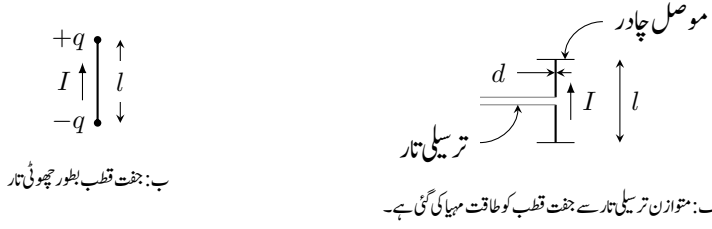
لکھ سکتے ہیں لہذا تکمیل

$$(14.15) \quad \int_{x_1}^{x_2} \left(1 - \frac{\epsilon}{1!} + \frac{\epsilon^2}{2!} - \frac{\epsilon^3}{3!} + \dots\right) f(x) dx$$

صورت اختیار کر لے گا۔ مساوات 14.12 کو استعمال کرتے ہوئے $\epsilon \rightarrow 0$ کی صورت میں اسے

$$(14.16) \quad \int_{x_1}^{x_2} \frac{f(x)}{1+\epsilon} dx = \int_{x_1}^{x_2} \left(1 - \frac{\epsilon}{1!} + \frac{\epsilon^2}{2!} - \frac{\epsilon^3}{3!} + \dots\right) f(x) dx \approx \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$$

لکھا جا سکتا ہے جو K کے برابر ہے۔



شکل 14.5: جفت قطب

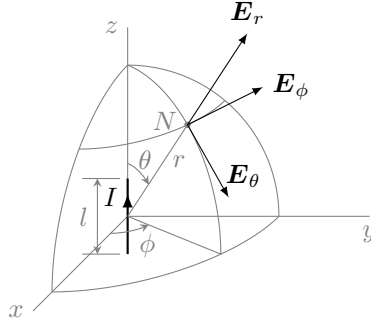
14.4 مختصر جفت قطبی اینٹینا

مختصر لمبائی کے سیدھے موصل تار کو عموماً مختصر جفت قطب² کہا جاتا ہے۔ مندرجہ ذیل گفتگو میں مختصر جفت قطب کی لمبائی محدود ہوگی۔ لامحدود حد تک کم لمبائی کی صورت میں اسے صغاری جفت قطب³ کہا جائے گا۔

خطی نوعیت کے کسی بھی اینٹینا کو متعدد تعداد کے سلسلہ وار جڑے مختصر جفت قطبوں کا مجموعہ تصور کیا جاسکتا ہے لہذا مختصر جفت قطب کی خاصیت جانتے ہوئے زیادہ لمبے جفت قطب یا مختلف انداز میں جڑے موصل تاروں کی خاصیت جاننے میں مدد ملے گی۔

آئیں شکل 14.5-الف میں دکھائے مختصر جفت قطب پر غور کریں جس کی لمبائی l طول موج سے بہت کم $\lambda \ll l$ ہے۔ جفت قطب کے سروں پر موصل چادر بطور برق گیر بوجھ کردار ادا کرتے ہیں۔ جفت قطب کی مختصر لمبائی اور اس کے سروں پر موصل چادر مل کر جفت قطب کی پوری لمبائی پر تقریباً برابر برقی رو رکھنے میں مدد دیتے ہیں۔ جیسے شکل-الف میں دکھایا گیا ہے، جفت قطب کو متوازن ترسیلی تار سے طاقت مہیا کی جاسکتی ہے۔ یہ فرض کرتے ہوئے کہ ترسیلی تار سے شعاعی اخراج نہیں ہوتی، اس کے موجودگی کو نظر انداز کیا جائے گا۔ جفت قطب کے سروں پر نسب موصل چادروں کے شعاعی اخراج کو بھی نظر انداز کیا جائے گا۔ جفت قطب کی موٹائی d اس کے لمبائی سے بہت کم $d \ll \lambda$ ہے۔ ان حقائق کو مد نظر رکھتے ہوئے تحلیلی تجزیے کی خاطر جفت قطب کو شکل 14.5-ب کی طرح تصور کیا جاسکتا ہے۔ ایسا جفت قطب یکساں برقی رو I گزارتا، l لمبائی کا تار معلوم ہو گا جس کے دونوں سروں پر برابر مگر الٹ قطب کے بار $\mp q$ ہوں۔ برق گیر پر بار q اور برقی رو I کا تعلق

$$(14.17) \quad I = \frac{\partial q}{\partial t}$$



شکل 14.6: جفت قطب محدود کے مرکز پر ہے۔ مرکز سے دور نقطہ N پر دور میدان کے اجزاء بھی دکھائے گئے ہیں۔

ہے۔

آئیں لا محدود وسعت کی خالی خلاء میں جفت قطب کے میدان حاصل کریں۔ جیسے شکل 14.6 میں دکھایا گیا ہے، جفت قطب کے وسط کو کروی محدود کے مرکز اور لمبائی کو z محدود پر رکھتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔ کسی بھی نقطہ N پر عموماً آپس میں عمودی تین میدان E_r ، E_θ اور E_ϕ پائے جائیں گے۔

کسی بھی نقطہ N پر مساوات 9.71 اور مساوات 9.73 بالترتیب مقناطیسی میدان اور برقی میدان دیتے ہیں

$$(14.18) \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{A}$$

$$(14.19) \quad \mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

جہاں

V نقطہ N پر مقدااری برقی دباؤ

A نقطہ N پر سمتی دباؤ

ہیں۔ اگر ہمیں کسی بھی نقطے پر مقدااری دباؤ V اور سمتی دباؤ A معلوم ہوں تب مندرجہ بالا دو مساوات سے اس نقطے پر برقی اور مقناطیسی میدان حاصل کئے جاسکتے ہیں۔ چونکہ ہمیں جفت قطب سے دور میدان درکار ہیں لہذا ایسی

short dipole²
infinitesimal³

صورت میں مساوات 14.6 اور مساوات 14.8 میں دئے تاخیری دباؤ قابل استعمال ہوں گے۔ یوں ان مساوات کو

$$(14.20) \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times [\mathbf{A}]$$

$$(14.21) \quad \mathbf{E} = -\nabla[V] - \frac{\partial[\mathbf{A}]}{\partial t} = -\nabla[V] - j\omega[\mathbf{A}]$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں مساوات 9.59 اور مساوات 9.60 سے تاخیری دباؤ

$$(14.22) \quad [\mathbf{A}] = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_h \frac{\mathbf{J}_0 e^{j\omega(t-r/c)}}{r} dh$$

$$(14.23) \quad [V] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_h \frac{\rho_0 e^{j\omega(t-r/c)}}{r} dh$$

لکھے جاسکتے ہیں۔

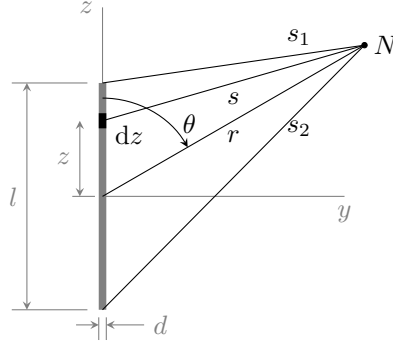
کسی بھی برقی بار اور برقی رو سے پیدا میدان مساوات 14.20 اور مساوات 14.21 سے حاصل کئے جاسکتے ہیں۔ مساوات 14.23 کے تحت تاخیری مقداری دباؤ $[V]$ صرف ساکن باروں پر منحصر ہے جبکہ مساوات 14.22 کے تحت تاخیری سمتی دباؤ $[\mathbf{A}]$ صرف برقی رو یعنی حرکت کرتے باروں پر منحصر ہے۔ مساوات 14.20 کے تحت مقناطیسی میدان \mathbf{H} صرف برقی رو یعنی حرکت کرتے باروں پر منحصر ہے جبکہ مساوات 14.21 کے تحت برقی میدان \mathbf{E} ساکن بار اور برقی رو دونوں پر منحصر ہے۔ ہم جلد مساوات 14.46 میں دیکھیں گے کہ کسی بھی بار اور برقی رو سے دور پیدا مقناطیسی اور برقی میدانوں کا دارومدار صرف برقی رو پر ہوتا ہے۔ چونکہ اس باب میں تاخیری دباؤ ہی استعمال کئے جائیں گے لہذا انہیں چکوری قوسین میں لکھنے سے گریز کیا جائے گا۔ اس باب میں یہاں سے آگے بغیر چکوری قوسین کے دباؤ کو تاخیری دباؤ ہی سمجھا جائے۔

شکل 14.6 یا شکل 14.7 سے ظاہر ہے کہ سمتی دباؤ کا صرف a_z جزو

$$(14.24) \quad \mathbf{A} = \frac{\mathbf{a}_z \mu_0}{4\pi} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{I_0 e^{j(\omega t - \beta s)}}{s} dz$$

پایا جاتا ہے۔ اگر جفت قطب کی لمبائی l ، نقطہ N سے جفت قطب تک فاصلہ r سے نہایت کم $r \ll l$ اور طول موج λ سے بھی نہایت کم $l \ll \lambda$ ہو تب مندرجہ بالا مساوات میں متغیر فاصلہ s کی جگہ مستقل فاصلہ r پر کیا جاسکتا ہے⁴ اور ساتھ ہی ساتھ l پر مختلف نقطوں سے N پر پیدا دباؤ میں زاویائی فرق کو نظر انداز کیا جاسکتا ہے۔ اس طرح ان

⁴ جیسے حصہ 14.3 میں دکھایا گیا ہے۔



شکل 14.7: جنت قطب اور دور میدان۔

تمام کو تکمیل کے باہر لے جایا جاسکتا ہے۔ جنت قطب کی پوری لمبائی پر یک برابر برقی رو I_0 کی صورت میں I_0 کو بھی تکمیل کے باہر لے جایا جاسکتا ہے۔ یوں مندرجہ بالا مساوات سے

$$(14.25) \quad \mathbf{A} = \frac{\mathbf{a}_z \mu_0 I_0 l e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi r}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس مساوات کو کروی محدود میں یوں

$$\mathbf{A} = A_r \mathbf{a}_r + A_\theta \mathbf{a}_\theta + A_\phi \mathbf{a}_\phi$$

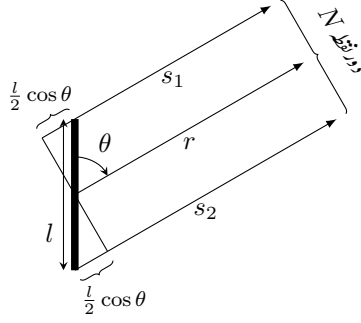
لکھا جائے گا جہاں

$$(14.26) \quad \begin{aligned} A_r &= \mathbf{a}_r \cdot \mathbf{A} = \frac{\mu_0 I_0 l e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi r} \mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}_z = \frac{\mu_0 I_0 l e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi r} \cos \theta \\ A_\theta &= \mathbf{a}_\theta \cdot \mathbf{A} = \frac{\mu_0 I_0 l e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi r} \mathbf{a}_\theta \cdot \mathbf{a}_z = -\frac{\mu_0 I_0 l e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi r} \sin \theta \\ A_\phi &= \mathbf{a}_\phi \cdot \mathbf{A} = \frac{\mu_0 I_0 l e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi r} \mathbf{a}_\phi \cdot \mathbf{a}_z = 0 \end{aligned}$$

ہوں گے جہاں اکائی سمتیت کے مقداری ضرب صفحہ 46 پر جدول 1.2 سے حاصل کئے گئے۔ اس طرح

$$(14.27) \quad \mathbf{A} = \frac{\mu_0 I_0 l e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi r} (\cos \theta \mathbf{a}_r - \sin \theta \mathbf{a}_\theta)$$

لکھا جائے گا۔



شکل 14.8: جفت قطب اور دور نقطے کے تعلق۔

ساکن بار جفت قطب کے سروں پر پایا جاتا ہے لہذا مقدراری دباو

$$(14.28) \quad V = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{e^{j(\omega t - \beta s_1)}}{s_1} - \frac{e^{j(\omega t - \beta s_2)}}{s_2} \right]$$

ہوگا جہاں مساوات 14.17 کے تحت

$$(14.29) \quad q = \int I dt = \frac{I}{j\omega}$$

کے برابر ہے جہاں

$$I = I_0 e^{j(\omega t - \beta s)}$$

$$q = q_0 e^{j(\omega t - \beta s)}$$

ہیں۔ مساوات 14.29 سے $q_0 = \frac{I_0}{j\omega}$ حاصل کرتے ہوئے مساوات 14.28 میں پر کرتے ہیں۔

$$(14.30) \quad V = \frac{I_0}{4\pi\epsilon_0 j\omega} \left[\frac{e^{j(\omega t - \beta s_1)}}{s_1} - \frac{e^{j(\omega t - \beta s_2)}}{s_2} \right]$$

شکل 14.8 کو دیکھ کر

$$s_1 = r - \frac{l}{2} \cos \theta$$

$$s_2 = r + \frac{l}{2} \cos \theta$$

لکھے جاسکتے ہیں جنہیں مساوات 14.30 میں پر کرتے

$$(14.31) \quad V = \frac{I_0 e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi\epsilon_0 j\omega} \left[\frac{(r + \frac{l}{2} \cos \theta) e^{j\frac{\beta l}{2} \cos \theta} - (r - \frac{l}{2} \cos \theta) e^{-j\frac{\beta l}{2} \cos \theta}}{r^2 - \frac{l^2}{4} \cos^2 \theta} \right]$$

ماتا ہے۔ چکور توسین میں شرح کے نچلے حصے میں $l \gg r$ کی وجہ سے $\cos^2 \theta$ کو نظر انداز کرتے ہیں۔ مسئلہ ڈی موئے ور⁵ کے استعمال سے

$$(14.32) \quad V = \frac{I_0 e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi\epsilon_0 j\omega r^2} \left[\left(r + \frac{l}{2} \cos \theta \right) \left(\cos \frac{\beta l \cos \theta}{2} + j \sin \frac{\beta l \cos \theta}{2} \right) - \left(r - \frac{l}{2} \cos \theta \right) \left(\cos \frac{\beta l \cos \theta}{2} - j \sin \frac{\beta l \cos \theta}{2} \right) \right]$$

لکھا جائے گا۔ چونکہ $l \ll \lambda$ ہے لہذا

$$\cos \frac{\beta l \cos \theta}{2} = \cos \frac{\pi l \cos \theta}{\lambda} \approx 1$$

$$\sin \frac{\beta l \cos \theta}{2} \approx \frac{\beta l \cos \theta}{2}$$

ہوں گے، جنہیں مساوات 14.32 میں پر کرنے سے

$$(14.33) \quad V = \frac{I_0 l e^{j(\omega t - \beta r)} \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 c} \left(\frac{1}{r} + \frac{c}{j\omega r^2} \right)$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

I_0 برقی رو کا حیثہ یعنی اس کی زیادہ سے زیادہ قیمت، A

l جنت قطب کی لمبائی، m

ω زاویائی تعدد ($\omega = 2\pi f$)، اکائی rad/s۔ جہاں ہرٹز Hz میں تعدد f ہے

β زاویائی مستقل ($\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$)، اکائی rad/m

⁵ ($e^{j\alpha} = \cos \alpha + j \sin \alpha$) de Moivre's theorem

t وقت، s

θ جفت قطب اور جفت قطب سے نقطہ N تک سمتیہ کے مابین زاویہ

ϵ_0 خالی خلاء کا برقی مستقل، 8.854 pF/m

c خالی خلاء میں شعاع کی رفتار، $3 \times 10^8 \text{ m/s}$

j خیالی عدد $\sqrt{-1}$

r جفت قطب کے وسط سے نقطہ N تک فاصلہ، m

ہیں۔

مختصر جفت قطب کے وسط سے، $\lambda \ll l$ اور $r \ll l$ کی صورت میں، r فاصلے اور θ زاویے پر مساوات 14.27 سمتی دباؤ اور مساوات 14.33 مقدار کی دباؤ دیتے ہیں۔ کروی محدود میں مقدار کی دباؤ کی ڈھلوان

$$(14.34) \quad \nabla V = \frac{\partial V}{\partial r} \mathbf{a}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \mathbf{a}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \mathbf{a}_\phi$$

$$= \frac{I_0 l e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi \epsilon_0 c} \left[- \left(\frac{\cos \theta}{r^2} + \frac{2c \cos \theta}{j\omega r^3} \right) \mathbf{a}_r - \left(\frac{\sin \theta}{r^2} + \frac{c \sin \theta}{j\omega r^3} \right) \mathbf{a}_\theta \right]$$

کے برابر ہے۔ برقی میدان $\mathbf{E} = E_r \mathbf{a}_r + E_\theta \mathbf{a}_\theta + E_\phi \mathbf{a}_\phi$ کے اجزاء مساوات 14.21 کی مدد سے

$$E_r = -j\omega A_r - \frac{\partial V}{\partial r}$$

$$E_\theta = -j\omega A_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta}$$

$$E_\phi = -j\omega A_\phi - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi}$$

لکھے جاسکتے ہیں جن میں مطلوبہ تفاعل پر کرنے سے برقی میدان کے عمومی مساوات

$$(14.35) \quad E_r = \frac{I_0 l \cos \theta e^{j(\omega t - \beta r)}}{2\pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{cr^2} + \frac{1}{j\omega r^3} \right)$$

$$E_\theta = \frac{I_0 l \sin \theta e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{j\omega}{c^2 r} + \frac{1}{cr^2} + \frac{1}{j\omega r^3} \right) \quad \text{عمومی میدان}$$

$$E_\phi = 0$$

حاصل ہوتے ہیں۔

مقناطیسی میدان مساوات 14.20 سے حاصل ہوگی۔ کروی محدود میں سمتی دباؤ کی گردش

(14.36)

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial(A_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \right] \mathbf{a}_r + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(r A_\phi)}{\partial r} \right] \mathbf{a}_\theta + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \mathbf{a}_\phi$$

میں مساوات 14.26 پر کرنے سے مقناطیسی میدان کی عمومی مساوات

$$(14.37) \quad H_\phi = \frac{I_0 l \sin \theta e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi} \left(\frac{j\omega}{cr} + \frac{1}{r^2} \right) \quad \text{عمومی میدان}$$

$$H_r = 0$$

$$H_\theta = 0$$

حاصل ہوتے ہیں جہاں $B = \mu_0 H$ کا استعمال کیا گیا۔

مساوات 14.35 اور مساوات 14.37 کے تحت جنت قطب سے پیدا میدان کے صرف تین اجزاء E_r ، E_θ اور H_ϕ پائے جاتے ہیں۔ جنت قطب سے زیادہ فاصلے پر میدان کی مساوات میں ایسے اجزاء جن میں $\frac{1}{r^2}$ یا $\frac{1}{r^3}$ پایا جاتا ہو کو نظر انداز کیا جاسکتا ہے۔ یوں E_r قابل نظر انداز ہو گا لہذا $E_r \approx 0$ تصور کیا جائے گا جبکہ

$$(14.38) \quad E_\theta = \frac{I_0 l \sin \theta e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi \epsilon_0} \frac{j\omega}{c^2 r} = j \frac{30 I_0 \beta l}{r} \sin \theta e^{j(\omega t - \beta r)}$$

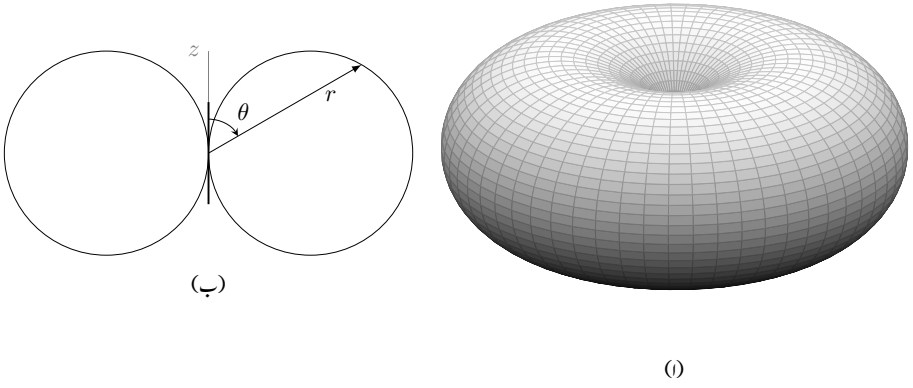
$$H_\phi = \frac{I_0 l \sin \theta e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi} \frac{j\omega}{cr} = j \frac{I_0 \beta l}{4\pi r} \sin \theta e^{j(\omega t - \beta r)} \quad \text{دور میدان}$$

ہوں گے۔ مساوات 14.38 استعمال کرتے ہوئے برقی اور مقناطیسی میدان کی شرح

$$(14.39) \quad \frac{E_\theta}{H_\phi} = \frac{1}{\epsilon_0 c} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 376.7 \Omega$$

حاصل ہوتی ہے جو خالی خلاء کی قدرتی رکاوٹ Z_0 ہے۔

یہاں اس حقیقت پر توجہ دیں کہ خالی خلاء میں TEM موج کی طرح، جنت قطب سے دور E_θ اور H_ϕ آپس میں ہم قدم ہیں۔ اس کے علاوہ دونوں میدان $\sin \theta$ کے راست تناسب ہیں یعنی جنت قطب کے محوری سمت $\theta = 0^\circ$



شکل 14.9: اندر سے شکل کا دور فاصلے پر میدان۔

پر ان کی قیمت صفر جبکہ $\theta = 90^\circ$ پر ان کی قیمت زیادہ سے زیادہ ہے۔ اندر سے ⁶ شکل کی ان میدان کو شکل 14.9- الف میں دکھایا گیا ہے جبکہ شکل-ب میں کارٹیسائی محدود کی سطح $x = 0$ پر دور میدان کا عمودی تراش دکھایا گیا ہے۔ شکل-الف میں اندر سے کے محور پر جفت قطب پایا جاتا ہے جسے شکل-ب میں z محدود پر موٹی لکیر سے ظاہر کیا گیا ہے۔

جفت قطب سے دور میدان حاصل کرتے وقت مساوات 14.35 اور مساوات 14.37 میں $\frac{1}{r^2}$ یا $\frac{1}{r^3}$ رکھتے اجزاء کو نظر انداز کیا گیا یعنی E_θ میں

$$\left| j \frac{\omega}{c^2 r} \right| \gg \frac{1}{cr^2}$$

$$\left| j \frac{\omega}{c^2 r} \right| \gg \left| \frac{1}{j\omega r^3} \right|$$

یا

$$(14.40) \quad r \gg \frac{c}{\omega}$$

تصور کیا گیا۔ اسی طرح H_ϕ میں بھی

$$\left| j \frac{\omega}{cr} \right| \gg \frac{1}{r^2}$$

یا

$$(14.41) \quad r \gg \frac{c}{\omega}$$

تصور کیا گیا جسے

$$(14.42) \quad r \gg \frac{1}{\beta} \quad (\text{دور میدان})$$

بھی لکھا جا سکتا ہے۔ اگر جفت قطب کے قریب میدان کی بات کی جائے تو $r \ll \frac{c}{\omega}$ یعنی $r \ll \frac{1}{\beta}$ لیا جائے گا۔ یوں مساوات 14.35 اور مساوات 14.37 میں

$$\begin{aligned} \frac{1}{cr^2} &\ll \left| \frac{1}{j\omega r^3} \right| \\ \left| \frac{j\omega}{c^2 r} \right| &\ll \left| \frac{1}{j\omega r^3} \right| \\ \frac{1}{cr^2} &\ll \left| \frac{1}{j\omega r^3} \right| \\ \left| \frac{j\omega}{cr} \right| &\ll \frac{1}{r^2} \end{aligned}$$

ہوں گے لہذا قریبی میدان

$$(14.43) \quad \begin{aligned} E_r &= \frac{I_0 l \cos \theta e^{j(\omega t - \beta r)}}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{j\omega r^3} = \frac{I_0 l \cos \theta e^{j(\omega t - \beta r - \frac{\pi}{2})}}{2\pi\epsilon_0 \omega r^3} \\ E_\theta &= \frac{I_0 l \sin \theta e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{j\omega r^3} = \frac{I_0 l \sin \theta e^{j(\omega t - \beta r - \frac{\pi}{2})}}{4\pi\epsilon_0 \omega r^3} \\ H_\phi &= \frac{I_0 l \sin \theta e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi} \frac{1}{r^2} = \frac{I_0 l \sin \theta e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi r^2} \quad \text{قریبی میدان} \end{aligned}$$

لکھے جا سکتے ہیں۔ کل قریبی برقی میدان

$$(14.44) \quad \mathbf{E} = E_r \mathbf{a}_r + E_\theta \mathbf{a}_\theta = \left[\frac{I_0 l \cos \theta}{2\pi\epsilon_0 \omega r^3} \mathbf{a}_r + \frac{I_0 l \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 \omega r^3} \mathbf{a}_\theta \right] e^{j(\omega t - \beta r - \frac{\pi}{2})}$$

ہو گا۔ مساوات 14.44 کے برقی میدان میں جزو ضربی $e^{j(\omega t - \beta r - \frac{\pi}{2})}$ پایا جاتا ہے جبکہ مقناطیسی میدان میں جزو ضربی $e^{j(\omega t - \beta r)}$ پایا جاتا ہے۔ یوں جفت قطب کے قریب کسی بھی نقطے پر ہر لمحہ برقی میدان اور مقناطیسی میدان میں $\frac{\pi}{2}$ زاویے کا فرق پایا جاتا ہے جو ساکن میدان کی نشانی ہے۔

جفت قطب کے قریب برقی اور مقناطیسی میدان میں لمحاتی طور $\frac{\pi}{2}$ ریڈین کا زاویہ پایا جاتا ہے جبکہ جفت قطب سے دور دونوں میدان لمحاتی طور پر ہم قدم ہیں لہذا کسی درمیانے فاصلے پر ان میدانوں میں 45° کا زاویہ ہو گا۔

یوں جفت قطب کے انتہائی قریب کسی بھی نقطے پر مقناطیسی اور برقی میدان میدان میں 90° کا زاویائی فرق پایا جاتا ہے۔ جفت قطب سے فاصلہ بڑھانے سے زاویائی فرق 45° ہو جاتا ہے جبکہ جفت قطب سے بہت دور دونوں میدان ہم قدم ہوتے ہیں۔ اسے تمام کو یوں بیان کیا جا سکتا ہے کہ فاصلہ بڑھانے سے برقی میدان وقت کی نسبت سے گھوم کر مقناطیسی میدان کے ہم قدم ہو جاتا ہے۔

مخلوط پوینٹنگ سمتیہ استعمال کرتے ہوئے مساوات 14.38 سے دور میدان میں کشافت توانائی

$$\mathcal{P}_{\text{اوسط}} = \frac{1}{2} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*]_{\text{حقیقی}} = \frac{1}{2} E_\theta H_\phi^* \mathbf{a}_r = \frac{15 I_0^2 \beta^2 l^2}{4\pi r^2} \sin^2 \theta \mathbf{a}_r \quad \text{دور کشافت طاقت}$$

حاصل ہوتی ہے جو رداسی r سمت میں منتقل ہوتی حقیقی توانائی ہے۔ یہی اینڈینا کی شعاعی اخراج ہے۔ شعاعی اخراج 90° پر زیادہ سے زیادہ ہے۔ اسی طرح پوینٹنگ سمتیہ استعمال کرتے ہوئے مساوات 14.43 سے قریبی میدان میں کشافت توانائی

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*]_{\text{حقیقی}} &= \frac{1}{2} [(E_r \mathbf{a}_r + E_\theta \mathbf{a}_\theta) \times H_\phi^* \mathbf{a}_\phi]_{\text{حقیقی}} \\ &= \frac{1}{2} \left[-\frac{I_0 l \cos \theta}{2\pi \epsilon_0 \omega r^3} \mathbf{a}_\theta + \frac{I_0 l \sin \theta}{4\pi \epsilon_0 \omega r^3} \mathbf{a}_r \right] \frac{I_0 l \sin \theta}{4\pi r^2} e^{-j\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

حاصل ہوتی ہے جس کا بیشتر حصہ خیالی ہے اور ساتھ ہی ساتھ شعاعی اخراج کے علاوہ یہاں θ سمت میں گھومتی طاقت بھی پائی جاتی ہے۔

آئیں اب نہایت کم تعدد پر صورت حال دیکھیں۔ مساوات 14.35 میں $I_0 = j\omega q_0$ پر کرتے ہوئے اور مساوات 14.37 کو جوں کا توں دوبارہ پیش کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} E_r &= \frac{q_0 l \cos \theta e^{j(\omega t - \beta r)}}{2\pi \epsilon_0} \left(\frac{j\omega}{cr^2} + \frac{1}{r^3} \right) \\ E_\theta &= \frac{q_0 l \sin \theta e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi \epsilon_0} \left(-\frac{\omega^2}{c^2 r} + \frac{j\omega}{cr^2} + \frac{1}{r^3} \right) \\ H_\phi &= \frac{I_0 l \sin \theta e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi} \left(\frac{j\omega}{cr} + \frac{1}{r^2} \right) \end{aligned}$$

$|e^{-j\beta r}| = 1$ لیتے ہوئے، صفر کے قریب تر تعدد $\omega \rightarrow 0$ پر ان مساوات سے میدان کی حتمی قیمت

$$\begin{aligned} E_r &= \frac{q_0 l \cos \theta}{2\pi\epsilon_0 r^3} \\ E_\theta &= \frac{q_0 l \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \\ H_\phi &= \frac{I_0 l \sin \theta}{4\pi r^2} \quad \text{نیم ساکن میدان} \end{aligned}$$

حاصل ہوتی ہیں جن سے برقی میدان

$$(14.45) \quad E = \frac{q_0 l}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos \theta \mathbf{a}_r + \sin \theta \mathbf{a}_\theta)$$

لکھا جاسکتا ہے۔ ان میدان کو نیم ساکن میدان⁷ کہا جاتا ہے۔ یہ صفحہ 158 پر حاصل کی گئی مساوات 4.67 ہی ہے۔ اسی طرح مندرجہ بالا مقناطیسی میدان H_ϕ کی قیمت صفحہ 278 پر مساوات 7.3 ہی ہے۔ چونکہ یہ میدان $\frac{1}{r^2}$ یا $\frac{1}{r^3}$ کے تعلق سے تبدیل ہوتے ہیں لہذا یہ جنت قطب کے قریب ہی پائے جاتے ہیں۔ جنت قطب سے دور ان کی قیمت قابل نظر انداز ہوتی ہے لہذا ان کا شعاعی اخراج میں خاص کردار نہیں ہوتا۔ بلند تعدد پر دور میدان جنہیں مساوات 14.38 پیش کرتی ہے، $\frac{1}{r}$ کے تعلق سے گھٹتی ہیں لہذا یہی شعاعی اخراج کو ظاہر کرتی ہیں اور یوں انہیں اخراجی میدان⁸ کہا جاتا ہے۔

مختصر جنت قطب، $r \ll \lambda$ اور $l \ll \lambda$ کے تمام میدان کو جدول 14.1 میں پیش کیا گیا ہے۔ بقایا اجزاء $E_\phi = H_r = H_\theta = 0$ برابر ہیں۔

مساوات 14.35 میں دیے E_θ میں $\frac{1}{r^2}$ اور $\frac{1}{r^3}$ رکھنے والے اجزاء برقی دباؤ V کے پیدا کردہ ہیں جو دور میدان میں قابل نظر انداز ہوتے ہیں۔ اگر ہماری دلچسپی صرف دور میدان میں ہو تب مطلوبہ میدان کو نہایت آسانی کے ساتھ صرف A سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ یوں مساوات 14.21 اور مساوات 14.26 سے

$$(14.46) \quad E_\theta = -j\omega A_\theta = -j\omega \left(-\frac{\mu_0 I_0 l e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi r} \sin \theta \right) = j \frac{30 I_0 \beta l}{r} \sin \theta e^{j(\omega t - \beta r)}$$

حاصل ہوتا ہے۔ مقناطیسی میدان H_ϕ کو مساوات 14.20 سے حاصل کیا جاسکتا ہے جہاں $\frac{1}{r^2}$ اجزاء رد کئے جائیں گے۔ مقناطیسی میدان کو نسبتاً زیادہ آسانی سے، لامحدود خلاء کی قدرتی رکاوٹ $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi$ استعمال

جدول 14.1: مختصر جنت قطب کے میدان

عمومی مساوات	دور میدان	نیم ساکن میدان	z
$\frac{I_0 l \cos \theta e^{j(\omega t - \beta r)}}{2\pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{cr^2} + \frac{1}{j\omega r^3} \right)$	0	$\frac{q_0 l \cos \theta}{2\pi \epsilon_0 r^3}$	E_r
$\frac{I_0 l \sin \theta e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{j\omega}{c^2 r} + \frac{1}{cr^2} + \frac{1}{j\omega r^3} \right)$	$\frac{j60\pi I_0 \sin \theta e^{j(\omega t - \beta r)}}{r} \frac{l}{\lambda}$	$\frac{q_0 l \sin \theta}{4\pi \epsilon_0 r^3}$	E_θ
$\frac{I_0 l \sin \theta e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi} \left(\frac{j\omega}{cr} + \frac{1}{r^2} \right)$	$\frac{jI_0 \sin \theta e^{j(\omega t - \beta r)}}{2r} \frac{l}{\lambda}$	$\frac{I_0 l \sin \theta}{4\pi r^2}$	H_ϕ

کرتے ہوئے

$$(14.47) \quad H_\phi = \frac{E_\theta}{Z_0} = j \frac{30 I_0 \beta l}{120 \pi r} \sin \theta e^{j(\omega t - \beta r)} = j \frac{I_0 \beta l}{4 \pi r} \sin \theta e^{j(\omega t - \beta r)}$$

سے بھی حاصل کیا جا سکتا ہے۔ چونکہ دور میدان کا دار و مدار جنت قطب کے بار q_0 پر ہرگز نہیں لہذا ان بار کا جاننا غیر ضروری ہے۔ کسی بھی اینڈینا کو متعدد مختصر جنت قطب کا مجموعہ تصور کیا جا سکتا ہے۔ یوں کسی بھی اینڈینا کے میدان تمام جنت قطب کے میدان کو جمع کرتے ہوئے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

مساوات 14.38 میں $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$ پر کرتے ہوئے دور برقی میدان کو

$$(14.48) \quad E_\theta = j60\pi I_0 \frac{l}{\lambda} \frac{1}{r} \sin \theta e^{j(\omega t - \beta r)}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اس مساوات کے اجزاء کو دور دور لکھتے ہوئے پہچاننے کی کوشش کرتے ہیں۔

$$(14.49) \quad E_\theta = j \quad 60\pi \quad I_0 \quad \frac{l}{\lambda} \quad \frac{1}{r} \quad \sin \theta \quad e^{j(\omega t - \beta r)}$$

زاویہ شکل فاصلہ لمبائی رو مقدار

لکھا جا سکتا ہے جہاں 60π مساوات کا مستقل ہے، I_0 برقی رو، $\frac{l}{\lambda}$ جنت قطب کی لمبائی جسے طول موج میں ناپا گیا ہے، $\frac{1}{r}$ فاصلے کو ظاہر کرتا ہے، $\sin \theta$ میدان کا نقش اور $e^{j(\omega t - \beta r)}$ زاویائی فرق ہے۔ کسی بھی اینڈینا کے میدان کو عموماً ان چھ اجزاء کے حاصل ضرب کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔

جدول 14.1 مختصر جنت قطب کے میدان دیتا ہے۔

14.5 مختصر جفت قطب کا اخراجی مزاحمت

اینٹینا کے گرد کسی بھی بند سطح پر مخلوط پوٹینٹنگ سمتیہ

$$(14.50) \quad \mathcal{P}_{\text{اوسط}} = \frac{1}{2} [E_s \times H_s^*]_{\text{حقیقی}}$$

کی سطحی تکمیل

$$(14.51) \quad P = \int_S \mathcal{P}_{\text{اوسط}} \cdot ds \quad (W)$$

کل شعاعی اخراج P دے گی۔ فی سیکنڈ خارج ہونے والی توانائی شعاعی اخراج کہلاتی ہے لہذا اس کی اکائی واٹ W ہے۔ سادہ ترین بند سطح کرہ ہے۔ یوں اینٹینا کو کروی محدود کے مرکز پر رکھتے ہوئے تکمیل حاصل کیا جائے گا۔ چونکہ دور میدان نسبتاً سادہ صورت رکھتے ہیں لہذا بند سطح کا رداس جتنا زیادہ رکھا جائے تکمیل کا حصول اتنا آسان ہو گا۔ یوں رداس زیادہ سے زیادہ رکھتے ہوئے، یعنی دور میدان استعمال کرتے ہوئے، جفت قطب کا شعاعی اخراج P حاصل کیا جاتا ہے۔

کامل اینٹینا کی صورت میں شعاعی اخراج اس برقی طاقت کے برابر ہو گا جو اینٹینا کے برقی سروں پر مہیا کی گئی ہو۔ اینٹینا کو مزاحمت R تصور کرتے ہوئے اس برقی طاقت کو $P = \frac{1}{2} I_0^2 R$ لکھا جاسکتا ہے جہاں I_0 سائن نما برقی رو کا حیظہ ہے۔ یوں

$$(14.52) \quad R = \frac{2P}{I_0^2} \quad (\Omega)$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں R اینٹینا کی اخراجی مزاحمت⁹ کہلاتی ہے۔

آئیں مختصر جفت قطب کی اخراجی مزاحمت حاصل کریں۔ دور میدان میں صرف E_θ اور H_ϕ پائے جاتے ہیں لہذا شعاعی اخراج

$$(14.53) \quad P = \frac{1}{2} \int_S [E_\theta H_\phi^*]_{\text{حقیقی}} ds$$

سے حاصل ہو گی جہاں H_ϕ^* مقناطیسی میدان H_ϕ کا جوڑی دار مخلوط ہے۔ اب $E_\theta = Z_0 H_\phi$ ہے لہذا

$$(14.54) \quad P = \frac{1}{2} \int_S [H_\phi H_\phi^* Z_0]_{\text{حقیقی}} ds = \frac{Z_0}{2} \int_S |H_\phi|^2 ds$$

یا

$$(14.55) \quad P = \frac{1}{2Z_0} \int_S |E_\phi|^2 ds$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں خالی خلاء کی قدرتی رکاوٹ $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi$ ہے۔ کروی محدود میں چھوٹی حجم اور چھوٹے رقبے لکھنا صفحہ 47 پر شکل 1.33 میں دکھایا گیا ہے۔ کرہ کی سطح پر چھوٹے رقبے کو کروی محدود میں $ds = r^2 \sin \theta d\theta d\phi$ لکھا جاتا ہے۔

جنت قطب کے میدان حاصل کرتے وقت فرض کیا گیا کہ اس کی پوری لمبائی پر ایک برابر برقی رو I_0 پائی جاتی ہے۔ ساتھ ہی ساتھ لمبائی l کے مختلف نقطوں کے میدان کا زاویائی فرق نظر انداز کیا گیا۔ جنت قطب کی پوری لمبائی پر برابر برقی رو نہ ہونے کی صورت میں مساوات 14.24 سے مساوات 14.25 حاصل ہونے کی بجائے

$$\begin{aligned} A &= \frac{\alpha_z \mu_0 e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi r} \int_{-l/2}^{l/2} i dz \\ &= \frac{\alpha_z \mu_0 I l e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi r} \end{aligned}$$

حاصل ہوگا جہاں I اوسط برقی رو ہے۔ اسی حقیقت کو مد نظر رکھتے ہوئے مساوات 14.38 سے مقناطیسی میدان کا

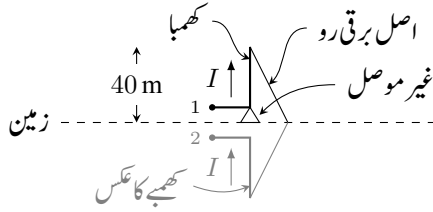
$$(14.56) \quad H_\phi = \frac{I\beta l}{4\pi r} \sin \theta$$

لکھتے ہوئے I_0 کی جگہ اوسط برقی رو I لکھی گئی ہے۔ مقناطیسی میدان کے اس حیطے کو مساوات 14.54 میں پر کرتے ہوئے زیادہ سے زیادہ اخراجی طاقت

$$\begin{aligned} P &= \frac{120\pi}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left(\frac{I\beta l}{4\pi r} \sin \theta \right)^2 r^2 \sin \theta d\theta d\phi \\ &= \frac{120\pi}{2} \left(\frac{\beta I l}{4\pi} \right)^2 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta d\phi \\ &= 80\pi^2 I^2 \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2 \end{aligned}$$

حاصل ہوتی ہے۔ مساوات 14.54 یا مساوات 14.55 برقی رو کی چوٹی I کی صورت میں اخراجی طاقت دیتے ہیں جو سائن نما برقی رو کی صورت میں اوسط اخراجی طاقت کے دگنا ہوتی ہے۔ یوں اوسط اخراجی طاقت

$$(14.57) \quad P_{\text{اوسط}} = 40\pi^2 I^2 \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2$$



شکل 14.10: کھمبا اینٹینا

ہو گی۔ مساوات 14.52 سے مختصر جفت قطب کی اخراجی مزاحمت

$$(14.58) \quad R = 80\pi^2 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \left(\frac{I}{I_0}\right)^2 \quad (\Omega)$$

حاصل ہوتی ہے۔

کسی بھی اینٹینا کی اخراجی مزاحمت

$$(14.59) \quad R = \frac{Z_0}{I_0^2} \int_S |H|^2 ds = \frac{1}{Z_0 I_0^2} \int_S |E|^2 ds$$

سے حاصل کی جاسکتی ہے جہاں $Z_0 = 120\pi$ کے برابر ہے۔

مثال 14.1: چالیس میٹر لمبے کھمبے اینٹینا کو موصل سطح پر کھڑا کئے 300 kHz کے تعدد پر استعمال کیا جاتا ہے۔ اسے برقی اشارہ نچلے سرے پر فراہم کیا جاتا ہے۔ اینٹینا کی اخراجی مزاحمت حاصل کریں۔ اس کھمبے کو شکل 14.10 میں دکھایا گیا ہے۔ کھمبے کو غیر موصل بنیاد پر کھڑا کیا گیا ہے۔

حل: موصل زمین میں کھمبا اینٹینا کا عکس بنتا ہے۔ درکار تعدد پر $\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \times 10^8}{300000} = 1000$ m ہے جو کھمبے کی لمبائی سے بہت زیادہ ہے۔ یوں اینٹینا اور اس کا عکس بطور مختصر جفت قطب کردار ادا کرتے ہیں۔ چونکہ کھمبے کے سر پر موصل چادر نسب نہیں کیا گیا ہے لہذا اس کے پورے لمبائی پر برابر برقی رو تصور کرنا غلط ہو گا۔ حقیقت میں، جیسے شکل میں وضاحت کی گئی ہے، کھمبے کے کھلے سر پر برقی رو صفر ہو گی جبکہ نچلے سر پر اس کی قیمت زیادہ سے زیادہ ہو گی۔ جیسا شکل میں دکھایا گیا ہے، برقی رو بالمتقابل لمبائی کا خط تکونی ہے۔ یوں اوسطاً برقی رو $I_{\text{وسط}} = \frac{I_0}{2}$ ہو گی جہاں برقی رو کی زیادہ سے زیادہ قیمت I_0 ہے۔

یوں 2×40 میٹر لمبے فرضی جفت قطب کی اخراجی مزاحمت مساوات 14.58 سے

$$80\pi^2 \left(\frac{2 \times 40}{1000} \right)^2 \left(\frac{0.5I_0}{I_0} \right)^2 = 1.2633 \Omega$$

حاصل ہوتی ہے۔ یہ مزاحمت حقیقی کھجے کے سر 1 اور عکسی کھجے کے سر 2 کے مابین ہے۔ یوں اصل اینڈینا کی اخراجی مزاحمت جو زمین اور 1 کے مابین ناپی جائے گی کی قیمت

$$(14.60) \quad R_{\text{اخراجی}} = \frac{0.63165}{2} = 0.63 \Omega$$

ہو گی۔

حقیقی دھات کامل موصل نہیں ہوتے لہذا کسی بھی دھات سے بنائے گئے جفت قطب میں توانائی کا ضیاع ہو گا۔ موصل کے علاوہ اینڈینا کے ساتھ منسلک ذو برق میں بھی طاقت کا ضیاع ہو گا۔ ان ضیاع کو مزاحمت فیعی R سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔ یوں اینڈینا کے برقی سروں پر کل مزاحمت

$$(14.61) \quad R = R_{\text{اخراجی}} + R_{\text{فیعی}}$$

ہو گی۔ مندرجہ بالا مثال میں اگر $R_{\text{فیعی}} = 0.63 \Omega$ ہوتا تب اینڈینا کی کارگزاری k^{10}

$$(14.62) \quad k = \frac{\text{اخراجی طاقت}}{\text{داخلی طاقت}} = \frac{R_{\text{اخراجی}}}{R_{\text{اخراجی}} + R_{\text{فیعی}}} \frac{0.63}{0.63 + 0.63} = 50\%$$

پچاس فی صد ہو گی۔ اگر طاقت کا ضیاع بڑھائے بغیر زیادہ لمبائی کا جفت قطب استعمال کیا جائے تو کارگزاری اس سے بہتر کی جاسکتی ہے۔

اینڈینا کو مکمل گھیرتی بند سطح پر مخلوط پوزیٹنگ سمتیہ کا سطحی تکمیل لینے سے حقیقی طاقت کے ساتھ ساتھ خیالی طاقت بھی حاصل ہوتا ہے۔ حقیقی طاقت اخراجی طاقت کو ظاہر کرتا ہے جبکہ خیالی طاقت متعامل جزو ہے۔ سطح تکمیل کی صورت اور مقام کا تکمیل کے حقیقی جزو پر کوئی اثر نہیں البتہ خیالی طاقت کا دار و مدار سطح کی صورت اور مقام پر ہے۔ اینڈینا سے بہت دور خیالی جزو قابل نظر انداز ہوتا ہے جبکہ اینڈینا کے قریب اس جزو کی مقدار بڑھ جاتی ہے۔ نہایت تیلی ساخت کے خطی اینڈینا کی صورت میں اگر سطح تکمیل کو بالکل سطح اینڈینا کے ساتھ ملا لیا جائے تب حاصل مخلوط طاقت تقسیم $I_0^2 R + jX$ رکاوٹ $R + jX$ دیتا ہے جہاں R اینڈینا کے اخراجی مزاحمت کو ظاہر کرتا ہے۔

14.6 ٹھوس زاویہ

اگلے حصے میں ٹھوس زاویہ¹¹ درکار ہو گا لہذا اسے پہلے سمجھتے ہیں۔

شکل 14.11- الف میں رداس r کے دائرے پر قوس کی لمبائی l اور رداس r کی شرح

$$(14.63) \quad \theta = \frac{l}{r} \quad (\text{rad})$$

زاویہ θ دیتی ہے جس کی اکائی ریڈین¹² (rad) ہے۔ یوں اکائی رداس کے دائرے پر اکائی لمبی قوس، دائرے کے مرکز پر، ایک ریڈین (1 rad) کا زاویہ بنائے گی۔ یہی اکائی ریڈین کی تعریف ہے۔ چونکہ دائرے کا محیط $2\pi r$ ہے لہذا دائرے کے گرد ایک مکمل چکر 2π ریڈین کے زاویے کو ظاہر کرتی ہے۔ اگرچہ مساوات 14.63 کے تحت θ دراصل بے بعد مقدار ہے، ہم اس کے باوجود اس کو فرضی اکائی ریڈین میں ناپتے ہیں۔ یوں x rad سے ظاہر ہوتا ہے کہ x زاویے کی بات کی جا رہی ہے۔

بالکل اسی طرح رداس r کے کرہ کی سطح پر کسی بھی رقبہ S اور کرہ کے رداس کے مربع r^2 کی شرح

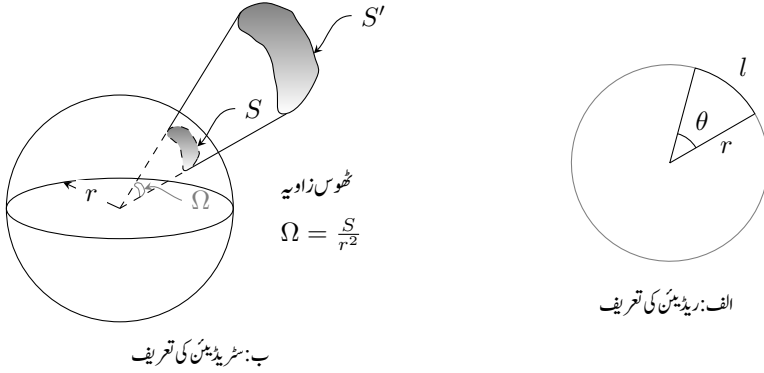
$$(14.64) \quad \Omega = \frac{S}{r^2} \quad (\text{sr})$$

ٹھوس زاویہ Ω دیتی ہے جسے مربع ریڈین یعنی سٹریڈین¹³ (sr) میں ناپا جاتا ہے۔ اکائی رداس کے کرہ پر اکائی رقبہ، کرہ کے مرکز پر، ایک سٹریڈین کا ٹھوس زاویہ بنائے گی۔ یہی سٹریڈین کی تعریف ہے۔ چونکہ کرہ کی سطح $4\pi r^2$ کے برابر ہے لہذا پوری کرہ 4π سٹریڈین کا ٹھوس زاویہ دیتی ہے۔ اگرچہ ٹھوس زاویہ بے بعد مقدار ہے، ہم اس کے باوجود اس کو فرضی اکائی سٹریڈین میں ناپتے ہیں۔ یوں مختلف اعداد کی بات کرتے وقت یہ جاننا ممکن ہوتا ہے کہ ٹھوس زاویے کی بات کی جا رہی ہے۔

شکل 14.11- ب میں عمومی رقبہ S' کا محدود کے مرکز پر ٹھوس زاویہ حاصل کرنے کا طریقہ دکھایا گیا ہے۔ مرکز سے دیکھتے ہوئے S' کا بیرونی خاکہ نظر آئے گا۔ اگر اس خاکے کے بیرونی کناروں سے مرکز تک ربڑی چادر کھینچ کر لگائی جائے تو یہ چادر رداس r کے کرہ کو کاٹے گی۔ کرہ کی سطح پر یوں رقبہ S گھیرا جائے گا۔ ٹھوس زاویہ

$$(14.65) \quad \Omega = \frac{S}{r^2}$$

solid angle¹¹
radian¹²
steradian¹³



شکل 14.11: ریڈین اور سٹریڈین کی تعریف

کے برابر ہو گا۔ اکائی رداس کے کرہ کی صورت میں رقبہ S کی قیمت ٹھوس زاویے کی قیمت کے برابر ہو گی۔

شکل 14.11- الف میں θ نظارے کے حدود کو ظاہر کرتا ہے۔ اسی طرح شکل 14.11- ب میں Ω نظارے کے حدود تعین کرتا ہے۔

شکل 14.11- الف میں دکھایا گیا زاویہ سطحی نوعیت کا ہے جسے ریڈین میں ناپا جاتا ہے۔ اس کے برعکس شکل 14.11- ب میں دکھایا گیا زاویہ حجمی نوعیت کا ہے جسے سٹریڈین یا ریڈین کے مربع میں ناپا جاتا ہے۔ یاد رہے کہ ایک مربع ریڈین کو ہی ایک سٹریڈین کہتے ہیں۔

$$(14.66) \quad 1 \text{ sr} = 1 \text{ rad}^2$$

کروی محدود میں r رداس کے کرہ کی سطح پر رقبے کو

$$(14.67) \quad S = \int_{\theta} \int_{\phi} r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi$$

لکھا جاسکتا ہے۔ یہ رقبہ کرہ کے مرکز پر

$$(14.68) \quad \Omega = \frac{S}{r^2} = \int_{\theta} \int_{\phi} \sin \theta \, d\theta \, d\phi \quad (\text{sr})$$

ٹھوس زاویہ بنائے گی۔

14.7 اخراجی رقبہ، سمتیت اور انفرانش

مختصر جفت قطب کے دور میدان میں صرف E_θ اور H_ϕ پائے جاتے ہیں جنہیں مساوات 14.38 میں پیش کیا گیا ہے۔ کسی بھی اینٹینا کی طرح اس کے دور میدان $\frac{1}{r}$ کی شرح سے گھٹتے ہیں لہذا پوائنٹنگ سمتیہ

$$(14.69) \quad \mathcal{P} = \frac{1}{2} [\mathbf{E}_s \times \mathbf{H}_s^*]_{\text{حقیقی}} = \frac{Z_0}{2} |H|^2 \mathbf{a}_r = \frac{1}{2Z_0} |E|^2 \mathbf{a}_r$$

$\frac{1}{r^2}$ کی شرح سے گھٹتے گی۔ یوں پوائنٹنگ سمتیہ کے رداسی جزو کو r^2 سے ضرب دینے سے $P(\theta, \phi)$

$$(14.70) \quad P(\theta, \phi) = r^2 \mathcal{P} = \frac{Z_0}{2} |H|^2 r^2 = \frac{1}{2Z_0} |E|^2 r^2 \quad (\text{W/sr})$$

حاصل ہوتی ہے جس کی قیمت فاصلہ r بڑھانے سے نہیں گھٹتی۔ $P(\theta, \phi)$ اخراجی شدت¹⁴ کہلاتی ہے۔ اخراجی شدت کے بُعد پر غور کریں۔ پوائنٹنگ سمتیہ طاقت کی کثافت یعنی طاقت فی رقبہ دیتی ہے۔ مساوات 14.64 سے رقبہ کو $S = \Omega r^2$ لکھا جا سکتا ہے۔ یوں پوائنٹنگ سمتیہ ضرب مربع رداس کا بُعد طاقت فی ٹھوس زاویہ W/sr بنتی ہے۔

اخراجی شدت کو تقابلی پذیر¹⁵ بنانے کی خاطر $P(\theta, \phi)$ کو اس کی زیادہ سے زیادہ قیمت بلندتر $\mathcal{P} = r^2 P(\theta, \phi)$ سے تقسیم کرتے ہوئے

$$(14.71) \quad P_n(\theta, \phi) = \frac{P(\theta, \phi)}{P(\theta, \phi)_{\text{بلندتر}}} \quad \text{بے بُعد}$$

بے بُعد¹⁶ مقدار $P_n(\theta, \phi)$ حاصل ہوتی ہے جو اینٹینا کی تقابلی پذیر نقش طاقت¹⁷ ہے۔

اینٹینا کی کل اخراج

$$(14.72) \quad \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathcal{P} r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi$$

ہے۔ اگر کثافت طاقت بلندتر \mathcal{P} ہو تب اتنی اخراج مکمل کرہ کی سطح کے بجائے کرہ کی سطح پر رقبہ S سے خارج ہوگی یعنی

$$(14.73) \quad \mathcal{P}_{\text{بلندتر}} S = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathcal{P} r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi$$

radiation intensity¹⁴normalized¹⁵dimensionless¹⁶normalized power pattern¹⁷

ہو گا۔ اس میں مساوات 14.64 کی مدد سے کرہ کی سطح پر رقبے کو ٹھوس زاویے کی صورت میں لکھتے ہوئے

$$\Omega_A = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\mathcal{P} r^2}{\mathcal{P}_{\text{بلند تر}} r^2} \sin \theta \, d\theta \, d\phi$$

یعنی

$$(14.74) \quad \Omega_A = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi P_n(\theta, \phi) r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi = \iint_{4\pi} P_n(\theta, \phi) \, d\Omega \quad (\text{sr})$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس مساوات کے تحت Ω_A ٹھوس زاویے پر یکساں زیادہ سے زیادہ طاقت خارج کرتے ہوئے اینٹینا پوری طاقت خارج کر سکتی ہے۔ Ω_A کو اخراجی ٹھوس زاویہ¹⁸ کہتے ہیں۔

مرکزی شعاع¹⁹ پر مکمل

$$(14.75) \quad \Omega_M = \iint P_n(\theta, \phi) \, d\Omega \quad (\text{sr})$$

مرکزی شعاع

لیتے ہوئے مرکزی ٹھوس زاویہ²⁰ حاصل کیا جاسکتا ہے۔ یوں ثانوی شعاع²¹ کے ٹھوس زاویہ Ω_m کو اخراجی ٹھوس زاویے اور مرکزی ٹھوس زاویے کے فرق

$$(14.76) \quad \Omega_m = \Omega_A - \Omega_M$$

سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ غیر سمیتی²² اینٹینا ہر سمت میں برابر اخراج کرتی ہے لہذا ہر سمت میں اس کا $P_n(\theta, \phi) = 1$ اور $\Omega_A = 4\pi$ ہو گا۔

اینٹینا کی دوسری اہم خاصیت اس کی سمیتیت²³ ہے۔ اخراجی اینٹینا کی زیادہ سے زیادہ اخراجی شدت اور اوسط اخراجی شدت کی شرح

$$(14.77) \quad D = \frac{\text{زیادہ سے زیادہ اخراجی شدت}}{\text{اوسط اخراجی شدت}} = \frac{P(\theta, \phi)_{\text{بلند تر}}}{P(\theta, \phi)_{\text{اوسط}}} \quad \text{بے بُعد}$$

beam solid angle¹⁸

main lobe¹⁹

major lobe solid angle²⁰

minor lobe²¹

isotropic²²

directivity²³

اس کی سمتیت کہلاتی ہے۔ کل اخراج W کو 4π سٹریڈین سے تقسیم کرنے سے اوسط اخراجی شدت اوسط $P(\theta, \phi)$ حاصل ہوتی ہے جبکہ اخراجی شدت $P(\theta, \phi)$ کا 4π سٹریڈین پر تکمیل لینے سے اینٹینا کی کل اخراج حاصل ہوتی ہے۔ یوں

$$\begin{aligned} D &= \frac{P(\theta, \phi)_{\text{بندتر}}}{W/4\pi} = \frac{4\pi P(\theta, \phi)_{\text{بندتر}}}{\int\int_{4\pi} P(\theta, \phi) d\Omega} \\ (14.78) \quad &= \frac{4\pi}{\int\int_{4\pi} \frac{P(\theta, \phi)}{P(\theta, \phi)_{\text{بندتر}}} d\Omega} \\ &= \frac{4\pi}{\int\int_{4\pi} P_n(\theta, \phi) d\Omega} \end{aligned}$$

لکھی جاسکتی ہے۔ مساوات 14.74 کے ساتھ موازنے کے بعد اسے

$$(14.79) \quad D = \frac{4\pi}{\Omega_A} \quad \text{بے بعد}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ یوں اینٹینا کی سمتیت سے مراد، کرہ کا ٹھوس زاویہ 4π تقسیم اینٹینا کی اخراجی ٹھوس زاویہ Ω ہے۔ سمتیت اینٹینا کی ایک منفرد خاصیت ہے۔ مخصوص ٹھوس زاویے میں طاقت مرکوز کرنے کی صلاحیت کی ناپ سمتیت ہے۔ سمتیت جتنی زیادہ ہوگی اینٹینا اتنی کم ٹھوس زاویے میں طاقت کو مرکوز کر پائے گا۔

مثال 14.2: غیر سمتی اینٹینا کی سمتیت حاصل کریں۔

حل: غیر سمتی اینٹینا ہر سمت میں یکساں اخراج کرتی ہے لہذا اس کا $P_n(\theta, \phi) = 1$ اور $\Omega_A = 1$ ہوں گے۔ یوں

$$(14.80) \quad D = \frac{4\pi}{\Omega_A} = 1$$

حاصل ہو گا۔ کسی بھی اینٹینا کی یہ کم سے کم ممکنہ سمتیت ہے۔

مثال 14.3: مختصر جفت قطب کی سمتیت حاصل کریں۔

حل: مساوات 14.38 استعمال کرتے ہوئے تقابلی پذیر نقش طاقت

$$(14.81) \quad P_n(\theta, \phi) = \frac{H_\phi^2(\theta, \phi)}{H_\phi^2(\theta, \phi)_{\text{بلندتر}}} = \sin^2 \theta$$

لکھی جاسکتی ہے۔ مساوات 14.74 سے

$$(14.82) \quad \Omega_A = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^2 \theta \, d\theta \, d\phi = \frac{8\pi}{3}$$

اور یوں مساوات سے

$$(14.83) \quad D = \frac{4\pi}{\Omega} = \frac{3}{2}$$

حاصل ہوتا ہے۔ یوں غیر سمتی اینٹینا کی نسبت سے مختصر جفت قطب کی زیادہ سے زیادہ اخراج $\frac{3}{2}$ گنا زیادہ ہے۔

سمتیت کا دارومدار صرف اور صرف دور میدان کی نقش پر ہے۔ اس میں اینٹینا کی کارگزاری شامل نہیں ہے۔ اس کے برعکس اینٹینا کی کارگزاری، اینٹینا کی افزائش طاقت یا افزائش²⁴ پر اثر انداز ہوتی ہے۔ اینٹینا کی افزائش سے مراد

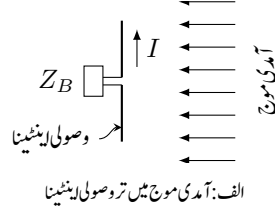
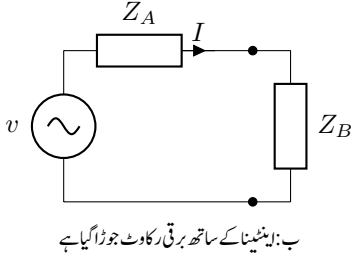
$$(14.84) \quad \text{آزمائشی اینٹینا کی زیادہ سے زیادہ اخراجی شدت} \\ \text{حوالہ اینٹینا کی زیادہ سے زیادہ اخراجی شدت} = G = \text{افزائش}$$

ہے جہاں دونوں اینٹینوں کی داخلی طاقت برابر ہے۔ کسی بھی اینٹینا کو بطور حوالہ اینٹینا لیا جاسکتا ہے۔ اگر ہم بے ضیاع، غیر سمتی اینٹینا کو حوالہ تصور کریں تب

$$(14.85) \quad G_0 = \frac{P'_m}{P_0}$$

ہو گا جہاں

gain²⁴



شکل 14.12: وصولی اینٹینا آمدی موج سے طاقت حاصل کر کے برقی رکاوٹ کو فراہم کرتی ہے۔

P'_m آزمائشی اینٹینا کی زیادہ سے زیادہ اخراجی شدت،

P_0 بے ضیاع، غیر سمتی اینٹینا کی اخراجی شدت

ہیں۔ یاد رہے کہ غیر سمتی اینٹینا ہر سمت میں یکساں اخراج کرتی ہے لہذا اس کی زیادہ سے زیادہ شدت اور اوسط اخراجی شدت برابر ہوتے ہیں۔ آزمودہ اینٹینا کی اخراجی شدت P'_m اور کامل اینٹینا کی اخراجی شدت P_m کی شرح اینٹینا کی کارگزاری k دیتی ہے۔ یہ وہی k ہے جسے مساوات 14.62 میں بھی حاصل کیا گیا۔ یوں

$$(14.86) \quad G_0 = \frac{kP_m}{P_0} = kD$$

حاصل ہوتا ہے۔ یہ مساوات کہتی ہے کہ کسی بھی کامل اینٹینا ($k = 100\%$) کی افزائش، کامل غیر سمتی اینٹینا کی نسبت سے، اسی اینٹینا کی سمتیت کے برابر ہوتی ہے۔ غیر کامل $k < 100\%$ اینٹینا کی صورت میں افزائش کی قیمت سمتیت سے کم ہوگی۔

سمتیت کی قیمت 1 تا ∞ ممکن ہے۔ سمتیت کی قیمت اکائی سے کم نہیں ہو سکتی۔ اس کے برعکس افزائش کی قیمت صفر تا لامحدود ممکن ہے۔

$$1 \leq D \leq \infty$$

$$0 \leq G \leq \infty \quad \text{ممكنہ قیمت}$$

اخراجی اینٹینا²⁵ شعاعی اخراج کرتی ہے۔ اس کے برعکس وصولی اینٹینا²⁶ شعاع سے طاقت وصول کرتی ہے۔ برقی و مقناطیسی امواج جب وصولی اینٹینا پر پہنچتے ہیں تو وصولی اینٹینا ان سے طاقت حاصل کرتی ہے۔ اگر اینٹینا کے برقی

²⁵ transmitting antenna
²⁶ receiving antenna

سروں پر بیرونی مزاحمت R_B نسب کی جائے تو حاصل کردہ طاقت کا کچھ حصہ اس مزاحمت میں ضائع ہو گا۔ ہم چونکہ بیرونی مزاحمت کو فراہم طاقت $W = I^2 R_B$ میں دلچسپی رکھتے ہیں لہذا اسی کی بات کرتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔ بیرونی مزاحمت کو فراہم طاقت $I^2 R_B$ کے برابر طاقت آمدی موج کے رقبہ S میں پایا جاتا ہے۔ یوں

$$(14.87) \quad \mathcal{P}S = I^2 R_B$$

لکھا جا سکتا ہے۔ ہم فرض کرتے ہیں کہ اینٹینے کا رقبہ S ہی ہے اور اینٹینا اتنے رقبے پر آمدی موج سے مکمل طاقت حاصل کرنے اور اسے بیرونی برقی سروں تک منتقل کرنے کی صلاحیت رکھتی ہے۔ اس فرضی رقبے کو وصولی رقبہ²⁷ کہا جاتا ہے۔ یوں وصولی رقبے کو

$$(14.88) \quad S = \frac{I^2 R_B}{\mathcal{P}}$$

سے حاصل کیا جا سکتا ہے جہاں

S اینٹینا کا فرضی رقبہ، m^2

I موثر برقی رو، A

\mathcal{P} آمدی موج کا پونٹنگ سمتیہ، W/m^2

R_L برقی مزاحمت، Ω

ہیں۔ حقیقت میں اینٹینا $I^2 R_B$ سے زیادہ طاقت حاصل کرتی ہے جس کا کچھ حصہ اینٹینا کے اندر ہی ضائع ہو جاتا ہے۔ ہمیں اینٹینا کے اندر ضائع ہونے والے طاقت سے کوئی دلچسپی نہیں ہے۔

شکل 14.12- الف میں آمدی موج میں تر اینٹینا دکھایا گیا ہے جسے بیرونی برقی رکاوٹ Z_B کے ساتھ جوڑا گیا ہے۔ اینٹینا کا تھونن²⁸ مساوی دور استعمال کرتے ہوئے، شکل-ب میں اسی کا مکمل برقی دور دکھایا گیا ہے۔ اس دور میں سلسلہ وار برقی رو

$$I = \frac{v}{Z_A + Z_B} = \frac{v}{R_A + R_B + j(X_A + X_B)}$$

ہو گی جہاں

antenna aperture²⁷
Thevenin equivalent circuit²⁸

v اینٹینا میں آمدی موج سے پیدا موثر برقی دباؤ،

R_A اینٹینا کے تھونن مساوی دور میں اینٹینا کی مزاحمت،

X_A تھونن دور میں اینٹینا کی متعاملیت،

R_B بیرونی مزاحمت،

X_B بیرونی متعاملیت

ہیں۔ یوں بیرونی مزاحمت کو مہیا طاقت

$$(14.89) \quad |I|^2 R_B = \frac{v^2 R_B}{(R_A + R_B)^2 + (X_A + X_B)^2}$$

ہو گا جس سے اینٹینے کا رقبہ وصولی

$$(14.90) \quad S = \frac{v^2 R_B}{\mathcal{P} [(R_A + R_B)^2 + (X_A + X_B)^2]}$$

حاصل ہوتا ہے۔

آمدی موج کی نسبت سے ایک مخصوص انداز میں رکھے ہوئے اینٹینا میں زیادہ سے زیادہ برقی دباؤ پیدا ہو گا۔ اسی جگہ اینٹینا کو رکھتے ہوئے بیرونی مزاحمت میں زیادہ سے زیادہ طاقت اس صورت منتقل ہو گی جب

$$(14.91) \quad R_B = R_A$$

$$(14.92) \quad X_B = -X_A$$

ہوں۔ بے ضیاع اینٹینا کی تھونن مزاحمت دراصل اینٹینا کی اخراجی مزاحمت R_r ہی ہے۔ اس طرح بیرونی مزاحمت میں زیادہ سے زیادہ طاقت منتقل کرتے وقت زیادہ سے زیادہ وصولی رقبہ

$$(14.93) \quad S_{\text{اخراجی}} = \frac{v^2}{4\mathcal{P}R_r}$$

حاصل ہو گا جسے اینٹینا کا اخراجی رقبہ $S_{\text{اخراجی}}$ ²⁹ پکارا جاتا ہے۔ ہر اینٹینا مخصوص قیمت کا اخراجی رقبہ رکھتا ہے۔

مثال 14.4: پورے مختصر جفت قطب پر یکساں برقی رو تصور کرتے ہوئے، اس کا اخراجی رقبہ حاصل کریں۔

حل: مساوات 14.93 سے ظاہر ہے کہ اخراجی رقبہ دریافت کرنے کے لئے، اینٹینا میں پیدا ہونے والی برقی دباؤ v ، اینٹینا کی اخراجی مزاحمت R_r اور آمدی موج میں کثافت طاقت \mathcal{P} درکار ہوں گے۔ جفت قطب میں زیادہ سے زیادہ برقی دباؤ اس صورت پیدا ہوگی جب اینٹینا کی تار اور آمدی موج کا برقی میدان متوازی ہوں۔ ایسی صورت میں اینٹینا میں

$$(14.94) \quad v = El$$

برقی دباؤ پیدا ہوگی۔ آمدی موج کی پوائنٹنگ سمتیہ

$$(14.95) \quad \mathcal{P} = \frac{E^2}{Z_0} \quad (\text{W/m}^2)$$

ہے جہاں $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} = 120\pi$ خالی خلاء کی قدرتی رکاوٹ ہے۔ مساوات 14.58 میں $I = I_0$ پر کرنے سے موجودہ جفت قطب کی اخراجی مزاحمت

$$(14.96) \quad R_r = 80\pi^2 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2$$

حاصل ہوتی ہے۔ ان تمام کو مساوات 14.93 میں پر کرتے ہوئے

$$(14.97) \quad S_{\text{اخراجی}} = \frac{E^2 l^2}{4 \frac{E^2}{Z_0} 80\pi^2 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2} = \frac{3\lambda^2}{8\pi} = 0.119\lambda^2 \quad (\text{m}^2)$$

یوں کامل مختصر جفت قطب کی لمبائی جتنی بھی کم کیوں نہ ہو یہ ہر صورت $0.119\lambda^2$ اخراجی رقبے پر آمدی موج سے تمام طاقت حاصل کرنے اور اسے بیرونی مزاحمت تک منتقل کرنے کی صلاحیت رکھتا ہے۔ حقیقی جفت قطب غیر کامل ہو گا لہذا اس کی مزاحمت $R_{\text{نوع}} + R_{\text{اخراجی}}$ ہوگی۔ یوں کامل جفت قطب کا اخراجی رقبہ کچھ کم ہوگا۔

آئیں ایسے اینٹینا کی بات کریں جس کا اخراجی رقبہ $S_{\text{اخراجی}}$ اور اخراجی ٹھوس زاویہ Ω_A ہو۔ اخراجی رقبے پر یکساں برقی میدان E_m کی صورت میں اخراجی طاقت

$$(14.98) \quad P = \frac{E_m^2}{Z} S_{\text{اخراجی}}$$

ہو گا جہاں Z انتقالی خطے کی قدرتی رکاوٹ ہے۔

اگر r فاصلے پر میدان E_r ہو تب اخراجی طاقت

$$(14.99) \quad P = \frac{E_r^2}{Z} r^2 \Omega_A$$

ہو گا۔

ہم آگے جا کر مساوات 14.155 حاصل کریں گے جس کے تحت $E_r = \frac{E_m S_{\text{اخراجی}}}{r \lambda}$ ہے۔ اس نتیجے کو استعمال کرتے ہوئے مندرجہ بالا دو مساوات کو برابر لکھتے ہوئے

$$(14.100) \quad \lambda^2 = S_{\text{اخراجی}} \Omega_A \quad (\text{m}^2)$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

λ طول موج،

$S_{\text{اخراجی}}$ اینٹینا کا اخراجی رقبہ اور

Ω_A اینٹینا کا اخراجی ٹھوس زاویہ

ہیں۔ اس مساوات کے تحت اینٹینا کا اخراجی رقبہ ضرب اخراجی ٹھوس زاویہ برابر ہوتا ہے طول موج کا مربع۔ یوں اگر ہمیں اخراجی رقبہ معلوم ہو تب ہم اخراجی ٹھوس زاویہ حاصل کر سکتے ہیں اور اگر اخراجی ٹھوس زاویہ معلوم ہو تب اخراجی رقبہ حاصل کیا جاسکتا ہے۔

مساوات 14.79 میں مساوات 14.100 پر کرنے سے

$$(14.101) \quad D = \frac{4\pi}{\lambda^2} S_{\text{اخراجی}}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ سمتیت کی یہ تیسری مساوات ہے۔ تینوں کو یہاں دوبارہ پیش کرتے ہیں

$$D = \frac{P(\theta, \phi) \text{ بلند تر}}{P_{\text{اوسط}}}$$

$$D = \frac{4\pi}{\Omega}$$

$$D = \frac{4\pi}{\lambda^2} S_{\text{اخراجی}}$$

جہاں پہلی دو مساوات میں سمتیت اخراجی شعاع کے نقش سے حاصل کی گئی ہے جبکہ تیسری مساوات میں اسے اخراجی رقبے سے حاصل کیا گیا ہے۔

14.8 قطاری ترتیب

مسئلہ اینٹینا دراصل اینٹینا کے مختلف حصوں سے پیدا میدانوں کا درست مجموعہ حاصل کرنا ہے۔ اینٹینا کے مختلف حصوں کے میدان جمع کرتے ہوئے ان کے انفرادی حصے اور زاویائی فرق کا خیال رکھنا ضروری ہے۔

14.8.1 غیر سمتی، دو نقطہ منبع

دو عدد نقطہ منبع کو شکل میں دکھایا گیا ہے۔ دونوں منبع غیر سمتی ہیں اور ان کے درمیان فاصلہ d ہے۔ نقطہ منبع سے مراد ایسی فرضی منبع ہے جس کا حجم صفر کے برابر ہو۔ ہم آگے چل کر مسئلہ متکافیت³⁰ دیکھیں گے جس کے تحت نقطہ منبع کے قطاروں کا اخراجی نقش اور انہیں کا وصولی نقش بالکل یکساں ہوتے ہیں۔

ہم فرض کرتے ہیں کہ دونوں منبع برابر حصے اور ہم قدم میدان پیدا کرتے ہیں۔ دونوں میدان کے خطی تقطیب ہیں۔ مزید یہ کہ دونوں کے E میدان صفحے کے عمودی ہیں۔ دونوں منبع سے برابر فاصلے پر ان کے بالکل درمیانے مقام پر زاویائی صفر تصور کرتے ہوئے، دور میدان کو

$$E = E_2 e^{j\frac{\psi}{2}} + E_1 e^{-j\frac{\psi}{2}}$$

(14.103)

لکھا جا سکتا ہے جہاں

$$(14.104) \quad \psi = \beta d \cos \theta = \frac{2\pi d}{\lambda} \cos \theta$$

ہے۔ ان مساوات میں

E_1 منبع-1 کا زاویہ θ سمت میں دور میدان،

E_2 منبع-2 کا زاویہ θ سمت میں دور میدان اور

ψ دونوں اشارات کا زاویہ θ کی سمت میں زاویائی فرق

ہیں۔ دونوں دور میدان برابر ($E_1 = E_2$) ہونے کی صورت میں یوں

$$(14.105) \quad E = E_1 \left(e^{j\frac{\psi}{2}} + e^{-j\frac{\psi}{2}} \right) = 2E_1 \cos \frac{\psi}{2}$$

ہو گا۔ فاصلہ $d = \frac{\lambda}{2}$ کی صورت میں میدان کو شکل میں دکھایا گیا ہے۔

اگر زاویائی صفر کو دونوں منبع کے درمیانے مقام کی جگہ منبع-1 پر چنا جاتا تب دور میدان

$$(14.106) \quad \begin{aligned} E &= E_1 + E_2 e^{j\psi} \\ &= \left(E_1 e^{-j\frac{\psi}{2}} + E_2 e^{j\frac{\psi}{2}} \right) e^{j\frac{\psi}{2}} \end{aligned}$$

حاصل ہوتا جو $E_1 = E_2$ کی صورت میں

$$(14.107) \quad E = 2E_1 \cos \frac{\psi}{2} e^{j\frac{\psi}{2}} = 2E_1 \cos \frac{\psi}{2} \angle \frac{\psi}{2}$$

حاصل ہوتا۔ میدان کا نقش چونکہ میدان کے حیطے پر منحصر ہوتا ہے لہذا اس میں کوئی تبدیلی رونما نہیں ہوئی البتہ میدان کا زاویہ تبدیل ہو گیا ہے۔ میدان کے زاویے کی تبدیلی کی وجہ یہ ہے کہ ہم نے زاویے کے صفر کو دونوں منبع کے درمیانے مقام سے ہٹا کر منبع-1 پر چنا ہے۔

14.8.2 ضرب نقش

گزشتہ حصے میں بالکل یکساں دو عدد غیر سمی نقطہ منبع کے میدان پر غور کیا گیا۔ اگر نقطہ منبع سمی ہوں اور دونوں کے نقش بالکل یکساں ہوں تب بھی مساوات 14.105 (یا مساوات 14.107) ہی ان کا مجموعی میدان دے گا پس فرق اتنا ہے کہ اب E_1 از خود θ کا تفاعل $E(\theta)$ ہے۔ انفرادی منبع کے نقش $E(\theta)$ کو انفرادی نقش³¹ جبکہ $\cos \frac{\psi}{2}$ کو قطاری نقش³² کہا جائے گا۔ یوں

$$(14.108) \quad E = E(\theta) \cos \frac{\psi}{2}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ مساوات 14.108 ضرب نقش³³ کا اصول بیان کرتا ہے جس کے تحت انفرادی منبع کا نقش اور غیر سمی نقطہ منبع کے قطار کا نقش ضرب دینے سے سمی منبع کے قطار کا نقش حاصل ہوتا ہے۔ یہاں فرض کیا گیا ہے کہ قطار میں انفرادی نقطہ منبع کا نقش وہی ہے جو اس نقطہ منبع کا تنہائی میں نقش ہوتا ہے۔

14.8.3 ثنائی قطار

مساوات 14.107 دو غیر سمی زاویائی طور پر ہم قدم نقطہ منبع کے جوڑی کا دور میدان دیتا ہے۔ نقطہ منبع کے درمیان فاصلہ $\frac{\lambda}{2}$ اور $E_1 = \frac{1}{2}$ ہونے کی صورت میں اس مساوات کو

$$(14.109) \quad E = \cos \left(\frac{\pi}{2} \cos \theta \right)$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس نقش کو شکل میں دکھایا گیا ہے جس میں کوئی ثانوی شعاع نہیں پایا جاتا۔ اس جوڑی منبع کے سیدھ میں $\frac{\lambda}{2}$ فاصلے پر منبع کی دوسری جوڑی رکھنے سے شکل-ب حاصل ہوتا ہے۔ اس شکل میں دو درمیانے منبع دراصل ایک ہی نقطے پر پائے جائیں گے لیکن وضاحت کی خاطر انہیں اوپر نیچے دکھایا گیا ہے۔ ضرب نقش کے اصول کے تحت ان کا مجموعی میدان

$$(14.110) \quad E = \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} \cos \theta \right)$$

primary pattern³¹
array pattern³²
pattern multiplication³³

ہو گا جسے شکل میں دکھایا گیا ہے۔ اس مساوات پر شق کرنے والوں کے لئے مثال میں تفصیلی ثبوت پیش کیا گیا ہے۔

اس قطار کو تین عدد منبع کی قطار تصور کیا جا سکتا ہے جہاں قطار میں بالترتیب، منبع کی طاقت (1 : 2 : 1) نسبت سے ہے۔ اس تین رکنی قطار کے سیدھ میں لیکن $\frac{1}{2}$ ہٹ کر بالکل ایسی ہی تین رکنی قطار رکھنے سے شکل حاصل ہوتی ہے۔ اس نئی قطار کو چار رکنی تصور کیا جا سکتا ہے جہاں بالترتیب منبع کی طاقت (1 : 3 : 3 : 1) نسبت سے ہے۔ اس چار رکنی قطار کا میدان

$$(14.111) \quad E = \cos^3 \left(\frac{\pi}{2} \cos \theta \right)$$

ہے۔ اس نقش میں بھی ثانوی شعاع نہیں پایا جاتا۔ اسی طرح بڑھتے ہوئے، ثانوی شعاع سے پاک، زیادہ سے زیادہ سمتیت کا نقش حاصل کیا جا سکتا ہے۔ یوں زیادہ منبع پر مبنی قطار میں منبع کی طاقت ثنائی تسلسل³⁴ کے ثنائی سر³⁵ کی نسبت سے ہوتے ہیں۔ ثنائی سروں کو شکل میں دکھائے گئے پاسکل تکون³⁶ کی مدد سے حاصل کیا جا سکتا ہے جس میں ہر اندرونی عدد، اوپر کے قریبی دو اعداد کا مجموعہ ہوتا ہے۔ متعدد منبع کے قطار کا نقش

$$(14.112) \quad E = \cos^{n-1} \left(\frac{\pi}{2} \cos \theta \right)$$

کے برابر ہو گا جہاں قطار میں منبع کی تعداد n ہے۔

اگرچہ مندرجہ بالا n رکنی قطار کے نقش میں کوئی ثانوی شعاع نہیں پایا جاتا اس کے باوجود اس کی سمتیت برابر طاقت کے n رکنی منبع کے قطار سے کم ہوتی ہے۔ حقیقی قطار عموماً n دو صورتوں (ثنائی قطار اور یکساں قطار) کی درمیانی شکل رکھتے ہیں۔

مثال 14.5: مساوات 14.110 کو ثابت کریں۔

binomial series³⁴
binomial coefficient³⁵
Pascal triangle³⁶

حل: مساوات 14.106 کی طرح زاویائی صفر کو قطار کے پہلی رکن پر چنتے ہوئے

$$\begin{aligned} E &= E_0 + E_0 e^{j\psi} + E_0 e^{j\psi} + E_0 e^{j2\psi} \\ &= E_0 (1 + e^{j\psi}) + E_0 e^{j\psi} (1 + e^{j\psi}) \\ &= E_0 (1 + e^{j\psi}) (1 + e^{j\psi}) \\ &= E_0 (1 + e^{j\psi})^2 \end{aligned}$$

جس میں $E_0 = \frac{1}{2}$ اور $\psi = \frac{\pi}{2} \cos \theta$ پر کرتے ہوئے

$$E = \left[\left(\frac{e^{-j\frac{\psi}{2}} + e^{j\frac{\psi}{2}}}{2} \right) e^{j\frac{\psi}{2}} \right]^2 = \cos^2 \frac{\psi}{2} \angle \psi$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اس کا حیظ $\frac{\psi}{2} \cos^2$ نقش کی مساوات ہے۔

مثال 14.6: مساوات 14.112 کو تفصیل سے ثابت کریں۔

ثنائی قطار میں رکن کے طاقت ثنائی تسلسل کے سر کی نسبت سے ہوتے ہیں۔ یوں $n+1$ رکنی قطار میں بالترتیب رکن کے طاقت $(1+x)^n$ کی ثنائی تسلسل

$$(14.113) \quad (1+x)^n = 1 + \frac{n}{1!}x + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \dots$$

کے سر سے حاصل کئے جاتے ہیں۔ یوں تین رکنی قطار کے سر ثنائی تسلسل

$$(14.114) \quad (1+x)^2 = 1 + 2x + x^2$$

کے سر کی نسبت 1 : 2 : 1 سے ہوں گے لہذا مندرجہ بالا مساوات میں $x = e^{j\psi}$ پر کرنے سے تین رکنی قطار کا دور میدان مندرجہ بالا مساوات کے بائیں یا دائیں ہاتھ کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے یعنی

$$(14.115) \quad E = E_0 (1 + e^{j\psi})^2 = E_0 (1 + 2e^{j\psi} + e^{j2\psi})$$

تین رکنی قطار کو دیکھ کر دور میدان مندرجہ بالا مساوات کی دائیں ہاتھ دیتی ہے جسے ثنائی تسلسل کی مدد سے مساوات کی بائیں ہاتھ کی صورت میں بھی لکھا جا سکتا ہے۔ مساوات کے بائیں ہاتھ سے نقش $\cos^2 \frac{\psi}{2}$ حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح n رکنی قطار کو $(1+x)^{n-1}$ کی ثنائی تسلسل کی مدد سے اکٹھے کرتے ہوئے

$$(14.116) \quad E = E_0 (1 + e^{j\psi})^{n-1}$$

لکھا جا سکتا ہے جس میں $E_0 = \frac{1}{2} \pi \cos \theta$ اور $\psi = \pi \cos \theta$ پر کرتے ہوئے صرف جیٹھ لیتے ہوئے قطار کا نقش

$$(14.117) \quad E = \cos^{n-1} \left(\frac{\pi}{2} \cos \theta \right)$$

لکھا جا سکتا ہے۔

14.8.4 یکساں طاقت کے متعدد رکن پر مبنی قطار

ثنائى قطار غیر یکساں رکنی قطار ہے۔ انہیں شکل میں دکھائے گئے n رکنی، غیر سمی، یکساں طاقت کے منبع کی قطار کا دور میدان حاصل کریں۔ یہاں فرض کیا جاتا ہے کہ قطار میں ہر دو قریبی منبع میں δ زاویائی فرق پایا جاتا ہے۔ یوں

$$(14.118) \quad \psi = \beta d \cos \theta + \delta$$

ہو گا۔ قطار کا دور میدان

$$(14.119) \quad E = E_0 (1 + e^{j\psi} + e^{j2\psi} + e^{j3\psi} + \dots + e^{j(n-1)\psi})$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں

d قطار میں رکن کے درمیان فاصلہ،

δ ہر دو قریبی رکن کے درمیان زاویائی فرق اور

ψ دو قریبی رکن میں کل زاویائی فرق یعنی $\psi = \beta d \cos \theta + \delta$

ہیں۔

اس میں $x = e^{j\psi}$ پر کرنے سے جانی پہچانی تسلسل

$$E_0 (1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{n-1})$$

حاصل ہوتی ہے جس کا مجموعہ

$$E_0 \left(\frac{1 - x^n}{1 - x} \right)$$

کے برابر ہے۔

مساوات 14.119 کو $e^{jn\psi}$ سے ضرب دیتے ہوئے

$$(14.120) \quad Ee^{j\psi} = E_0 (e^{j\psi} + e^{j2\psi} + e^{j3\psi} + \dots + e^{jn\psi})$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 14.119 سے مساوات 14.120 منفی کر کے E کے لئے حل کرتے ہوئے

$$(14.121) \quad E = E_0 \frac{1 - e^{jn\psi}}{1 - e^{j\psi}} = E_0 \frac{\sin \frac{n\psi}{2}}{\sin \frac{\psi}{2}} \angle (n-1) \frac{\lambda}{2}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اگر قطار کے درمیانے نقطے کو زاویائی صفر چنا جاتا تب مندرجہ بالا مساوات میں زاویہ $\angle (n-1) \frac{\lambda}{2}$ نہ پایا جاتا۔ تمام رکن غیر سمتی ہونے کی صورت میں E_0 ہر رکن کا انفرادی نقش ہو گا جبکہ $\frac{\sin \frac{n\psi}{2}}{\sin \frac{\psi}{2}}$ قطاری نقش ہے۔

غیر سمتی منبع اور زاویائی صفر کا مقام قطار کے درمیانے نقطے پر رکھتے ہوئے

$$(14.122) \quad E = E_0 \frac{\sin \frac{n\psi}{2}}{\sin \frac{\psi}{2}}$$

ہو گا۔ قطار کی زیادہ سے زیادہ قیمت $0 \rightarrow \psi$ کی صورت میں پائی جائے گی۔ چونکہ $\psi = 0$ پر مندرجہ بالا مساوات $E = \frac{0}{0}$ دیتا ہے جو بے معنی³⁷ ہے لہذا ہمیں ال ہوس پٹل³⁸ کا قاعدہ استعمال کرنا ہو گا جس کے تحت اگر تفاعل

indeterminate³⁷
L Hospital's rule³⁸

مسوات سے $\psi \rightarrow 0$ پر $y = \frac{m(x)}{n(x)}$ کی قیمت $a \rightarrow x = \frac{0}{0}$ حاصل ہو تب قیمت $y = \frac{\partial m/\partial x}{\partial n/\partial x}$ سے حاصل ہوگی۔ یوں مندرجہ بالا

$$\begin{aligned} E &= E_0 \frac{\frac{\partial \sin \frac{n\psi}{2}}{\partial \psi}}{\frac{\partial \sin \frac{\psi}{2}}{\partial \psi}} \Big|_{\psi \rightarrow 0} \\ &= E_0 \frac{\frac{n}{2} \cos \frac{n\psi}{2}}{\frac{1}{2} \cos \frac{\psi}{2}} \Big|_{\psi \rightarrow 0} \end{aligned}$$

یعنی

$$(14.123) \quad E = nE_0$$

حاصل ہوتا ہے جو قطار کی زیادہ سے زیادہ ممکنہ میدان ہے۔ یہ میدان قطار میں انفرادی منبع کے طاقت سے n گنا زیادہ ہے۔ اس قطار کے نقش کی زیادہ سے زیادہ قیمت اس زاویے پر پائی جائے گی جس پر $\psi = 0$ یعنی

$$(14.124) \quad \beta d \cos \theta + \delta = 0$$

ہو جس سے

$$(14.125) \quad \theta_{\text{بلندتر طاقت}} = \cos^{-1} \left(-\frac{\delta}{\beta d} \right)$$

حاصل ہوتا ہے۔

اسی طرح اخراجی نقش کا صفر اس مقام پر ہو گا جہاں مساوات 14.122 صفر کے برابر ہو یعنی جہاں $\frac{n\psi}{2} = \mp k\pi$ کے برابر ہو یعنی

$$(14.126) \quad \frac{n}{2} (\beta d \cos \theta + \delta) = \mp k\pi$$

جس سے صفر اخراج کا زاویہ

$$(14.127) \quad \theta_0 = \cos^{-1} \left[\left(\mp \frac{2k\pi}{n} - \delta \right) \frac{\lambda}{2\pi d} \right]$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

θ_0 صفر اخراج کا زاویہ،

$k = 1, 2, 3, \dots$ ممکن ہے جہاں $k \neq mn$ کی شرط لاگو ہے جس میں $m = 1, 2, 3, \dots$ کے برابر ہے۔

مساوات 14.122 کو مساوات 14.123 سے تقسیم کرتے ہوئے تقابل پذیر میدان E_n

$$(14.128) \quad E_n = \frac{E}{nE_0} = \frac{1}{n} \frac{\sin \frac{n\psi}{2}}{\sin \frac{\psi}{2}}$$

حاصل ہوتا ہے۔

14.8.5 یکساں طاقت کے متعدد رکن پر مبنی قطار: چوڑائی جانب اخراجی قطار

نقش کی چوٹی اس مقام پر پائی جاتی ہے جس پر $\delta = -\beta d \cos \theta$ ہو۔ قطار کے سیدھ میں کھڑے ہو کر، چوڑائی جانب ($\theta = 90^\circ$) زیادہ سے زیادہ اخراج $\delta = 0$ کی صورت میں ہو گا یعنی جب تمام انفرادی منبع ہم قدم ہوں۔ اگر θ کی جگہ اس کا زاویہ تکملہ γ^{39} استعمال کیا جائے تب نقش کے صفر

$$(14.129) \quad \gamma_0 = \sin^{-1} \left(\mp \frac{k\lambda}{nd} \right)$$

پر پائے جائیں گے۔ لمبی قطار $k\lambda \gg nd$ کی صورت میں γ_0 کم قیمت کا ہو گا لہذا اسے

$$(14.130) \quad \gamma_0 = \frac{k}{nd/\lambda} \approx \frac{k}{L/\lambda}$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں قطار کی لمبائی $L = (n-1)d$ ہے۔ لمبائی کو $n \gg 1$ کی صورت میں

$$L = (n-1)d \approx nd$$

لکھا جاسکتا ہے۔ مساوات 14.130 میں $k = 1$ پر کرتے ہوئے نقش کا پہلا صفر γ_{01} حاصل ہوتا ہے۔ یوں گوشے کے دونوں اطراف پر پہلے صفروں کے درمیان نقش کی چوڑائی

$$(14.131) \quad \text{پہلی صفر چوڑائی} = \gamma_{01} \approx \frac{2}{L/\lambda} \text{ rad} = \frac{114.6^\circ}{L/\lambda}$$

حاصل ہوتی ہے۔ نقش میں زیادہ سے زیادہ طاقت کے زاویے کے دونوں اطراف وہ زاویے پائے جاتے ہیں جن پر طاقت نصف ہوتی ہے۔ ان کے درمیان زاویے کو نصف طاقت چوڑائی⁴⁰، کہتے ہیں۔ لمبے یکساں چوڑائی جانب اخراجی قطار⁴¹ کے نصف طاقت چوڑائی کی قیمت پہلی صفر چوڑائی⁴² کے تقریباً آدھی ہوتی ہے۔ یوں

$$(14.132) \quad \text{نصف طاقت چوڑائی} \approx \frac{\text{پہلی صفر چوڑائی}}{2} = \frac{1}{L/\lambda} \text{ rad} = \frac{57.3^\circ}{L/\lambda}$$

ہو گی۔

شکل 14.13 میں چوڑائی جانب اخراجی قطار کا تقابل پذیر نقش دکھایا گیا ہے۔ یہ نقش مساوات 14.128 سے حاصل کیا گیا ہے۔ اس قطار میں منبع $\frac{\lambda}{2}$ فاصلے پر رکھے گئے ہیں۔ بیس عدد برابر طاقت کے منبع پر مبنی اس قطار کی نصف طاقت چوڑائی $\theta_{HP} = 5.1^\circ$ ہے۔ شکل میں نقش کا تراش دکھایا گیا ہے۔ یہ حقیقت میں چرخی مانند ہے لہذا $\phi = 0^\circ$ تا $\phi = 360^\circ$ گھومتے ہوئے اس کی صورت بھی نظر آئے گی۔ یوں ϕ زاویے پر اس کی نصف طاقت چوڑائی $\phi_{HP} = 360^\circ$ ہے۔

14.8.6 یکساں طاقت کے متعدد رکن پر مبنی قطار: لمبائی جانب اخراجی قطار

زیادہ سے زیادہ اخراج کا زاویہ مساوات 14.124

$$(14.133) \quad \beta d \cos \theta + \delta = 0$$

سے حاصل ہوتا ہے۔ قطار کے سیدھ میں کھڑے ہو کر سیدھا آگے ($\theta = 0$) لمبائی کی جانب زیادہ سے زیادہ اخراج اس صورت ہو گا جب ہر دو قریبی منبع کے مابین

$$(14.134) \quad \delta = -\beta d$$

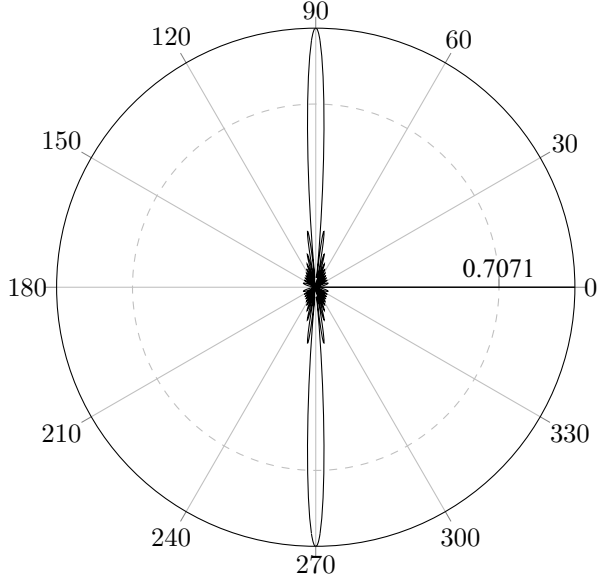
زاویائی فرق پایا جاتا ہو۔ یوں ایسے قطار کے صفر مساوات 14.126 کے تحت

$$\frac{n}{2} \beta d (\cos \theta_0 - 1) = \mp k\pi$$

half power beam width, HPBW⁴⁰

broadside array⁴¹

beam width between first nulls, BWFN⁴²



شکل 14.13: چوڑائی جانب اخراجی قطار

یعنی

$$\cos \theta_0 - 1 = \mp \frac{k}{nd/\lambda}$$

سے حاصل ہوں گے۔ اس سے

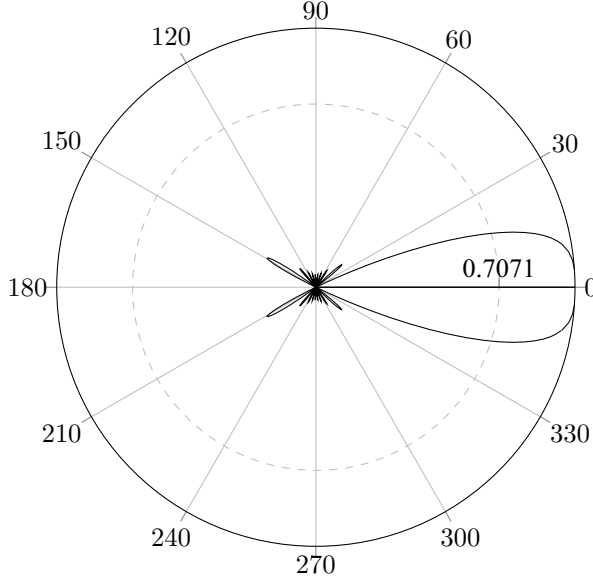
$$(14.135) \quad \frac{\theta_0}{2} = \sin^{-1} \left(\mp \sqrt{\frac{k}{2nd/\lambda}} \right)$$

لکھا جاسکتا ہے۔ لمبی قطار ($nd \gg k\lambda$) کی صورت میں اسے

$$(14.136) \quad \theta_0 = \mp \sqrt{\frac{2k}{nd/\lambda}} \approx \mp \sqrt{\frac{2k}{L/\lambda}}$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں لمبائی $L = (n-1)d$ کو $(nd \gg k\lambda)$ کی صورت میں $L \approx nd$ لکھا گیا ہے۔ پہلا صفر $k = 1$ پر حاصل ہو گا جس سے پہلی صفر چوڑائی

$$(14.137) \quad \text{پہلی صفر چوڑائی} = 2\theta_{01} \approx 2\sqrt{\frac{2}{L/\lambda}} \text{ rad} = 114.6^\circ \sqrt{\frac{2}{L/\lambda}}$$



شکل 14.14: لمبائی جانب اخراجی قطار

حاصل ہوتی ہے۔

بیس منبع پر مبنی، لمبائی جانب اخراجی قطار کا تقابل پذیر اخراجی نقش شکل 14.14 میں دکھایا گیا ہے۔ یہ نقش مساوات 14.128 سے حاصل کیا گیا ہے۔ منبع کے درمیانی فاصلہ $\frac{\lambda}{2}$ ہے۔ مساوات 14.128 سے پہلی صفر چوڑائی 52° اور نصف طاقت چوڑائی $\theta_{HP} = 34^\circ$ حاصل ہوتی ہے۔ یہ نقش جتنا چوڑا ہے یہ اتنا صفحہ کے عمودی جانب موٹا بھی ہے۔ یوں ϕ جانب بھی اس کی نصف طاقت چوڑائی $\theta_{HP} = 34^\circ$ ہی ہے۔ لمبائی جانب اخراجی لمبی قطار کی نصف طاقت چوڑائی اس کے پہلے صفر چوڑائی کے تقریباً $\frac{2}{3}$ گنا ہوتی ہے۔

جیسے مثال 14.7 اور مثال 14.8 میں آپ دیکھیں گے کہ n عدد منبع پر مبنی لمبائی جانب اخراجی قطار کی سمتیت n عدد منبع پر مبنی چوڑائی جانب اخراجی قطار کی سمتیت سے زیادہ ہوتی ہے۔

مساوات 14.79 اینٹینا کی سمتیت

$$(14.138) \quad D = \frac{4\pi}{\Omega_A}$$

دیتا ہے جہاں ٹھوس زاویہ مساوات 14.74 سے حاصل ہوتا ہے۔ اگر ثانوی شعاعوں کو نظر انداز کیا جائے تب مرکزی شعاع کے θ سمت میں نصف طاقت زاویے θ_{HP} اور ϕ سمت میں نصف طاقت زاویے ϕ_{HP} کا ضرب تقریباً ٹھوس زاویے کے برابر ہو گا لہذا ایسی صورت میں مساوات 14.74 حل کرنا ضروری نہیں اور سمتیت کو

$$(14.139) \quad D \approx \frac{4\pi}{\phi_{HP}\theta_{HP}}$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں نصف طاقت زاویے ریڈیئن میں ہیں۔ اس مساوات میں

$$4\pi \text{ sr} = 4\pi \text{ rad}^2 = 4\pi \left(\frac{180}{\pi}\right)^2 \text{ deg}^2 = 41\,253 \text{ deg}^2$$

پر کرتے ہوئے

$$(14.140) \quad D \approx \frac{41\,253}{\theta_{HP}^\circ \phi_{HP}^\circ}$$

بھی لکھا جاسکتا ہے۔

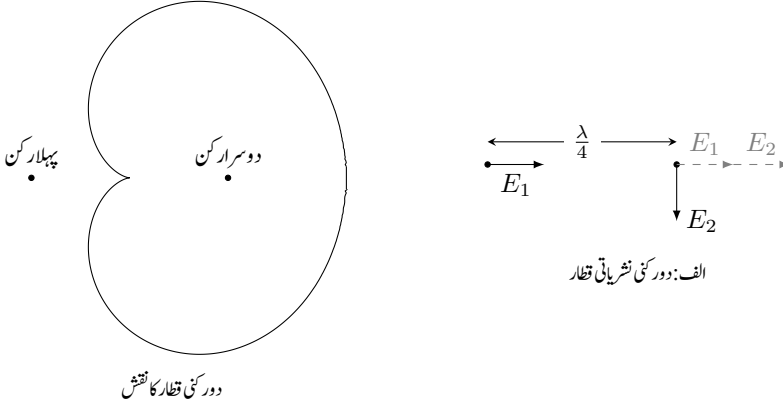
مثال 14.7: بیس رکنی، چوڑائی جانب اخراجی قطار جس میں ارکان $\frac{\lambda}{2}$ فاصلے پر ہیں کے نصف طاقت زاویے $\theta_{HP}^\circ = 5.1^\circ$ اور $\phi_{HP}^\circ = 360^\circ$ ہیں کی سمتیت حاصل کریں۔

حل: مساوات 14.140 سے

$$D \approx \frac{41\,253}{5.1 \times 360} = 22.5$$

حاصل ہوتی ہے۔

مثال 14.8: بیس رکنی، لمبائی جانب اخراجی قطار جس میں ارکان $\frac{\lambda}{2}$ فاصلے پر ہیں کے نصف طاقت زاویے $\theta_{HP}^\circ = 34^\circ$ ہیں کی سمتیت حاصل کریں۔



شکل 14.15: دورکنی اشاعتی قطار اور اس کا نقش

حل: مساوات 14.140 سے

$$D \approx \frac{41253}{34 \times 34} = 35.7$$

حاصل ہوتی ہے۔

مثال 14.9: دو ارکان پر مبنی قطار میں ارکان کے درمیان فاصلہ $\frac{\lambda}{4}$ ہے۔ دائیں رکن (دوسرا رکن) کو 90° پیچھے برقی رو مہیا کی گئی ہے۔ دونوں برقی رو کی حتمی قیمت برابر ہے۔ دونوں ارکان افقی سطح پر سیدھے کھڑے ہیں۔ افقی میدان پر اخراجی نقش حاصل کریں۔

حل: برقی رو کی حتمی قیمت برابر ہونے کی صورت میں $|E_1| = |E_2| = E$ ہوں گے۔ اگر لمحہ $t = 0$ پر بائیں رکن (پہلا رکن) کا برقی میدان 0° میکانی زاویے پر ہو تب اسی لمحہ دائیں رکن (دوسرا رکن) کا میدان -90° میکانی زاویے پر ہو گا۔ شکل 14.15-الف میں ان میدان (E_1 اور E_2) کو گاڑھی سیاہی میں دکھایا گیا ہے۔ چونکہ دونوں ارکان میں $\frac{\lambda}{4}$ کا فاصلہ ہے لہذا جتنی دیر میں بائیں رکن کے میدان کی موج E_1 چل کر دائیں رکن تک پہنچے گا اتنی دیر میں دوری عرصے کے برابر وقت گزر چکا ہو گا لہذا دوسرے رکن میں برقی رو $90^\circ = 360^\circ \times \frac{1}{4}$ آگے بڑھ چکی ہو گی اور

یوں اس لمحہ پر دوسرا رکن 0° میکانی زاویے پر ہی میدان پیدا کرے گا۔ یوں دوسرے رکن کے مقام پر دونوں میدان ہم قدم پائے جائیں گے لہذا یہاں برقی میدان $E_1 + E_2$ یعنی دگنا ہو گا۔ شکل 14.15-الف میں کچھ دیر بعد کے ان میدان کو ہلکی سیاہی میں ہم قدم دکھایا گیا ہے۔ دونوں میدان دائیں جانب ہم قدم رہتے ہوئے حرکت کریں گے۔

اس کے برعکس جس لمحہ دائیں رکن کی برقی رو 0° پر ہو اسی لمحہ بائیں رکن کی برقی رو 90° پر ہوگی۔ اس لمحے پر دائیں رکن کا میدان 0° پر ہو گا جبکہ بائیں رکن کا میدان 90° پر ہو گا۔ اب جتنی دیر میں دائیں رکن کا میدان بائیں رکن تک پہنچے گا اتنی دیر میں دائیں رکن کا میدان مزید 90° آگے بڑھ کر 180° پر پہنچ چکا ہو گا۔ یوں دائیں رکن کے مقام پر دونوں میدان آپس میں الٹ سمت میں ہوں گے لہذا ان کا مجموعہ صفر کے برابر ہو گا۔ اس طرح دائیں رکن کے دائیں جانب میدان صفر ہی پایا جائے گا۔ شکل 14.15 میں صفر اور پائے ریڈیٹن زاویوں پر دگنا اور صفر میدان دکھایا گیا ہے۔

دونوں رکن کے درمیان عمودی لکیر پر پہنچنے کے لئے دونوں میدان کو برابر دورانیے کی ضرورت ہے لہذا اس لکیر پر دونوں میدان آپس میں عمودی رہیں گے۔ یوں اس لکیر پر کل میدان مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے $\sqrt{E^2 + E^2} = 1.4142E$ حاصل ہو گا۔ شکل 14.15-ب میں اسی طرح مختلف مقامات پر میدان حاصل کرتے ہوئے حاصل کردہ نقش دکھایا گیا ہے۔

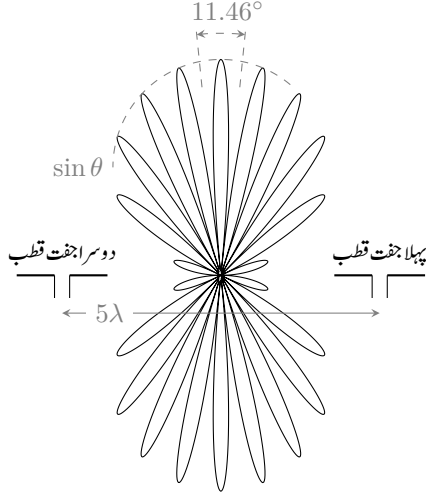
مندرجہ بالا مثال کے نقش سے ظاہر ہے کہ یہ اینٹینا بائیں جانب اخراج نہیں کرتا لہذا اس کے بائیں جانب دوسرا اینٹینا نسب کیا جا سکتا ہے جس کی اخراجی سمت بائیں رکھی جائے گی تاکہ دونوں علیحدہ علیحدہ نشریات کر سکیں۔

14.8.7 یکساں طاقت کے متعدد رکن پر مبنی قطار: بدلتے زاویہ اخراجی اینٹینا

مساوات 14.125

$$(14.141) \quad \theta_{\text{بلندتر طاقت}} = \cos^{-1} \left(-\frac{\delta}{\beta d} \right)$$

یکساں ارکان کے قطار کی مرکزی نقش کا زاویہ دیتی ہے۔ چوڑائی جانب اخراجی قطار میں $\theta = 90^\circ$ رکھا جاتا ہے جبکہ لمبائی جانب اخراجی قطار میں $\theta = 0^\circ$ رکھا جاتا ہے۔ اگر شعاع کی سمت تبدیل کرنی ہو تو ایسے اینٹینا کو گھمانا ہو گا۔



شکل 14.16: دو عدد مختصر جفت قطب جنہیں 5λ فاصلے پر رکھا گیا ہے سے حاصل تداخل پیمائش کا نقش۔

مساوات 14.125 کے تحت θ کو تبدیل کرتے ہوئے شعاع کی سمت کسی بھی زاویے پر رکھی جاسکتی ہے۔ یوں θ کو -1 تا $+1$ مسلسل تبدیل کرتے ہوئے شعاع کی سمت کو 0° تا 180° مسلسل تبدیل کیا جاسکتا ہے۔ یوں بدلتے زاویہ اخراجی اینٹینا⁴³ کو ہلائے بغیر اس کی اخراجی سمت تبدیل کی جاسکتی ہے۔

14.9 تداخل پیمائش

فلکیات⁴⁴ کے میدان میں اینٹینا کا کلیدی کردار ہے۔ ریڈیائی فلکیات⁴⁵ میں استعمال ہونے والے اینٹینا کو تداخل پیمائش⁴⁶ اینٹینا کہتے ہیں۔

شکل 14.16 میں دو عدد مختصر جفت قطب کے درمیان فاصلہ L ہے۔ دونوں کو ہم قدم برقی رو مہیا کی گئی ہے۔ ضرب نقش کی ترکیب استعمال کرتے ہوئے اس کا نقش

$$(14.142) \quad E = 2E_1 \cos \frac{\psi}{2}$$

scanning antenna⁴³
astronomy⁴⁴
radio astronomy⁴⁵
interferometer⁴⁶

لکھا جا سکتا ہے جہاں $\psi = \beta L \cos \theta$ کے برابر ہے۔ ضرب نقش کے تحت E_1 انفرادی رکن کی نقش ہے جبکہ $\cos \frac{\psi}{2}$ دو رکنی قطار کا نقش ہے۔ ہمیں میدان بالمقابل زاویہ سے غرض ہے۔ مساوات 14.49 مختصر جفت قطب کا نقش دیتا ہے جس میں میدان اور زاویے کا تعلق $\sin \theta$ ہے۔ اسی کو استعمال کرتے ہوئے تقابل پذیر نقش

$$(14.143) \quad E = \sin \theta \cos \frac{\psi}{2} = \sin \theta \cos \left(\frac{\pi L}{\lambda} \cos \theta \right)$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$ کا استعمال کیا گیا ہے۔ شکل 14.16 میں $L = 5\lambda$ کے لئے نقش دکھایا گیا ہے۔ زاویہ θ کا زاویہ تکملہ $\gamma = \frac{\pi}{2} - \theta$ استعمال کرتے ہوئے، پہلا صفر

$$\frac{\pi L}{\lambda} \cos \theta = \frac{\pi L}{\lambda} \sin \gamma_{01} = \frac{\pi}{2}$$

کی صورت میں پایا جائے گا جس سے

$$(14.144) \quad \gamma_{01} = \sin^{-1} \frac{1}{2L/\lambda}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اگر $L \gg \lambda$ ہو تب پہلی صفر چوڑائی

$$(14.145) \quad \text{پہلی صفر چوڑائی} = 2\gamma_{01} = \frac{1}{L/\lambda} \text{ rad} = \frac{57.3}{L/\lambda} \text{ deg}$$

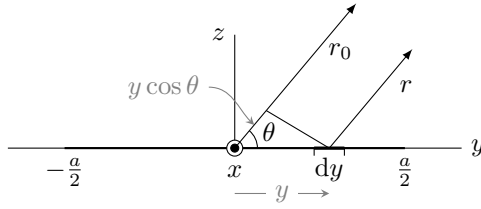
لکھی جا سکتی ہے۔ یہ مساوات 14.131 میں دیے، n رکنی چوڑائی جانب اخراجی قطار کے پہلی صفر چوڑائی کی آدھی قیمت ہے۔ ہلکی سیاہی کے نقطہ دار لکیر سے شکل میں مختصر جفت قطب کے نقش $\sin \theta$ کو واضح کیا گیا ہے۔

پانچ طول موج برابر L کی صورت میں مساوات 14.145 سے پہلی صفر چوڑائی 11.46° حاصل ہوتی ہے۔

ریڈیائی فلکیات میں فلکی اخراجی مادے کی شعاع کو تداخل پیماسے وصول کیا جاتا ہے۔ ان کی جسامت کا بہتر سے بہتر تخمینہ لگانے میں چوڑائی نقش کردار ادا کرتی ہے۔

مشق 14.1: $L = 20\lambda$ کی صورت میں تداخل پیماسے پہلی صفر چوڑائی حاصل کریں۔

جواب: 2.865°



شکل 14.17: مستطیل سطحی اینٹینا

14.10 مستطیل سطحی اینٹینا

ہم متعدد تعداد کے نقطہ منبع پر مبنی مختلف اقسام کے اینٹینا دیکھ چکے ہیں۔ اگر نقطہ منبع کے صف در صف اتنے قریب قریب فرضی سطح پر رکھے جائیں کہ یہ علیحدہ علیحدہ منبع کی جگہ ایک مسلسل سطح نظر آئے تو ایسی صورت میں سطحی اینٹینا⁴⁷ حاصل ہو گا۔ ایسی ہی ایک مستطیلی سطح جس کی سمت میں لمبائی x_1 اور y سمت میں لمبائی a ہے کو شکل 14.17 میں دکھایا گیا ہے۔ تصور کریں کہ اس سطح پر J_x کثافت برقی رو پائی جاتی ہے۔ یہ تصور کرتے ہوئے کہ سطح کے نیچے یعنی $z < 0$ خطے میں مقناطیسی میدان نہیں پایا جاتا، ایمپیر کے دوری قانون کی مدد سے

$$(14.146) \quad H_y = -J_x$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں H_y سطح کے انتہائی قریب بالائی جانب⁴⁸ مقناطیسی میدان ہے۔ سطحی اینٹینا کے دور میدان پر تبصرے سے پہلے ایک حقیقت پر غور کرتے ہیں۔

فرض کریں کی خالی خلاء میں سطحی برقی و مقناطیسی موج پائی جاتی ہے۔ ہائی گن⁴⁹ کے اصول کے تحت محاذ موج پر ہر نقطہ، منبع موج کا کردار ادا کرتا ہے۔ یوں سطح پر چھوٹے رتبے $dx dy$ پر خطی قطبی برقی میدان E_x بطور منبع کردار ادا کرے گا۔ سطح کے برقی میدان E_x سے یہاں کا مقناطیسی میدان

$$(14.147) \quad H_y = \frac{E_x}{Z_0}$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں Z_0 خطے کی قدرتی رکاوٹ $\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$ ہے۔

continuous aperture⁴⁷⁴⁸ یہاں فرض کیا گیا ہے کہ سطحی اینٹینا ٹچل جانب اخراج نہیں کرے۔ اگر اینٹینا ٹچل جانب بھی اخراج کرے تب $H_y = -0.5J_x$ لکھا جائے گا۔Huygen's principle⁴⁹

مساوات 14.146 اور مساوات 14.147 دو مختلف وجوہات کی بنا پر پیدا مقلاتیسی میدان ظاہر کرتے ہیں۔ دور سے ان دونوں میں کسی قسم کا کوئی فرق نہیں دیکھا جاسکتا لہذا ان دونوں سے پیدا موج میں بھی کوئی فرق نہیں پایا جائے گا۔ اس حقیقت کو مد نظر رکھتے ہوئے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ سطحی اینڈینا کا دور میدان اور خلاء میں فرضی سطح پر موج کا دور میدان بالکل یکساں ہوں گے۔ اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے کسی بھی سطح پر کثافت برقی رو J_x کو خالی خلاء میں مقلاتیسی میدان H_y یا برقی میدان E_x سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔

$$(14.148) \quad -J_x = H_y = \frac{E_x}{Z_0}$$

اس طرح مندرجہ ذیل تبصرہ ان دونوں کے لئے قابل قبول ہے۔

آئیں اب واپس اصل موضوع پر آتے ہیں۔ تصور کریں کہ شکل 14.17 کے سطحی اینڈینا پر x سمت میں نہ تبدیل ہوتی جبکہ y سمت میں تبدیل ہوتی کثافت برقی رو $J_x(y)$ پائی جاتی ہے۔ پوری سطح پر کثافت برقی رو ہم قدم ہے۔

مساوات 14.25 میں $I_0 = J_x dy$ اور $dl = dx$ پر کرنے سے A حاصل کرتے ہوئے، چھوٹے رقبے $dx dy$ سے دور تفرق میدان کو $E = -j\omega A$ سے حاصل کیا جاسکتا ہے یعنی

$$(14.149) \quad \begin{aligned} dE &= -j\omega [dA_x] \\ &= -j\omega \frac{\mu_0 I_0 dl e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi r} \\ &= -j\omega \frac{\mu_0 J_x dy dx e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi r} \\ &= \frac{j\omega \mu_0 E(y)}{4\pi r Z_0} e^{j(\omega t - \beta r)} dx dy \end{aligned}$$

جہاں مساوات 14.148 کا سہارا لیا گیا ہے۔ پورے رقبے سے پیدا میدان سطحی مکمل سے حاصل ہو گا۔ رقبے کے وسط سے r_0 فاصلے اور θ زاویے پر میدان

$$(14.150) \quad E(\theta) = \frac{j\omega \mu_0 e^{j(\omega t - \beta r_0)}}{4\pi r_0 Z_0} \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-x_1/2}^{x_1/2} E(y) e^{j\beta y \cos \theta} dx dy$$

ہو گا جہاں $r_0 \approx r$ لیا گیا⁵⁰ ہے۔ بیرونی تکمل لیتے اور $\frac{1}{2\lambda} = \frac{\omega\mu_0}{4\pi Z_0}$ پر کرتے ہوئے میدان کی حتمی قیمت $|E|$

$$(14.151) \quad E(\theta) = \frac{x_1}{2r_0\lambda} \int_{-a/2}^{a/2} E(y) e^{j\beta y \cos \theta} dy$$

حاصل ہوتی ہے جہاں $|j e^{j(\omega t - \beta r_0)}| = 1$ لیا گیا ہے۔ پوری سطح پر یکساں میدان $E(y) = E_a$ کی صورت میں

$$(14.152) \quad E(\theta) = \frac{x_1 E_a}{2r_0\lambda} \int_{-a/2}^{a/2} e^{j\beta y \cos \theta} dy$$

لکھتے ہوئے

$$(14.153) \quad E(\theta) = \frac{x_1 a E_a \sin[(\beta a/2) \cos \theta]}{2r_0\lambda (\beta a/2) \cos \theta} \\ = \frac{E_a S_{\text{اخراجی}} \sin[(\beta a/2) \cos \theta]}{2r_0\lambda (\beta a/2) \cos \theta}$$

حاصل ہو گا جہاں $S_{\text{اخراجی}}$ سطح کا رقبہ ہے۔

زیادہ سے زیادہ میدان 90° پر

$$(14.154) \quad E(\theta) \text{ بلندتر} = \frac{E_a S_{\text{اخراجی}}}{2r_0\lambda} \quad \text{دو زنی اخراج}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اگر $270^\circ = \theta$ جانب اخراج صفر ہو تب $90^\circ = \theta$ جانب اخراج دگنی

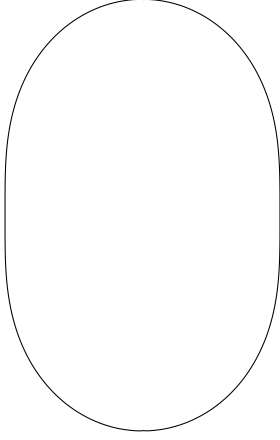
$$(14.155) \quad E(\theta) \text{ بلندتر} = \frac{E_a S_{\text{اخراجی}}}{r_0\lambda} \quad \text{یک زنی اخراج}$$

ہو گی۔ اس میدان کو $a = 5\lambda$ اور $a = \frac{\lambda}{2}$ کے لئے شکل 14.18 میں دکھایا گیا ہے۔

صفحہ 776 پر مساوات 14.122

$$E(\theta) = E_0 \frac{\sin \frac{n\psi}{2}}{\sin \frac{\psi}{2}}$$

⁵⁰ جیسے حصہ 14.3 میں دکھایا گیا ہے۔

ب: مستطیل سطحی اینٹینا کا $a = \frac{\lambda}{2}$ کی صورت میں نقشالف: مستطیل سطحی اینٹینا کا $a = 5\lambda$ کی صورت میں نقش

شکل 14.18: مستطیل سطح کے نقش

یکساں غیر سمتی n رکنی قطار کا دور میدان دیتی ہے جہاں $(\psi = \beta d \cos \theta + \delta)$ ہے اور E_0 انفرادی رکن کا میدان ہے۔ چوڑائی جانب اخراجی قطار $\delta = 0$ کی صورت میں حاصل ہوتا ہے جس سے مندرجہ بالا مساوات

$$(14.156) \quad E(\theta) = E_0 \frac{\sin[(n\beta d/2) \cos \theta]}{\sin[(\beta d/2) \cos \theta]}$$

صورت اختیار کر لیتی ہے۔ قطار کی لمبائی a' لکھتے ہوئے، زیادہ قیمت کی n اور a' کی صورت میں $a' = (n-1)d \approx nd$ ہو گا۔ اگر ہم اپنی توجہ $\theta = 90^\circ$ کے قریب رکھیں تب مساوات 14.156 کو

$$(14.157) \quad E(\theta) = nE_0 \frac{\sin[(\beta a'/2) \cos \theta]}{(\beta a'/2) \cos \theta}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اس مساوات کا مساوات 14.153 کے ساتھ موازنہ کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ a لمبائی کی سطحی اینٹینا اور n رکنی a' لمبی چوڑائی اخراجی قطار کے مرکزی شعاع ایک جیسے ہیں۔ مزید $\frac{E_a S_{\text{اخراجی}}}{2r_0 \lambda} = nE_0$ کی صورت میں دونوں کے میدان بالکل برابر حتمی قیمت رکھتے ہیں۔

14.11 درزکادور میدان بذریعہ فوریر بدل

ہم کسی بھی کثافت برقی رو کا پیدا کردہ دور میدان حاصل کرنا دیکھ چکے ہیں۔ بعض اوقات ہمیں کثافت برقی رو معلوم نہیں ہوتی البتہ کسی مخصوص سطح پر میدان معلوم ہوتا ہے۔ اس طرح کے مسئلے کی مثال مستطیل پیا اینٹینا ہے۔ مستطیل موج کا منہ کھول کر مستطیل پیا اینٹینا حاصل کیا جاتا ہے۔ اس اینٹینا کے منہ پر کسی قسم کی موصل چادر نہیں نسب کی جاتی لہذا اس کے کھلے منہ کے کناروں پر برقی رو پائی جاتی ہے جس کی شکل جاننا دشوار ہے۔ البتہ پیسے کی منہ پر برقی میدان جاننا نسبتاً آسان کام ہے۔ ہم دیکھیں گے کہ ایسی صورت میں دور میدان قریبی میدان کے فوریر بدل⁵¹ سے حاصل ہوتا ہے۔ آئیں پہلے فوریر بدل کی یاد دوبارہ تازہ کریں۔

آپ فوریر بدل جوڑی سے بخوبی واقف ہوں گے۔ کسی بھی تفاعل $w(x)$ جس کا آزاد متغیرہ x ہو کا فوریر بدل $W(k_x)$

$$(14.158) \quad W(k_x) = \int_{-\infty}^{\infty} w(x)e^{jk_x x} dx \quad \text{فوریر بدل}$$

لکھا⁵² جاتا ہے جہاں $W(k_x)$ کا آزاد متغیرہ k_x ہے۔ یوں کسی بھی تفاعل کا آزاد متغیرہ تبدیل کرنا ممکن ہے۔ اسی طرح $W(k_x)$ کا الٹ فوریر بدل $w(x)$

$$(14.159) \quad w(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(k_x)e^{-jk_x x} dk_x \quad \text{فوریر الٹ بدل}$$

ہے۔ مندرجہ بالا دو مساوات فوریر بدل جوڑی کہلاتے ہیں۔ مساوات 14.158 کے دونوں اطراف کا k_x کے ساتھ تفرق

$$(14.160) \quad \frac{dW(k_x)}{dk_x} = jk_x \int_{-\infty}^{\infty} w(x)e^{jk_x x} dx = jk_x W(k_x)$$

لکھا جا سکتا ہے۔ دائیں ہاتھ تفرق لیتے ہوئے دھیان رہے کہ تکمل کے اندر k_x کا کردار بالکل ایک مستقل کا ہے لہذا تفرق کو تکمل کے اندر لے جایا جا سکتا ہے۔ اسی طرح مساوات 14.159 کا تفرق x کے ساتھ لینے سے

$$(14.161) \quad \frac{dw(x)}{dx} = \frac{-jk_x}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(k_x)e^{-jk_x x} dk_x = -jk_x w(x)$$

Fourier transform pair⁵¹

⁵² عموماً مساوات 14.158 میں تکمل کو $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ سے ضرب دے کر لکھا جاتا ہے۔ اسی طرح مساوات 14.159 میں بھی $\frac{1}{2\pi}$ کی جگہ $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ سے تکمل کو ضرب دیا جاتا ہے۔ اس طرح جوڑی کے دونوں مساوات تقریباً یکساں شکل اختیار کر لیتے ہیں۔

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح

$$(14.162) \quad \frac{d^2 W(k_x)}{dk_x^2} = (jk_x)^2 W(k_x) = -k_x^2 W(k_x)$$

$$(14.163) \quad \frac{d^2 w(x)}{dx^2} = (-jk_x)^2 w(x) = -k_x^2 w(x)$$

بھی لکھے جاسکتے ہیں۔

دو آزاد متغیرات پر مبنی تفاعل $u(x, y)$ کا فوریز بدل

$$(14.164) \quad U(k_x, k_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, y) e^{jk_x x + jk_y y} dx dy$$

لکھا جاتا ہے۔ اس کا واپسی فوریز بدل

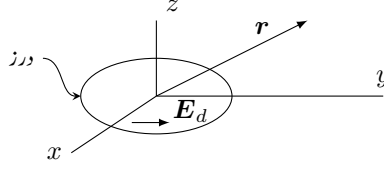
$$(14.165) \quad u(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U(k_x, k_y) e^{-jk_x x - jk_y y} dk_x dk_y$$

ہو گا۔ مساوات 14.164 کے تفرق لے کر

$$(14.166) \quad \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial k_x} &= jxU \\ \frac{\partial U}{\partial k_y} &= jyU \\ \frac{\partial^2 U}{\partial k_x^2} &= -x^2 U \\ \frac{\partial^2 U}{\partial k_x \partial k_y} &= -xyU \end{aligned}$$

اور مساوات 14.165 کے تفرق سے

$$(14.167) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= -jk_x u \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -jk_y u \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= -k_x^2 u \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= -k_x k_y u \end{aligned}$$



شکل 14.19: سطح $z=0$ پر درز میں برقی میدان E_d کو دور میدان فوریر تبدل ہے۔

فوریر تبدل کی یاد تازہ کرنے کے بعد اصل موضوع پر واپس آتے ہیں۔ شکل 14.19 میں $z=0$ سطح پر درز دکھایا گیا ہے جس پر برقی میدان E_d ہے۔ یہ میدان $z < 0$ نخطے میں موجود کثافت برقی رو کی وجہ سے پایا جاتا ہے۔ ہمیں اس کثافت برقی رو کی ضرورت نہیں پڑے گی۔ درز کا رقبہ S_d ہے۔ آئیں درز پر موجود میدان سے خالی خلاء میں کہیں دور پیدا میدان دریافت کریں۔

میکس ویل کی مساوات $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ کے گردش کو

$$\begin{aligned}\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} &= \nabla \nabla \cdot \mathbf{E} - \nabla^2 \mathbf{E} = -j\omega\mu_0 \nabla \times \mathbf{H} \\ &= -j\omega\mu_0 (\mathbf{J} + j\omega\epsilon_0 \mathbf{E})\end{aligned}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں دوسری قدم پر $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ پر کیا گیا ہے۔ ساتھ ہی ساتھ $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ اور $D = \epsilon_0 \mathbf{E}$ کے علاوہ $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = j\omega \mathbf{E}$ اور $\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = j\omega \mathbf{H}$ کا بھی استعمال کیا گیا ہے۔ شکل 14.19 میں درز سے دور خالی خلاء میں نہ کوئی کثافت بار پائی جاتی ہے اور نہ ہی کثافت برقی رو۔ یوں مندرجہ بالا مساوات میں دور مقام پر $\mathbf{J} = 0$ اور

$$(14.168) \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$

پر کرتے ہوئے

$$(14.169) \quad \nabla^2 \mathbf{E} + k_0^2 \mathbf{E} = 0$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

$$(14.170) \quad k_0 = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$$

لکھا گیا ہے۔ مساوات 14.168 اور مساوات 14.169 کو کار تیبھی محدود میں یوں لکھا جائے گا۔

$$(14.171) \quad \frac{\partial E_x(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial E_y(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial E_z(x, y, z)}{\partial z} = 0$$

$$(14.172) \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_0^2 \right) \mathbf{E}(x, y, z) = 0$$

ان دو مساوات کا فوریز بدل مساوات 14.167 کی مدد سے لکھتے ہیں

$$(14.173) \quad k_x E_x(k_x, k_y, k_z) + k_y E_y(k_x, k_y, k_z) + j \frac{\partial E_z(k_x, k_y, k_z)}{\partial z} = 0$$

$$(14.174) \quad \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + (k_0^2 - k_x^2 - k_y^2) \right] E(k_x, k_y, k_z) = 0$$

جہاں $u(x, y, z) = E(x, y, z)$ لیتے ہوئے $U(k_x, k_y, k_z) = E(k_x, k_y, k_z)$ لکھا گیا ہے۔ یہاں بہتر ہوتا کہ برقی میدان اور اس کے فوریز بدل کے لئے میں علیحدہ علیحدہ علامات استعمال کرتا لیکن امید کی جاتی ہے کہ $E(x, y, z)$ کے آزاد متغیرات (x, y, z) سے $E(k_x, k_y, k_z)$ کو اصل تفاعل اور $E(k_x, k_y, k_z)$ کے آزاد متغیرات (k_x, k_y, k_z) سے $E(k_x, k_y, k_z)$ کو فوریز بدل سمجھا جا سکتا ہے۔

مندرجہ بالا مساوات میں

$$(14.175) \quad k_0^2 - k_x^2 - k_y^2 = k_z^2$$

لکھتے ہوئے

$$(14.176) \quad \frac{\partial^2 E(k_x, k_y, k_z)}{\partial z^2} + k_z^2 E(k_x, k_y, k_z) = 0$$

حاصل ہوتا ہے جس کے حل $e^{\mp jk_z z}$ صورت رکھتے ہیں۔ ان میں $e^{-jk_z z}$ کارٹیسی نظام میں بڑھتے z جانب حرکت کرتی موج ہے جبکہ $e^{jk_z z}$ گھٹتے z جانب حرکت کرتی موج ہے۔ ہم پہلے جواب کو تسلیم کرتے ہیں لہذا مندرجہ بالا مساوات کا حل

$$(14.177) \quad E(k_x, k_y, k_z) = f(k_x, k_y) e^{-jk_z z}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں $f(k_x, k_y)$ دریافت کرنا باقی ہے۔

مساوات 14.177 کو مساوات 14.173 میں پر کرنے سے

$$(14.178) \quad k_x f_x + k_y f_y + k_z f_z = 0$$

یعنی

$$(14.179) \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{f} = 0$$

ملتا ہے جہاں $\mathbf{f} = f_x \mathbf{a}_x + f_y \mathbf{a}_y + f_z \mathbf{a}_z$ اور $\mathbf{k} = k_x \mathbf{a}_x + k_y \mathbf{a}_y + k_z \mathbf{a}_z$ لکھے گئے ہیں۔ مساوات 14.179 کے تحت f_x ، f_y اور f_z تینوں آزاد متغیرات نہیں ہو سکتے۔ ان میں کوئی دو آزاد ہونے کی صورت

میں تیسرے جزو کو ان دو اجزاء سے حاصل کیا جا سکتا ہے لہذا تیسرا جزو تابع متغیرہ ہو گا۔ یہ حقیقت برقی میدان پر بھی لاگو ہوتی ہے جہاں اس حقیقت کو $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ لکھا جاتا ہے۔

اصل برقی میدان $\mathbf{E}(x, y, z)$ حاصل کرنے کی خاطر $\mathbf{E}(k_x, k_y, k_z)$ کا الٹ فوریر بدل لیتے ہیں

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x, y, z) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(k_x, k_y, k_z) e^{-jk_x x - jk_y y} dk_x dk_y \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{f}(k_x, k_y) e^{-jk_x x - jk_y y - jk_z z} dk_x dk_y \end{aligned}$$

جہاں مساوات 14.177 استعمال کیا گیا ہے۔ کار تیبی محدود میں سمتی فاصلے کو $\mathbf{r} = x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y + z\mathbf{a}_z$ لکھا جا سکتا ہے۔ یوں

$$k_x x + k_y y + k_z z = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$$

لکھتے ہوئے مندرجہ بالا مساوات کو

$$(14.180) \quad \mathbf{E}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{f}(k_x, k_y) e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} dk_x dk_y \quad \text{درز کا میدان}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اس مساوات میں مکمل کے اندر $\mathbf{f} e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$ حرکت کرتی موج کو ظاہر کرتی ہے۔ یوں $z > 0$ خطے میں میدان حرکت کرتی موج ہو گی۔ مساوات 14.175 سے واضح ہے کہ $|\mathbf{k}| = k_0$ کے برابر ہے۔ یوں اگر $k_x^2 + k_y^2 > k_0^2$ ہو تب k_z خیالی مقدار ہو گا۔ ایسی صورت میں موج z سمت میں $e^{-k_z z}$ کی رفتار سے گھٹے گی جو فنا پذیر موج کی نشانی ہے۔ یہ فنا پذیر موج درز کے سامنے قریبی میدان کو ظاہر کرتی ہے۔ اگر k_x اور k_y کو کار تیبی محدود پر دکھایا جائے تو جو قیمت k_0 رداں کے دائرے سے باہر ہو، وہ فنا پذیر موج کو ظاہر کریں گے جبکہ اس دائرے کے اندر قیمتیں دور میدان کو ظاہر کرتی ہیں۔

مساوات 14.180 کے حاصل کردہ میدان کی قیمت سطح $z = 0$ پر عین شکل 14.19 کے میدان برابر ہو گی۔ اس شکل میں میدان $z = 0$ سطح کے متوازی ہے۔ یوں اگر \mathbf{f} کے x اور y اجزاء کو \mathbf{f}_m سے ظاہر کیا جائے (یعنی $\mathbf{f}_m = f_x \mathbf{a}_x + f_y \mathbf{a}_y$) تب

$$(14.181) \quad \mathbf{E}_d(x, y) = \mathbf{E}_m(x, y, 0) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{f}_m(k_x, k_y) e^{-jk_x x - jk_y y} dk_x dk_y$$

ہو گا۔ مساوات 14.181 فوریر بدل کی مساوات ہے لہذا اس کا الٹ فوریر بدل یوں

$$(14.182) \quad \mathbf{f}_m(k_x, k_y) = \iint_{S_d} \mathbf{E}_d(x, y) e^{jk_x x + jk_y y} dx dy$$

لکھنا ممکن ہے۔ اس مساوات کے تحت درز پر میدان کا فوریز بدل دور میدان کو ظاہر کرتی ہے۔ مساوات 14.179 سے

$$(14.183) \quad f_z = \frac{-\mathbf{k}_m \cdot \mathbf{f}_m}{k_z} = \frac{-k_x f_x - k_y f_y}{\sqrt{k_0^2 - k_x^2 - k_y^2}}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ مندرجہ بالا دو مساوات مل کر f کے تینوں اجزاء دیتے ہیں۔

مساوات 14.182 اور مساوات 14.182 سے حاصل $f(k_x, k_y)$ کو مساوات 14.180 میں پر کرتے ہوئے درز کا میدان حاصل کیا جاتا ہے۔ آئیں اب مساوات 14.180 کا حل حاصل کریں۔

ہمیں دور میدان سے غرض ہے۔ اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے ہم مساوات 14.180 کو صرف دور میدان کے لئے حل کرتے ہیں۔ ایسا کرنے کی خاطر جو ترکیب بروئے کار لائی جائے گی اس کی بنیاد اس حقیقت پر ہے کہ r کی قیمت زیادہ ہونے کی صورت میں $e^{-jk \cdot r}$ نہایت تیزی سے ارتعاش کرتا تفاعل ہو گا۔ یوں مساوات 14.180 میں $k_x k_y$ سطح کے مختلف نقطوں پر اس تفاعل کی قیمتیں ایک دونوں کو ختم کریں گی۔ اس تفاعل میں r کی قیمت زیادہ ہونے کی وجہ سے $k_x k_y$ سطح پر قریب ترین نقطوں کے درمیان بھی اتنا زاویائی فرق $jk \cdot r$ پایا جاتا ہے کہ مکمل میں ان کا مجموعہ قابل نظر انداز ہوتا ہے۔ البتہ ایسے مقام جہاں زاویائی فرق نہ پایا جاتا ہو، دور میدان میں کردار ادا کرتے ہیں۔ ان مقام جنہیں ساکن نقطے⁵³ کہا جاتا ہے کو مندرجہ ذیل مساوات سے حاصل کیا جاتا ہے۔

$$(14.184) \quad \begin{aligned} \frac{\partial(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}{\partial k_x} &= 0 \\ \frac{\partial(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}{\partial k_y} &= 0 \end{aligned}$$

ساکن نقطوں پر $e^{-jk \cdot r}$ کی قیمت میں ٹھرا پایا جاتا ہے لہذا مکمل میں ایسے مقام کا مجموعہ دور میدان میں کردار ادا کرتا ہے۔ ساکن مقام $k_1 k_2$ سطح پر چھوٹا خط ہو گا۔ اس چھوٹے خطے میں $f(k_x, k_y)$ کے قیمت میں تبدیلی کو رد کرتے ہوئے اسے اٹل تصور کیا جاتا ہے۔ اس طرح $f(k_x, k_y)$ کو مکمل کے باہر منتقل کیا جاتا ہے۔ بقایا مکمل میں صرف $e^{-jk \cdot r}$ رہ جاتا ہے جسے حاصل کرنا ممکن ہے۔

اگر $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = k_x x + k_y y + k_z z$ میں کروئی محدود کے متغیرات استعمال کرتے ہوئے $x = r \sin \theta \cos \phi$ ، $y = r \sin \theta \sin \phi$ اور $z = r \cos \theta$ پر کئے جائیں تو

$$(14.185) \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = r(k_x \sin \theta \cos \phi + k_y \sin \theta \sin \phi + \sqrt{k_0^2 - k_x^2 - k_y^2} \cos \theta)$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 14.184 استعمال کرتے ہوئے ساکن نقطہ

$$(14.186) \quad k_x = k_1 = k_0 \sin \theta \cos \phi$$

$$(14.187) \quad k_y = k_2 = k_0 \sin \theta \sin \phi$$

حاصل ہوتا ہے۔ ساکن نقطے کے قریب ٹیلر تسلسل⁵⁴ کے استعمال سے ہم لکھ سکتے ہیں

$$\begin{aligned} \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} &= k_0 r + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}{\partial k_x^2} (k_x - k_1)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}{\partial k_y^2} (k_y - k_2)^2 \\ &\quad + \frac{\partial^2 \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}{\partial k_x \partial k_y} (k_x - k_1)(k_y - k_2) \\ &= k_0 r - (Au^2 + Bv^2 + Cuv) \end{aligned}$$

جہاں $v = k_y - k_2$ ، $u = k_x - k_1$ ہیں جبکہ

$$(14.188) \quad \begin{aligned} A &= \frac{r}{2} \left(\frac{1}{k_0} + \frac{k_1^2}{k_0^3 \cos^2 \theta} \right) \\ B &= \frac{r}{2} \left(\frac{1}{k_0} + \frac{k_2^2}{k_0^3 \cos^2 \theta} \right) \\ C &= \frac{k_1 k_2 r}{k_0^3 \cos^2 \theta} \end{aligned}$$

ہیں۔ چونکہ $\frac{\partial}{\partial k_x} = 0$ اور $\frac{\partial}{\partial k_y} = 0$ ہیں لہذا انہیں بالا ٹیلر تسلسل میں شامل نہیں کیا گیا۔

ان حقائق کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 14.180 کو مندرجہ ذیل صورت میں لکھنا ممکن ہے

$$(14.189) \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) \approx \frac{e^{-jk_0 r}}{4\pi^2} \mathbf{f}(k_0 \sin \theta \cos \phi, k_0 \sin \theta \sin \phi) \iint_{\Delta s} e^{j(Au^2 + Bv^2 + Cuv)} du dv$$

جہاں مکمل ساکن نقطے پر چھوٹی سطح Δs پر حاصل کیا جاتا ہے اور جہاں \mathbf{f} کی قیمت اٹل تصور کرتے ہوئے ساکن نقطے پر \mathbf{f} کی قیمت لی گئی ہے۔ یہاں ایک مرتبہ دوبارہ اس حقیقت کو سامنے رکھتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں کہ چونکہ A ، B اور C کی قیمتیں r کے مماثل ہیں لہذا یہ قیمتیں بھی بہت بڑی ہوں گی۔ یوں u اور v کے تبدیلی سے مندرجہ بالا مکمل میں A ، B اور C پر منحصر تفاعل بھی تیزی سے ارتعاش کرے گی جس کی وجہ

سے مختلف نقطوں پر تفاعل آپس میں جمع نہ ہو پائے گا۔ اس حقیقت کی بنا پر اگر تکمیل کو لامحدود سطح پر لیا جائے تو حاصل جواب پر کوئی اثر نہیں پڑنا چاہیے۔ ایسا ہی کرتے ہوئے مندرجہ بالا مساوات میں

$$(14.190) \quad \iint_{-\infty}^{\infty} e^{j(Au^2+Bv^2+Cuv)} du dv$$

کا حل حاصل کرتے ہیں۔ ہم

$$Au^2 + Bv^2 + Cuv = \left(\sqrt{A}u + \frac{Cv}{2\sqrt{A}} \right)^2 - \frac{C^2v^2}{4A} + Bv^2$$

لکھ کر $\sqrt{A}u + \frac{Cv}{2\sqrt{A}} = w$ پر کرتے ہوئے

$$(14.191) \quad \iint_{-\infty}^{\infty} e^{jw^2} e^{\frac{j(4AB-C^2)v^2}{4A}} \frac{dw}{\sqrt{A}} dv$$

لکھ سکتے ہیں۔ ہم یہاں پہلے سے معلوم تکمیل

$$(14.192) \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\gamma(x-x_0)^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\gamma}} e^{j\frac{\pi}{4}}$$

کا استعمال کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} \iint_{-\infty}^{\infty} e^{jw^2} e^{\frac{j(4AB-C^2)v^2}{4A}} \frac{dw}{\sqrt{A}} dv &= \frac{j2\pi}{\sqrt{4AB-C^2}} \\ &= j2\pi \frac{k_0}{r} \cos \theta \end{aligned}$$

حاصل کرتے ہیں۔ مساوات 14.188 میں دئے مستقل پر کرتے ہوئے یوں مساوات 14.180 کا حل

$$(14.193) \quad \mathbf{E}(r) \approx \frac{jk_0 \cos \theta}{2\pi r} e^{-jk_0 r} \mathbf{f}(k_0 \sin \theta \cos \phi, k_0 \sin \theta \sin \phi)$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

$$(14.194) \quad \mathbf{f}_m(k_x, k_y) = \iint_{S_a} \mathbf{E}_d(x, y) e^{jk_x x + jk_y y} dx dy$$

کے برابر ہے۔

مساوات 14.193 کہتی ہے دور میدان، درز پر میدان کا فوریر بدل ہے جہاں فوریر بدل میں k_x اور k_y کی جگہ

$$k_x = k_0 \sin \theta \cos \phi$$

$$k_y = k_0 \sin \theta \sin \phi$$

پر کیے جاتے ہیں۔

چونکہ $\mathbf{k} \cdot \mathbf{f} = 0$ کے برابر ہے لہذا \mathbf{k} کی سمت میں f کی قیمت صفر کے برابر ہے یعنی z محدود پر صرف f_x اور f_y پایا جائے گا۔ کروی محدود میں یوں

(14.195)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = jk_0 \frac{e^{-jk_0 r}}{2\pi r} \left[\mathbf{a}_\theta (f_x \cos \phi + f_y \sin \phi) + \mathbf{a}_\phi \cos \theta (f_y \cos \phi - f_x \sin \phi) \right]$$

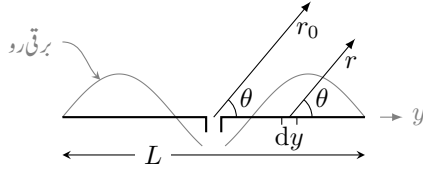
لکھا جاسکتا ہے۔ مقناطیسی میدان $\frac{\mathbf{E}}{H} = Z_0$ سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔

مثال 14.10: مستطیل درز کی x سمت میں لمبائی $2a$ ہے جبکہ y سمت میں اس کی لمبائی $2b$ ہے۔ درز $z = 0$ پر پایا جاتا ہے جبکہ اس پر میدان $\mathbf{E}_d = E_0 \mathbf{a}_x$ ہے۔ دور میدان حاصل کریں۔
حل: پہلے f_m حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} f_m &= E_0 \mathbf{a}_x \int_{-a}^a \int_{-b}^b e^{jk_x x + jk_y y} dx dy \\ &= 4ab E_0 \mathbf{a}_x \frac{\sin k_x a}{k_x a} \frac{\sin k_y b}{k_y b} \\ &= 4ab E_0 \mathbf{a}_x \frac{\sin k_0 a \sin \theta \cos \phi}{k_0 a \sin \theta \cos \phi} \frac{\sin k_0 b \sin \theta \sin \phi}{k_0 b \sin \theta \sin \phi} \\ &= 4ab E_0 \mathbf{a}_x \frac{\sin u \sin v}{u v} \end{aligned}$$

اب دور میدان مساوات 14.195 سے لکھتے ہیں۔

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{jk_0 4ab E_0}{2\pi r} e^{-jk_0 r} \frac{\sin u \sin v}{u v} (\mathbf{a}_\theta \cos \phi - \mathbf{a}_\phi \sin \phi \cos \theta)$$



شکل 14.20: خطی اینٹینا پر سائن نما برقی رو پائی جاتی ہے۔

14.12 خطی اینٹینا

مختصر جفت قطب ہم دیکھ چکے ہیں جہاں جفت قطب کی لمبائی طول موج سے بہت کم $\lambda \ll l$ تھی۔ متعدد تعداد کے نقطہ منبع کو سیدھ میں قریب قریب رکھنے سے کسی بھی لمبائی کا اینٹینا حاصل کیا جا سکتا ہے۔ آئیں ایسی لمبی اینٹینا پر غور کریں۔ اینٹینا پر سائن نما برقی رو تصور کی جائے گی۔

شکل 14.20 میں L لمبائی کا اینٹینا دکھایا گیا ہے جسے بالکل درمیان سے برقی رو مہیا کی گئی ہے۔ اینٹینا کے دونوں بالکل یکساں نصف اطراف میں برقی رو بھی ہم شکل ہے۔ ہم L کے چھوٹے چھوٹے ٹکڑوں dy کو انفرادی جفت قطب تصور کرتے ہوئے ان سب کے میدان کا مجموعہ حاصل کرتے ہوئے اس اینٹینا کا دور میدان حاصل کریں گے۔

تجربے سے ثابت ہوتا ہے کہ ایسی اینٹینا میں برقی رو

$$(14.196) \quad I = \begin{cases} I_0 \sin \left[\frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{L}{2} + y \right) \right] & y < 0 \\ I_0 \sin \left[\frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{L}{2} - y \right) \right] & y > 0 \end{cases}$$

صورت رکھتی ہے۔ مختصر جفت قطب کی لمبائی کو dy اور اس کے دور میدان کو dE_θ لکھتے ہوئے مساوات 14.38

$$(14.197) \quad dE_\theta = j \frac{30I\beta dy}{r} \sin \theta e^{j(\omega t - \beta r)}$$

یعنی

$$(14.198) \quad dE_\theta = \frac{j60\pi e^{j(\omega t - \beta r_0)}}{r_0 \lambda} \sin \theta I e^{j\beta y} \cos \theta dy$$

دیتی ہے۔ یوں L لمبے اینٹینا کا میدان

$$(14.199) \quad E_{\theta} = k \sin \theta \int_{-L/2}^{L/2} I e^{j\beta y \cos \theta} dy$$

ہو گا جہاں

$$(14.200) \quad k = \frac{j60\pi e^{j(\omega t - \beta r_0)}}{r_0 \lambda}$$

لکھا گیا ہے۔ مساوات 14.196 استعمال کرتے اور تکمیل لیتے ہوئے

$$(14.201) \quad E_{\theta} = \frac{j60[I_0]}{r_0} \left\{ \frac{\cos[(\beta L \cos \theta)/2] - \cos(\beta L/2)}{\sin \theta} \right\} \quad \text{خطی اینٹینا کی عمومی مساوات}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں $I_0 = I_0 e^{j(\omega t - \beta r_0)}$ تاخیری برقی رو ہے۔ $\frac{\lambda}{2}$ جفت قطب کی صورت میں اسے

$$(14.202) \quad E_{\theta} = \frac{j60[I_0]}{r_0} \frac{\cos[\frac{\pi}{2} \cos \theta]}{\sin \theta} \quad \text{جفت قطب } \frac{\lambda}{2}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

میدان کی شکل مساوات 14.201 کے دائیں جانب قوسین میں بند جزو پر منحصر ہے جسے $\frac{\lambda}{2}$ جفت قطب کی صورت میں

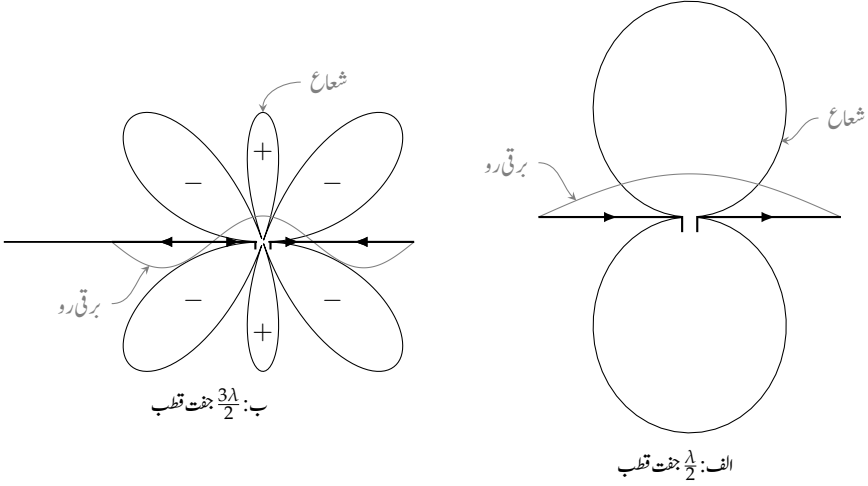
$$(14.203) \quad E_{\theta} = \frac{\cos[\frac{\pi}{2} \cos \theta]}{\sin \theta} \quad \text{جفت قطب } \frac{\lambda}{2}$$

اور 1.5λ جفت قطب کی صورت میں

$$(14.204) \quad E_{\theta} = \frac{\cos[\frac{3\pi}{2} \cos \theta]}{\sin \theta} \quad \text{جفت قطب } \frac{3\lambda}{2}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

شکل 14.21 میں $\frac{\lambda}{2}$ اور $\frac{3\lambda}{2}$ جفت قطب اور ان کے شعاع ٹنگی محدد پر دکھائے گئے ہیں۔ جفت قطب پر برقی رو کی سمتیں تیر کی نشان سے دکھائے گئے ہیں۔



شکل 14.21: 0.5λ اور 1.5λ جفت قطب کے دور میدان۔

شکل-ب میں میدان کے شعاعوں میں 180° کا زاویائی فرق پایا جاتا ہے۔

جفت قطب کو محور لیتے ہوئے دئے گئے نقش کو اس کے گرد گمانے سے تین رُخی نقش حاصل ہو گا۔

اوسط پونٹنگ سمتیہ کا بڑی رداں کے کرہ پر سطحی تکمل

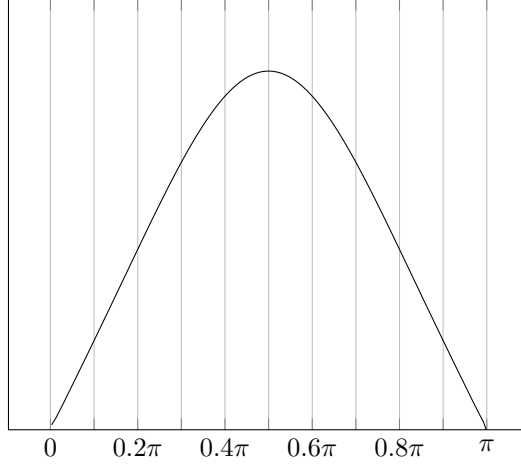
$$(14.205) \quad P = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{|E_\theta|^2}{2Z} r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi$$

عددی طریقے سے حاصل کرتے ہوئے کل اخراجی مزاحمت R حاصل کی جاتی ہے۔ اس مساوات میں $|E_\theta|$ کو مساوات 14.202 سے پر کرتے ہوئے

$$P = \frac{15I_0^2}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\cos^2[\frac{\pi}{2} \cos \theta]}{\sin \theta} \, d\theta \, d\phi$$

حاصل ہوتا ہے جہاں $Z_0 = 120\pi$ اور $r = r_0$ رکھے گئے ہیں۔ بیرونی تکمل پہلے لیتے ہوئے

$$(14.206) \quad P = 30I_0^2 \int_0^\pi \frac{\cos^2[\frac{\pi}{2} \cos \theta]}{\sin \theta} \, d\theta$$



شکل 14.22: اخراجی مزاحمت کا عددی حل۔

ماتا ہے۔ اس مساوات کو عددی طریقے سے حل کرتے ہیں۔ ایسا کرنے کی خاطر اسے مجموعے

$$(14.207) \quad P = \sum_{i=0}^n 30I_0^2 \frac{\cos^2\left[\frac{\pi}{2} \cos \theta\right]}{\sin \theta} \Delta\theta = \sum_{i=0}^n p(\theta) \Delta\theta$$

کی شکل میں لکھتے ہیں جہاں

$$(14.208) \quad p(\theta) = 30I_0^2 \frac{\cos^2\left[\frac{\pi}{2} \cos \theta\right]}{\sin \theta}$$

لکھا گیا ہے۔ شکل 14.22 میں کار تینی محدود پر تفاعل $p(\theta)$ کو دکھایا گیا ہے۔ افقی محدود پر $\theta = 0$ تا $\theta = \pi$ ہے جبکہ عمودی محدود پر $p(\theta)$ ہے۔ اگر $\theta = 0$ تا π کو n برابر ٹکڑوں میں تقسیم کیا جائے تو ہر ٹکڑے کی چوڑائی $\frac{\pi}{n}$ ہوگی۔ گراف کے ایسے ہر ٹکڑے کو مستطیل تصور کیا جاسکتا ہے۔ ان تمام مستطیل کے رقبے جمع کرتے ہوئے مکمل حاصل کیا جاتا ہے۔ اسے کہتے ہیں عددی طریقہ۔

شکل میں $n = 10$ لیا گیا ہے۔ یوں ہمیں دس مستطیل کے رقبے حاصل کرنے ہیں۔ ہر مستطیل کے دونوں اطراف کے قد کی اوسط قیمت کو مستطیل کا قد تصور کیا جائے گا۔ بائیں بازو سے شروع کرتے ہوئے پہلے مستطیل کے بائیں طرف کا قد 0 ہے جبکہ اس کے دائیں طرف کا قد $\theta = 0.1\pi$ پر مساوات 14.208 سے

$$(14.209) \quad p_1(\theta) = 30I_0^2 \frac{\cos^2\left[\frac{\pi}{2} \cos(0.1\pi)\right]}{\sin(0.1\pi)} = 0.573I_0^2$$

جدول 14.2: برابر زاویائی فاصلوں پر تفاعل کے قیمت۔

$30I_0^2 \frac{\cos^2[\pi/2 \cos \theta]}{\sin \theta}$	θ
0	0.0π
$00.573I_0^2$	0.1π
$04.457I_0^2$	0.2π
$13.492I_0^2$	0.3π
$24.677I_0^2$	0.4π
$30I_0^2$	0.5π
$24.677I_0^2$	0.6π
$13.492I_0^2$	0.7π
$04.457I_0^2$	0.8π
$00.573I_0^2$	0.9π
0	1.0π

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح بقایا تمام نقطوں پر بھی قد حاصل کرتے ہوئے جدول 14.2 میں دیے گئے ہیں۔

شکل 14.22 میں بائیں سے دوسرے مستطیل ($\theta = 0.1\pi$ تا $\theta = 0.2\pi$) کا رقبہ

$$\begin{aligned} \text{اوسط قد} \times \text{چوڑائی} &= \text{رقبہ} \\ &= 0.1\pi \times \left(\frac{0.573I_0^2 + 4.457I_0^2}{2} \right) \\ &= 0.79I_0^2 \end{aligned}$$

ہے۔

جدول 14.2 کی مدد سے کل رقبہ

$$\begin{aligned} P &= 0.1\pi I_0^2 \left(\frac{0}{2} + 0.573 + 4.457 + 13.492 + 24.677 + 30 \right. \\ &\quad \left. + 24.677 + 13.492 + 4.457 + 0.573 + \frac{0}{2} \right) \end{aligned}$$

یعنی

$$(14.210) \quad P = 36.5675I_0^2$$

حاصل ہوتا ہے۔ سائن نما برقی رو کی چوٹی I_0 ہونے کی صورت میں مزاحمت R میں طاقت کا ضیاع $\frac{1}{2}I_0^2R$ ہوتا ہے لہذا ان دونوں کو برابر لکھتے ہوئے

$$\frac{1}{2}I_0^2R_{\text{اخراجی}} = 36.5675I_0^2$$

$\frac{\lambda}{2}$ لمبائی کے جفت قطب کا اخراجی مزاحمت

$$(14.211) \quad R_{\text{اخراجی}} = 73.13 \Omega \quad \text{جفت قطب} \quad \frac{\lambda}{2}$$

حاصل ہوتا ہے۔ یہ وہ مزاحمت ہے جو اینڈینا کو طاقت مہیا کرنے یا اس سے طاقت وصول کرنے والے تریسلی تار کو نظر آتی ہے۔ $\frac{\lambda}{2}$ اینڈینا کے اخراجی مزاحمت کا موازنہ مختصر جفت قطب کی اخراجی مزاحمت (0.63Ω) کے ساتھ کریں جسے صفحہ 757 پر مثال 14.1 میں حاصل کیا گیا ہے۔

اینڈینا کی رکاوٹ میں $j42.5$ اوہم کا خیالی جزو ($Z = 73.1 + j42.5$) بھی پایا جاتا ہے۔ اینڈینا کی لمبائی چند فی صد کم کرنے سے خیالی جزو صفر کیا جاسکتا ہے، البتہ اس سے حقیقی جزو قدر کم ہو کر 70Ω رہ جاتا ہے۔ زیادہ سے زیادہ طاقت کی منتقلی کے لئے ضروری ہے کہ ایسے اینڈینا کو 70Ω قدرتی رکاوٹ کے تریسلی تار کے ساتھ جوڑا جائے۔ $\frac{3\lambda}{2}$ اینڈینا کا اخراجی مزاحمت 100Ω حاصل ہوتا ہے۔

مثال 14.11: $\frac{\lambda}{2}$ لمبائی کے خطی اینڈینا کی سمتیت حاصل کریں۔

حل: مساوات 14.78 میں مساوات 14.203 پر کرتے ہوئے

$$(14.212) \quad D = \frac{4\pi}{\iint_{4\pi} P_n(\theta, \phi) d\Omega} = \frac{4\pi}{2\pi \int_0^\pi \frac{\cos^2[\frac{\pi}{2} \cos \theta]}{\sin^2 \theta} \sin \theta d\theta}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس کا مساوات 14.206 سے موازنہ کرتے ہوئے، مساوات 14.210 میں حاصل قیمت $36.5675I_0^2$ استعمال کرتے ہوئے

$$(14.213) \quad D = \frac{4\pi}{2\pi \left(\frac{36.5675I_0^2}{30I_0^2} \right)} = 1.64$$

حاصل ہوتا ہے۔

14.13 چلتی موج اینٹینا

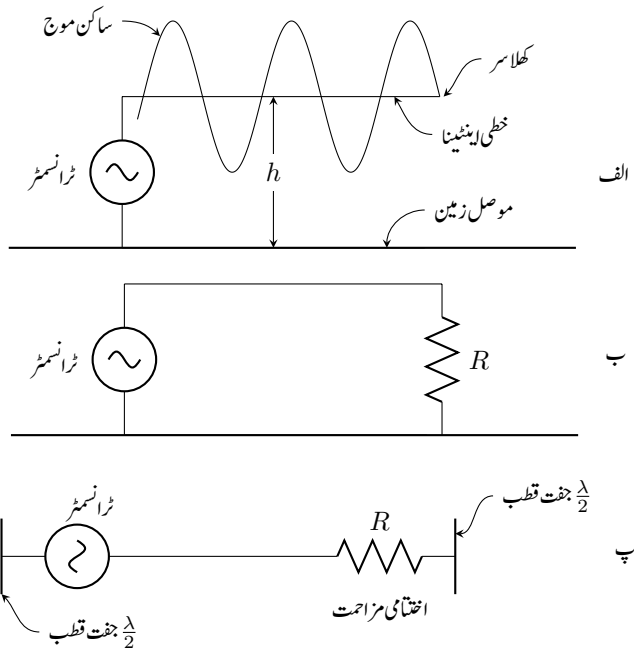
گزشتہ حصے میں خطی اینٹینا پر سائن نما برقی رو تصور کیا گیا۔ ایسی دہلی موصل تار، جس کا قطر d طول موج λ سے بہت کم ہو $d < \frac{\lambda}{100}$ اور جس کا آخری سر اکھلے سرے ہو، کے برقی رو کی شکل تقریباً ایسی ہی ہوتی ہے۔

کئی طول موج لمبی خطی اینٹینا موصل زمین کے متوازی h اونچائی پر پائی جاتی ہے۔ جیسے شکل 14.23-الف میں دکھایا گیا ہے، اس کو بائیں جانب سے ٹرانسمیٹر 55 طاقت مہیا کرتا ہے۔ خطی اینٹینا اور موصل زمین مل کر کھلے سرے تریسلی تار کا کردار ادا کرتے ہیں۔ یوں کھلے سر پر آمدی برقی رو اور یہاں سے انعکاسی برقی رو مل کر ساکن موج کو جنم دیتے ہیں جسے شکل-الف میں دکھایا گیا ہے۔ تار کے کھلے سر پر برقی رو کے ساکن موج کا صفر پایا جاتا ہے جبکہ $\frac{\lambda}{4}$ فاصلے پر اس کی چوٹی پائی جاتی ہے۔ یہی برقی رو گزشتہ حصے میں خطی اینٹینا پر فرض کی گئی تھی۔

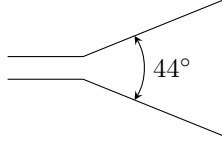
آئیں اب تریسلی تار کے قدرتی رکاوٹ کے برابر مزاحمت R ، تار کے کھلے سر اور زمین کے درمیان جوڑیں۔ ایسا کرنے کے بعد اینٹینا پر انعکاسی موج پیدا نہیں ہوگی۔ تار میں قابل نظر انداز ضیاع کی صورت میں پوری لمبائی پر برقی رو کی قیمت یکساں ہوگی جبکہ لمبائی جانب بڑھتا زادیائی فرق پایا جائے گا۔ اس طرح قدرتی رکاوٹ کے برابر مزاحمت سے اختتام کردہ اینٹینا کو شکل 14.23-ب میں دکھایا گیا ہے۔ زمین سے دور خطی اینٹینا پر ایسی ہی مسلسل موج پیدا کرنے کی ترکیب شکل 14.23-پ میں دکھائی گئی ہے جہاں $\frac{\lambda}{2}$ اینٹینا کے وسطی نقطے کو زمین تصور کیا گیا ہے۔

مسلسل موج کے اس خطی اینٹینا کو چھوٹے چھوٹے، سلسلہ وار جڑے، لمبائی جانب اخراجی جفت قطب کا مجموعہ تصور کیا جاسکتا ہے۔ ایسا شکل میں دکھایا گیا ہے۔ مساوات 14.128 غیر سمتی ارکان کے قطار کا تقابل پذیر نقش

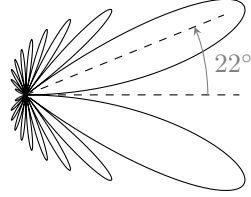
$$E_n = \frac{1}{n} \frac{\sin \frac{n\psi}{2}}{\sin \frac{\psi}{2}}$$



شکل 14.23: مسلسل موج ایندینا۔



(ب) دو مسلسل موج اینٹینا کو 44° پر رکھ کر بہتر سمتیت حاصل کی جاتی ہے۔



الف: محلی اختتام کردہ مسلسل موج اینٹینا۔

شکل 14.24

دیتی ہے جہاں لمبائی جانب اخراج کی صورت میں $\psi = \beta d (\cos \theta - 1)$ کے برابر ہے۔ اگر انفرادی رکن کا نقش E_0 ہو تب ضرب نقش کی ترکیب سے قطار کا نقش

$$E(\theta) = \frac{E_0 \sin \frac{n\psi}{2}}{n \sin \frac{\psi}{2}}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ انتہائی چھوٹے جفت قطب کا نقش $E_0 = \sin \theta$ ہے لہذا لمبے اینٹینا $L = d(n - 1) \approx nd$ لئے

$$(14.214) \quad E(\theta) = \frac{\sin \theta \sin \left[\frac{\beta L}{2} (\cos \theta - 1) \right]}{n \sin \left[\frac{\beta L}{2n} (\cos \theta - 1) \right]}$$

لکھا جائے گا۔ یہ اینٹینا لمبائی جانب اخراج کرتا ہے لہذا θ کی قیمت زیادہ نہیں ہو گی۔ ایسی صورت میں مندرجہ بالا مساوات کو

$$(14.215) \quad E(\theta) = \sin \theta \frac{\sin [\beta L/2 (\cos \theta - 1)]}{\beta L/2 (\cos \theta - 1)}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

شکل 14.24-الف میں $n = 20$ اور $d = \frac{\lambda}{4}$ کی صورت میں حاصل 4.75λ لمبائی کے اینٹینا کی شعاع دکھائی گئی ہے۔ مرکزی شعاع $\theta = 22^\circ$ پر پائی جاتی ہے۔ جیسا شکل-ب میں دکھایا گیا ہے، دو عدد ایسے اینٹینا کو آپس میں 44° کے میکانی زاویے پر رکھنے سے یک سمتی اینٹینا حاصل ہو گا جسے دو تار کے ترسیلی تار سے طاقت مہیا کی جاسکتی ہے۔ دونوں کے قریبی شعاع مل کر بہتر سمتیت دیتی ہے۔

زمین کے متوازی اینٹینا کا عمودی شعاع حاصل کرنے کی خاطر زمین میں اینٹینا کے عکس کو بھی مد نظر رکھا جائے گا۔

14.14 چھوٹا گھیرا اینٹینا

شکل 14.25- الف میں d قطر کا گھیرا اینٹینا⁵⁶ دکھایا گیا ہے جس میں I برقی رو گزر رہی ہے۔ دائرے کا قطر طول موج سے بہت کم $\lambda \ll d$ ہے لہذا پورے گول دائرے پر یک قیمت اور ہم قدم برقی رو تصور کی جاسکتی ہے۔ اس چھوٹے گول دائرے کو شکل-ب کا چکور تصور کرتے ہوئے، دور میدان حاصل کرتے ہیں۔ چکور اور گول دائرے کے رقبے برابر

$$(14.216) \quad S = s^2 = \frac{\pi d^2}{4}$$

لئے جاتے ہیں۔ چکور کے چار اطراف کو چار جفت قطب تصور کرتے ہوئے دور میدان حاصل کیا جائے گا۔ چکور کو کارٹیزی محدد کے مرکز پر $z = 0$ سطح پر رکھتے ہوئے $x = 0$ سطح پر دور میدان حاصل کیا جائے گا۔ سطح $x = 0$ پر چکور کے اطراف الف اور پ برابر مگر الٹ سمت میں میدان پیدا کرتے ہیں لہذا ان کا مجموعہ صفر کے برابر ہے۔ اطراف ب اور ت بطور مختصر جفت قطب کردار ادا کرتے ہیں جن کا نقش $x = 0$ سطح پر غیر سمتی ہے لہذا انہیں دو غیر سمتی جفت قطب تصور کیا جاسکتا ہے۔ ایسا ہی شکل-پ میں دکھایا گیا ہے جہاں سے دور میدان

$$E(\theta) = E_2 e^{-j\frac{\psi}{2}} - E_4 e^{j\frac{\psi}{2}}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس مساوات میں $E_2 = E_4$ اور $\psi = \beta s \sin \theta$ ہیں۔ یوں

$$E(\theta) = -j2E_2 \sin \left(\frac{\beta s}{2} \sin \theta \right)$$

لکھا جاسکتا ہے جسے $s \ll \lambda$ کی صورت میں

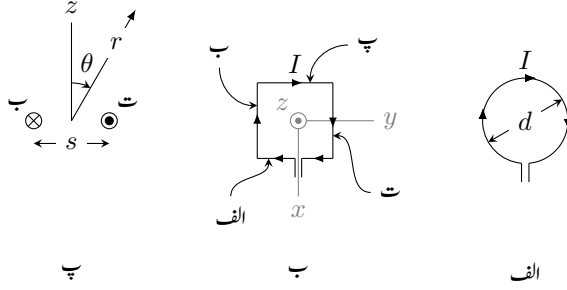
$$(14.217) \quad E(\theta) = -jE_2 \beta s \sin \theta$$

لکھا جاسکتا ہے۔ صفحہ 754 پر دیے گئے جدول 14.1 سے مختصر جفت قطب کے دور میدان E_θ کے حیطے کو E_2 کی جگہ پر کرتے ہوئے

$$(14.218) \quad E(\theta) = \frac{60\pi I l}{r\lambda} \beta s \sin \theta$$

حاصل ہوتا ہے۔ شکل 14.25-پ میں جفت قطب کی لمبائی $l = s$ ہے جبکہ چکور کا رقبہ $S = s^2$ ہے لہذا

$$(14.219) \quad E(\theta) = \frac{120\pi^2 I S}{r} \frac{1}{\lambda^2} \sin \theta$$



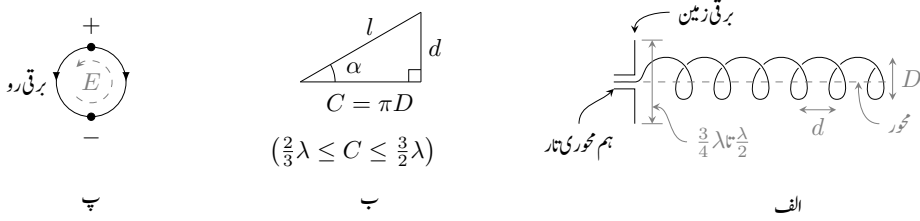
شکل 14.25: دائرہ اور چکوری اینٹینا

لکھا جا سکتا ہے۔ مندرجہ بالا مساوات S رقبے کے چھوٹے دائرے یا چکوری کا دور میدان دیتی ہے۔ چکوری کا قطر جتنا کم ہو یہ مساوات اتنا ہی زیادہ درست میدان دیتا ہے۔ حقیقت میں S رقبے کے کسی بھی شکل کے چھوٹے بند دائرے کا دور میدان یہی مساوات دیتا ہے۔

14.15 پیچ دار اینٹینا

طول موج برابر محیط کا پیچ دار لچھا لمبائی جانب اخراجی اینٹینا کا کام کرتا ہے۔ ایسے اینٹینا کی شعاع، دائری قطبیت رکھتی ہے۔ لچھے کی لمبائی اور اینٹینا کی سمتیت راست تناسب کا تعلق رکھتے ہیں۔ پیچ دار اینٹینا⁵⁷ کا قطر D، اس کا محیط C، چکر کے مابین فاصلہ d، چکر کی لمبائی l اور پیچ دار زاویہ α ، اس کے اہم ناپ ہیں۔ ان تمام کو شکل 14.26 میں دکھایا گیا ہے۔ ایسا لچھے جس کا محیط $C = \pi D$ تقریباً ایک طول موج (1λ) لمبا ہو پر ایک مکمل موج پائی جائے گی۔ یوں نصف چکر پر برقی موج کا مثبت حصہ اور بقایا پر موج کا منفی حصہ پایا جائے گا۔ لچھے کے ایک چکر کو شکل-پ میں دکھایا گیا ہے جہاں اس پر برقی رو اور برقی بار دکھائے گئے ہیں جو میدان E پیدا کرتے ہیں۔ جیسے جیسے برقی رو کی موج اینٹینا پر آگے حرکت کرتی ہے ویسے ویسے میدان E گھومے گا جو اینٹینا کے محور پر دائری قطبیت⁵⁸ کو جنم دے گی۔ پیچ دار لچھا بطور مسلسل موج اینٹینا کردار ادا کرتا ہے اور اس کی خاصیت یہ ہے کہ اسے کسی مزاحمت سے اختتام پذیر کرنے کی ضرورت نہیں ہوتی۔ اس پر برقی رو بالکل مسلسل موج اینٹینا کی مانند ہوتی ہے۔ اینٹینا کے کھلے سر سے انعکاسی موج قابل نظر انداز ہونے کے ناطے، اس پر یکساں حیلے کے برقی رو کی موج خارجی جانب حرکت کرتی پائی جاتی ہے۔

⁵⁷ helical-beam antenna
⁵⁸ circular polarization



شکل 14.26: بیچ دار اینٹینا۔

بیچ دار اینٹینا کو لمبائی جانب اخراجی قطار تصور کیا جا سکتا ہے جہاں ہر چکر کو انفرادی منبع فرض کیا جاتا ہے۔ ضرب نقش کے اصول سے، انفرادی منبع کا نقش ضرب غیر سمتی ارکان کے قطار کا نقش،

$$(14.220) \quad E(\theta) = \cos \theta \frac{\sin(n\psi/2)}{\sin(\psi/2)}$$

اینٹینے کا نقش دیتا ہے۔ اس مساوات میں انفرادی چکر کے نقش کو $\cos \theta$ کے لگ بھگ تصور کیا گیا ہے۔ مندرجہ بالا مساوات میں

$$(14.221) \quad \psi = \beta d \cos \theta - \frac{c\beta L}{v}$$

کے برابر ہے جہاں دو قریبی چکر کے مابین زاویائی فرق $\frac{c\beta L}{v}$ ہو گا جو ایک چکر گولائی L پر v رفتار سے حرکت کرتی موج کا زاویائی فرق ہے۔

مساوات 14.220 اور مساوات 14.215 کے موازنے سے معلوم ہوتا ہے کہ یہ قدر مختلف ہیں۔ مساوات 14.220 میں $\cos \theta$ پایا جاتا ہے جس کی قیمت $\theta = 0$ پر زیادہ سے زیادہ ہے جو اینٹینا کا محور یعنی شعاعی اخراج کی سمت ہے۔ اس کے برعکس مساوات 14.215 میں $\sin \theta$ کا جزو ضربی پایا جاتا ہے جو اینٹینا کے محور پر صفر کے برابر ہے لہذا اس اینٹینا کی شعاع دو شانی ہے اور اس کی سمتیت قدر کم ہے۔

چونکہ میدان دائری قطبی اور محور کے گرد یکساں ہے لہذا یہی مساوات $E_\theta(\theta)$ کے علاوہ $E_\phi(\theta)$ کا نقش بھی دیتی ہے۔

کسی بھی لمبائی جانب اخراجی قطار میں تمام منبع کے میدان اینٹینا کے محور پر ہم قدم ہوتے ہیں جو

$$(14.222) \quad \psi = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$$

کی صورت میں ممکن ہوتا ہے۔ بیچ دار اینٹینا میں $\psi = -2\pi$ کے برابر ہے۔ ارکان کے مابین $\psi = -2\pi$ زاویائی فرق کی بنیاد پر حاصل نقش اور اصل بیچ دار اینٹینا کے ناپے گئے نقش میں خاصہ فرق پایا جاتا ہے۔ بیچ دار اینٹینا کی ناپی گئی سمتیت زیادہ ہے، نسن اور ووڈیارد⁵⁹ یہ ثابت کر چکے ہیں کہ n رکنی لمبائی جانب اخراجی قطار کی زیادہ سے زیادہ سمتیت اس صورت حاصل ہوتی ہے جب اس کے ارکان کے مابین $\psi = -2\pi - \frac{\pi}{n}$ زاویائی فرق پایا جاتا ہو۔ مساوات 14.220 میں ارکان کے مابین زاویائی فرق $\psi = -2\pi - \frac{\pi}{n}$ پر کرنے سے حقیقی اینٹینا کے ناپے گئے نقش جیسا نقش حاصل ہوتا ہے۔ اس سے ثابت ہوتا ہے کہ حقیقی اینٹینا پر دو قریبی چکر کے مابین یہی زاویائی فرق پایا جاتا ہے۔ اس نتیجے کو تسلیم کرتے ہوئے مساوات 14.221 سے

$$(14.223) \quad \psi = \beta d \cos \theta - \frac{c\beta L}{v} = -2\pi - \frac{\pi}{n}$$

لکھتے ہوئے

$$(14.224) \quad \frac{v}{c} = \frac{\frac{1}{\lambda}}{\frac{d}{\lambda} + \frac{2n+1}{2n}}$$

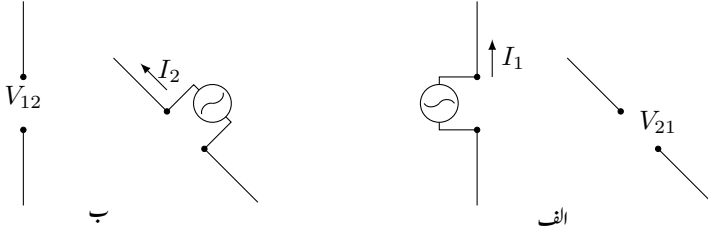
حاصل ہوتا ہے۔ یوں $C = \lambda$ ، $\alpha = 12^\circ$ اور $n = 20$ کی صورت میں $\frac{v}{c} = 0.82$ ہوگی۔ حقیقی بیچ دار اینٹینا پر موج کی رفتار یہی ناپی جاتی ہے۔ ایسا معلوم ہوتا ہے کہ بیچ دار اینٹینا خود بخود موج کی رفتار کو اس قیمت پر رکھتی ہے جس پر اینٹینا کی سمتیت زیادہ سے زیادہ حاصل ہو۔ تین سے زیادہ چکر پر مبنی بیچ دار اینٹینا یہ عمل $(5^\circ < \alpha < 20^\circ)$ اور $(\frac{3}{4}\lambda < C < \frac{3}{2}\lambda)$ تک حاصل کرنے کی صلاحیت رکھتی ہے۔ چکر کی تعداد بڑھا کر سمتیت بڑھائی جاسکتی ہے۔

بیچ دار اینٹینا کی سمتیت تقریباً

$$(14.225) \quad D = 15 \left(\frac{C}{\lambda} \right)^2 \frac{nd}{\lambda}$$

کے برابر ہے۔ یوں $C = \lambda$ اور $\alpha = 12^\circ$ کی صورت میں $D = 64$ ہوگی۔

بیچ دار زاویہ $\alpha = 12^\circ$ اور $d = 0.213\lambda$ کی صورت میں طول موج میں تقریباً پانچ چکر پائیں جائیں گے لہذا 20 چکر کا اینٹینا $20 \times 0.213\lambda = 4.3\lambda$ لمبائی کا ہوگا۔ اتنی لمبائی کے عام لمبائی جانب اخراجی اینٹینا کی سمتیت چار گنا سے بھی قدر کم ہوتی ہے۔



شکل 14.27: دو اینڈینا کے مابین باہمیت۔

پیچ دار اینڈینا کی سمتیت زیادہ ہونے کا مطلب ہے کہ اس کی اخراجی سطح حقیقی سطح سے بہت زیادہ ہوتی ہے۔ مصنوعی سیاروں پر مبنی ذرائع ابلاغ میں پیچ دار اینڈینا کلیدی کردار ادا کرتی ہے۔

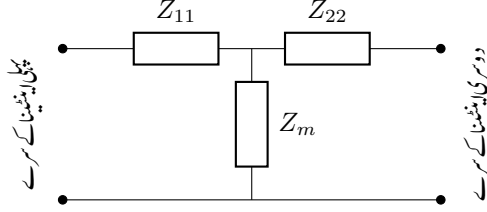
14.16 دو طرفہ کردار

اینڈینا شعاع خارج کرتی ہے اور یا اسے وصول کرتی ہے۔ اینڈینا کے تمام خاصیت دو طرفہ ہیں۔ یوں اس کی سمتیت، اخراجی رقبہ، نقش اور اخراجی مزاحمت دونوں (اخراجی اور وصولی) صورتوں میں برابر پائے جاتے ہیں۔ البتہ اینڈینا پر برقی رو اخراجی اور وصولی صورت میں مختلف صورت رکھتی ہے۔

اینڈینا کی دو طرفہ خاصیت⁶⁰ پر شکل 14.27 کی مدد سے غور کرتے ہیں۔ دونوں اینڈینا کے درمیان غیر متحرک، خطی اور غیر سمتی خطہ پایا جاتا ہے۔ شکل-الف میں پہلے اینڈینا کو صفر رکاوٹ اور f تعدد کے منبع سے طاقت مہیا کی جاتی ہے جس سے پہلے اینڈینا کے داخلی سروں پر I_1 برقی رو اور دوسرے اینڈینا کے کھلے برقی سروں پر برقی دباؤ V_{21} پیدا ہوتی ہے۔ اگر منبع طاقت کو دوسرے اینڈینا کے ساتھ جوڑا جائے تب دوسرے اینڈینا میں I_2 برقی رو اور پہلے اینڈینا کے کھلے برقی سروں پر V_{12} برقی دباؤ پیدا ہوگا۔ شکل-ب میں ایسا دکھایا گیا ہے۔ چونکہ کسی بھی چار سروں والے برقی دور کا مساوی T دور بنانا ممکن ہے لہذا ان اینڈینا کے چار برقی سروں کے مابین بھی ایسا کرنا ممکن ہو گا۔ شکل 14.28 میں یہ مساوی دور دکھایا گیا ہے جہاں سے

$$V_{21} = I_1 Z_m$$

$$V_{12} = I_2 Z_m$$



شکل 14.28: مساوی T دور۔

یا

$$(14.226) \quad \frac{V_{21}}{I_1} = \frac{V_{12}}{I_2} = Z_m$$

لکھا جا سکتا ہے۔ دونوں اینڈینا کو برابر برقی رو ($I_1 = I_2$) مہیا کرنے کی صورت میں

$$(14.227) \quad V_{21} = V_{12}$$

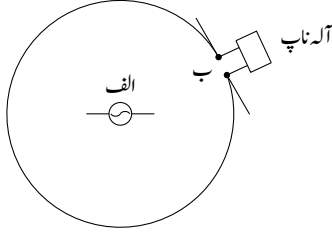
ہو گا۔

اینڈینا کی دو طرفہ خاصیت کے تحت اگر کسی ایک اینڈینا کو برقی رو I مہیا کی جائے جس سے کسی دوسرے اینڈینا میں برقی دباؤ V پیدا ہو تب دوسرے اینڈینا کو برقی رو I فراہم کرنے سے پہلے اینڈینا میں برقی دباؤ V پیدا ہو گا۔

دونوں اینڈینا کے مابین مشترکہ رکاوٹ Z_m دونوں اطراف سے برابر ہے۔

نقش

شکل 14.29 میں اینڈینا-الف شعاع خارج کر رہی ہے جبکہ اینڈینا-ب اس شعاع کو وصول کر رہی ہے۔ اینڈینا-الف ساکن ہے جبکہ اینڈینا-ب اس کے گرد گول دائرے پر گھوم رہی ہے۔ اینڈینا-ب پر پیدا ہونے والی برقی دباؤ، اینڈینا-الف کی نقش دے گی۔ اب اگر دائرے پر گھومتی اینڈینا شعاع خارج کرے اور ساکن اینڈینا اس شعاع کو وصول کرے تو اینڈینا کے دو طرفہ خاصیت کے تحت وہی نقش دوبارہ حاصل ہو گا۔ یوں کسی بھی اینڈینا کا اخراجی نقش اور وصولی نقش بالکل یکساں ہوتے ہیں۔ اینڈینا کی دو طرفہ خاصیت اس کے نقش کے لئے بھی درست ثابت ہوتی ہے۔



شکل 14.29: نقش کی ناپ۔

سمتیت اور اخراجی رقبہ

مساوات 14.78

$$(14.228) \quad D = \frac{4\pi}{\int \int_{4\pi} P_n(\theta, \phi) d\Omega}$$

کے تحت سمتیت صرف اور صرف نقش پر منحصر ہے اور ہم دیکھ چکے ہیں کہ اینٹینا کا اخراجی نقش اور اس کا وصولی نقش بالکل یکساں ہوتے ہیں لہذا اس کی اخراجی سمتیت اور وصولی سمتیت بھی بالکل یکساں ہوں گے۔

اگر اخراجی سمتیت اور وصولی سمتیت برابر ہوں تب مساوات 14.102

$$(14.229) \quad D = \frac{4\pi}{\lambda^2} S_{\text{اخراجی}}$$

کے تحت اخراجی رقبہ اور وصولی رقبہ بھی برابر ہوں گے۔ اینٹینا کی دو طرفہ خاصیت سمتیت اور رقبے کے لئے بھی درست ثابت ہوتی ہے۔

اخراجی مزاحمت اور وصولی مزاحمت

اخراجی اینٹینا کو صرف داخلی برقی سروں سے برقی رو مہیا کی جاسکتی ہے جبکہ وصولی اینٹینا کے تمام جسامت پر برقی دباؤ پیدا ہوتا ہے جس سے اینٹینا کی برقی رو عموماً اخراجی صورت سے مختلف ہوگی۔

اگر اینٹینا کو مختلف برقی رکاوٹوں کا مجموعہ تصور کیا جائے تب اگرچہ اس کے مختلف حصوں پر برقی رو مختلف ممکن ہے لیکن کسی بھی دو سروں کے مابین رکاوٹ تبدیل نہیں ہوتی۔ یوں اینٹینا کے برقی سروں کے مابین برقی رکاوٹ کا دارومدار اینٹینا میں برقی رو کی صورت پر نہیں ہوتی۔ اس کا اخراجی رکاوٹ اور وصولی رکاوٹ بالکل برابر ہوتے ہیں۔ اینٹینا کی دو طرفہ خاصیت یہاں بھی قابل استعمال ہے۔

14.17 جھری اینٹینا

وسیع موصل چادر میں $\frac{\lambda}{2}$ لمبائی کی جھری شکل 14.30-الف میں دکھائی گئی ہے۔ اگر aa' کو تریلی تار سے جوڑا جائے تو جھری کے گرد موصل چادر میں برقی رو کی وجہ سے شعاعی اخراج پیدا ہوگی۔ جھری کو از خود موصل چادر فرض کرتے اینٹینا تصور کیا جاسکتا ہے جس کی مدد سے جھری اینٹینا⁶¹ کا میدان حاصل کیا جاتا ہے۔ شکل-ب میں اسی تکملہ اینٹینا⁶² کو دکھایا گیا ہے۔ جھری اینٹینا کو aa' پر طاقت چوڑائی کے اطراف کے مابین فراہم کی جاتی ہے جبکہ تکملہ اینٹینا کو لمبائی جانب کے اطراف کے مابین طاقت aa' پر مہیا کی جاتی ہے۔ یوں ان کے میدان آپس میں 90° پر ہوں⁶³ گے۔ جھری اینٹینا کی اخراجی رکاوٹ Z_g اور تکملہ اینٹینا کی اخراجی رکاوٹ Z_d کا آپس میں تعلق

$$(14.230) \quad Z_g = \frac{Z_0^2}{4Z_d}$$

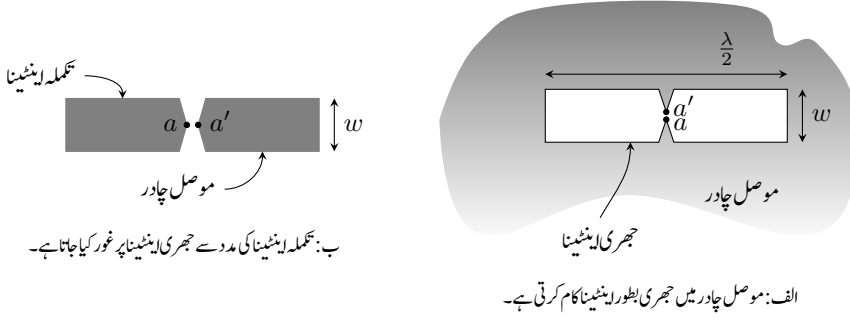
ہے جہاں $Z_0 = 120\pi$ خلاء کی قدرتی رکاوٹ ہے۔

اس طرح جفت قطب کے خصوصیات جانتے ہوئے جھری کے خصوصیات دریافت کئے جاسکتے ہیں۔ یوں اگر جھری کی چوڑائی $\lambda \ll c$ اور اس کی لمبائی $\frac{\lambda}{2}$ کر دی جائے تو تکملہ اینٹینا (صفحہ 805) کی اخراجی رکاوٹ $Z_d = 73 + j42.5$ جانتے ہوئے جھری اینٹینا کی اخراجی رکاوٹ

$$(14.231) \quad Z_g = \frac{377^2}{4 \times (73 + j42.5)} = 363 - j211 \Omega$$

لکھی جاسکتی ہے۔

slot antenna⁶¹
complementary antenna⁶²
Booker's theory⁶³



شکل 14.30: جھری اینٹینا اور اس کا تکاملہ اینٹینا۔

14.18 پچا اینٹینا

شکل 14.31 میں پچا اینٹینا⁶⁴ دکھایا گیا ہے جسے بائیں جانب سے مستطیلی تریسلی تار طاقت مہیا کر رہی ہے۔ پچا اینٹینا کو مستطیلی تریسلی تار کا کھلا منہ تصور کیا جا سکتا ہے۔ مستطیلی تریسلی تار کا منہ بڑھانے سے اینٹینا کی اخراجی سطح بڑھانا مقصد ہے جس سے سمتیت بڑھتی ہے۔ اگرچہ پچا کے منہ پر ہم قدم میدان ہی سے بہتر سمتیت حاصل ہوگی، حقیقت میں ایسا ہم قدم میدان حاصل کرنا ممکن نہیں ہوتا۔ یوں حقیقی اینٹینا میں پچا کے منہ پر میدان میں فرق کو کسی مخصوص مقدار δ سے کم رکھا جاتا ہے۔ شکل-ب کو دیکھ کر

$$\cos \theta = \frac{l}{l + \delta}$$

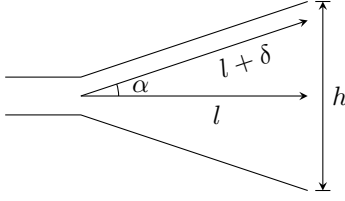
$$\sin \theta = \frac{h}{2(l + \delta)}$$

$$\tan \theta = \frac{h}{2l}$$

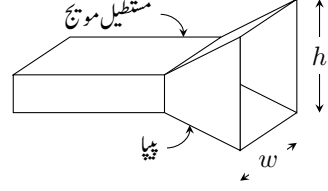
لکھے جا سکتے ہیں۔ کم δ کی صورت میں ان مساوات سے

$$(14.232) \quad l = \frac{h^2}{8\delta}$$

$$(14.233) \quad \theta = \tan^{-1} \frac{h}{2l} = \cos^{-1} \frac{l}{l + \delta}$$



ب: پیپا اینٹینا کے اہم ناپ۔



الف: پیپا اینٹینا۔

شکل 14.31: پیپا اینٹینا اور اس کے اہم ناپ۔

لکھا جا سکتا ہے۔ برقی میدان h سمت میں اور مقناطیسی میدان w سمت میں تصور کرتے ہوئے آگے پڑھیں۔ برقی میدان E کے سطح پر اس فرق کو $\frac{\lambda}{5} < \delta$ رکھا جاتا ہے جس سے پیپے کے منہ پر کل فرق $\pm 36^\circ$ تک محدود رہتا ہے جبکہ مقناطیسی میدان H کے سطح پر فرق $\frac{3\lambda}{8} < \delta$ تک محدود رکھا جاتا ہے۔ مقناطیسی میدان کے سطح پیپے کے اطراف پر برقی میدان سطح کے متوازی ہونے کی وجہ سے صفر ہوتا ہے لہذا میدان میں زیادہ زاویائی فرق سے دور میدان زیادہ متاثر نہیں ہوتا۔

مثال 14.12: شکل میں $h = 10\lambda$ ہے جبکہ تریسلی تار میں TE_{10} موج پائی جاتی ہے۔ شکل میں w اور نصف زاویے θ اور ϕ حاصل کریں۔

حل: برقی میدان کی سطح پر $\frac{\lambda}{5} < \delta$ لیتے ہوئے

$$l = \frac{h^2}{8\delta} = \frac{100\lambda^2}{8 \times \frac{\lambda}{5}} = 62.5\lambda$$

حاصل ہوتا ہے جس سے E سطح پر

$$\theta = \tan^{-1} \frac{h}{2l} = \tan^{-1} \frac{10\lambda}{2 \times 62.5\lambda} = 4.6^\circ$$

حاصل ہوتا ہے۔ مقناطیسی میدان پر $\frac{3\lambda}{8} < \delta$ لیتے ہوئے

$$\phi = \cos^{-1} \frac{62.5\lambda}{62.5\lambda + \frac{3}{8}\lambda} = 6.26^\circ$$

حاصل ہوتا ہے۔ پیپے کی چوڑائی

$$w = 2l \tan \phi = 2 \times 62.5 \times \lambda \times \tan 6.26^\circ = 13.7\lambda$$

حاصل ہوتی ہے۔

14.19 فرانس ریڈار مساوات

شکل 14.32 میں S_t اخراجی رقبے کا ترسیل کنندہ اور S_w اخراجی رقبے کا وصول کنندہ اینٹینا آپس میں r فاصلے پر دکھائے گئے ہیں۔ اگر غیر سمتی ترسیل کنندہ P_t طاقت کی شعاع خارج کرے تب وصول کنندہ کے قریب اکائی رقبے پر

$$(14.234) \quad P = \frac{P_t}{4\pi r^2}$$

کثافت طاقت دستیاب ہوگی جس سے وصول کنندہ

$$(14.235) \quad P'_w = PS_w$$

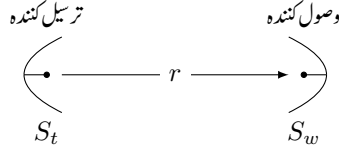
طاقت حاصل کر پائے گا۔ ترسیلی سطح S_t کے سمتی ترسیل کنندہ کی سمتیت $D = \frac{4\pi S_t}{\lambda^2}$ ہے لہذا اس کی شعاع سے وصول کنندہ

$$(14.236) \quad P_w = DP'_w = \frac{4\pi S_t}{\lambda^2} \frac{P_t S_w}{4\pi r^2}$$

طاقت حاصل کر پائے گا۔ اس مساوات سے

$$(14.237) \quad \frac{P_w}{P_t} = \frac{S_t S_w}{\lambda^2 r^2}$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں کسی بھی دو اینٹینا کے نظام میں مساوات کا دایاں ہاتھ بے بعد مستقل ہے۔ یہ مساوات فرانس تروسیلی مساوات⁶⁵ کہلاتی ہے۔ آئیں اب شکل 14.33-الف پر غور کریں جہاں ترسیل کنندہ اینٹینا شعاع خارج



شکل 14.32: وصول کردہ طاقت کا انحصار ترسیلی اور وصولی اینٹینا کے اخراجی رقبوں پر ہے۔

کرتی ہے۔ انعکاسی شعاع کو وصول کنندہ اینٹینا وصول کرتی ہے۔ ریڈار میں عموماً ایک ہی اینٹینا دونوں کام سرانجام دیتی ہے۔ شعاع کا انعکاس ہوا میں اڑتے جہاز سے ممکن ہے۔ شکل 14.33-ب میں عاکس کو دو اینٹینا کی صورت میں دکھایا گیا ہے جہاں ایک اینٹینا شعاع وصول کرتے ہوئے دوسرے اینٹینا سے واپس خارج کرتا ہے۔ یوں مساوات 14.237 کو دو مرتبہ استعمال کرتے ہوئے

$$(14.238) \quad \frac{P_w}{P_t} = \frac{S_t S_w S_e^2}{\lambda^4 r^4}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اگر ایک ہی اینٹینا بطور ترسیلی اور وصولی اینٹینا استعمال کیا جائے تب

$$(14.239) \quad \frac{P_w}{P_t} = \frac{S_w^2 S_e^2}{\lambda^4 r^4}$$

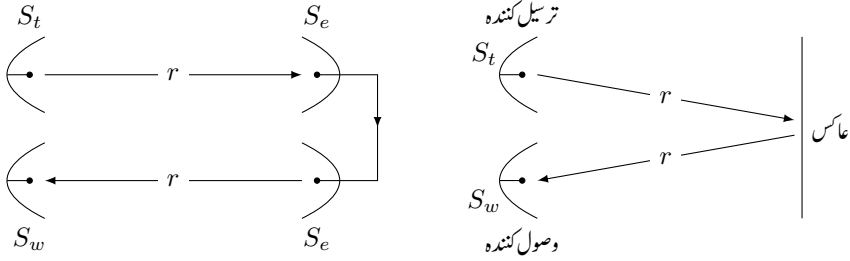
لکھا جاسکتا ہے جہاں عاکس کا اخراجی رقبہ S_e ہے۔

اگر عاکس وسیع جسامت کا ہو اور اس سے انعکاسی موج عین ریڈار کی سمت میں ہو تب عاکس کا اخراجی رقبہ اس کے میکانی رقبے جتنا ہو گا۔ عموماً عاکس غیر سمتی اخراج کرتا ہے جس کی وجہ سے اس کا اخراجی رقبہ، اس کے میکانی رقبے سے کم ہوتا ہے۔ ایسی صورت میں عاکس کے وصولی رقبے کو σ لکھتے ہوئے مساوات 14.237 سے عاکس کی حاصل کردہ طاقت

$$(14.240) \quad \frac{P}{P_t} = \frac{S_t \sigma}{\lambda^2 r^2}$$

لکھی جائے گی۔ یہی طاقت غیر سمتی خارج کی جائے گی۔ غیر سمتی اینٹینا کا اخراجی رقبہ $S = \frac{\lambda^2}{4\pi}$ ہوتا ہے۔ یہی عاکس کی اخراجی رقبہ لیتے ہوئے مساوات 14.239 میں $S_e^2 = S\sigma$ لکھتے ہوئے

$$(14.241) \quad \frac{P_w}{P_t} = \frac{S_w^2 S\sigma}{\lambda^4 r^4}$$



ب: عاکس کو اینٹینا فرض کیا گیا ہے۔

الف: عاکس سے انعکاسی موج کی وصولی۔

شکل 14.33: ریڈار اینٹینا شعاع خارج کر کے انعکاسی موج وصول کرتا ہے۔

یعنی

$$(14.242) \quad \frac{P_w}{P_t} = \frac{S_w^2 \sigma}{4\pi \lambda^2 r^4}$$

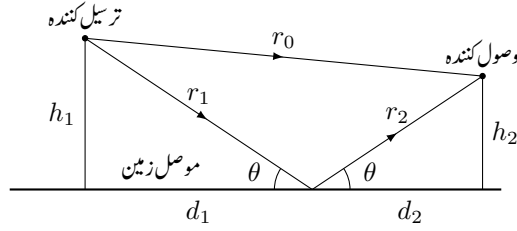
حاصل ہوتا ہے جہاں σ ریڈار رقبہ تراش⁶⁶ کہلاتا ہے۔ یہ ریڈار مساوات⁶⁷ کہلاتی ہے۔

بڑی جسامت کی موصل کرہ، جس کا رداس a ہو، کی ریڈار رقبہ تراش اس کے میکانی رقبہ تراش πa^2 کے برابر ہوتی ہے۔ غیر کامل عاکس کی صورت میں ریڈار رقبہ تراش نسبتاً کم ہو گا، مثلاً ایک میٹر طول موج پر چاند کا ریڈار رقبہ تراش تقریباً $\frac{1}{10}$ گنا حاصل ہوتا ہے۔

مثال 14.13: ایک ٹی وی اسٹیشن موصل زمین پر کھڑے 200 m قد کے اینٹینا سے 1 kW کی طاقت سے نشریات کرتی ہے۔ افقی سطح پر اینٹینا غیر سمتی ہے جبکہ عمودی سمت میں اس کی نصف طاقت چوڑائی 10° ہے۔ طول موج 1 m ہونے کی صورت میں 4 km دور کتنی اونچائی پر اینٹینا بہترین وصولی کر پائے گا۔ وصول کردہ طاقت کا بھی تخمینہ لگائیں۔ وصولی اینٹینا مندرجہ ذیل فرض کرتے ہوئے حل کریں۔

• عمودی قطبی اینٹینا جس کی سمتیت 4 کے برابر ہے۔

radar cross section⁶⁶
radar equation⁶⁷



شکل 14.34: سیدھی آمد موج اور انعکاسی موج کے اثرات۔

• افقی قطبی اینٹینا جس کی سمتیت 4 کے برابر ہے۔

• دائری قطبی 6 چکر کا بیچ دار اینٹینا جس کا $\alpha = 12.5^\circ$ اور چکر کے مابین فاصلہ 0.22λ ہے۔

حل: شکل میں صورت حال دکھائی گئی ہے۔ موصل زمین سے انعکاس پر زمین کے متوازی برقی میدان میں 180° کی تبدیلی رونما ہوگی۔ یوں اگر وصولی اینٹینا زمین کے بالکل قریب ہو تب افقی قطبی میدان کی صورت میں یہ صفر طاقت وصول کر پائے گا جبکہ عمودی قطبیت کی صورت میں اسے سیدھی رسائی کے علاوہ زمین سے انعکاسی میدان بھی میسر ہوگا۔ یوں کل میدان دگنا اور طاقت چار گنا ہوگا۔

شکل 14.34 کو دیکھتے ہوئے کہہ سکتے ہیں کہ کسی بھی h پر اگر

$$(14.243) \quad r_1 + r_2 - r_0 = n\lambda \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

ہو تب افقی قطبی میدان صفر پایا جائے گا جبکہ عمودی قطبی میدان دگنا ہوگا۔ اسی طرح جب بھی

$$(14.244) \quad r_1 + r_2 - r_0 = n\frac{\lambda}{2} \quad (n = 1, 3, 5, \dots)$$

ہو تب افقی قطبی میدان دگنا اور عمودی قطبی میدان صفر پایا جائے گا۔ ان حقائق سے ظاہر ہے کہ زیادہ سے زیادہ افقی قطبی میدان کے دو قریبی نقطوں کے درمیانی نقطے پر زیادہ سے زیادہ عمودی قطبی میدان پایا جاتا ہے۔

بایاں دائری قطبی موج انعکاس کے بعد دایاں دائری قطبی ہوتا ہے۔ اسی طرح دایاں دائری قطبی موج انعکاس کے بعد بایاں دائری قطبی ہوتا ہے۔ یوں اگر ترسیلی اینٹینا دایاں دائری قطبی ہو تب دایاں دائری قطبی اینٹینا صرف سیدھے آمدی میدان کو وصول کر پائے گا جبکہ بایاں دائری قطبی اینٹینا صرف انعکاسی میدان کو وصول کر پائے گا۔ یوں دونوں

اقسام کے دائری قطبی اینٹینا اکائی میدان حاصل کریں گے۔ ترسیلی اینٹینا بایاں قطبی ہونے کی صورت میں بایاں قطبی وصولی اینٹینا سیدھے آمد میدان کو وصول کرے گا جبکہ دایاں قطبی اینٹینا انعکاسی میدان کو وصول کرے گا۔

افقی اور عمودی قطبی اینٹینوں کی صورت میں وصولی اینٹینا کی اونچائی تبدیل کرنے سے میدان صفر تا دگنا حاصل کرنا ممکن ہے جبکہ دائری قطبی اینٹینا کی صورت میں وصول طاقت کا دار و مدار اینٹینا کی اونچائی پر نہیں ہوتا۔ دائری اینٹینا ہر صورت اکائی میدان حاصل کرتی ہے۔

چونکہ آمدی اور انعکاسی زاویے برابر ہوتے ہیں لہذا شکل میں آمدی ٹکون اور انعکاسی ٹکون یکساں ہیں۔ یوں $(r_1 + r_0)$ کی قیمت $\frac{2h_1h_2}{d}$ لکھی جاسکتی ہے۔ یوں عمودی قطب میدان کی زیادہ سے زیادہ قیمت

$$h_2 = \frac{d\lambda}{2h_1} = \frac{4 \times 10^3 \times 1}{2 \times 200} = 10 \text{ m}$$

کی صورت میں حاصل ہوگی جس سے افقی قطبی میدان کی زیادہ سے زیادہ قیمت کی اونچائی 5، 15، 25، ... میٹر لکھی جاسکتی ہے۔

فرانس کی مساوات سے، ایک راہ سے موصول طاقت

$$P_w = \frac{P_t A_t A_w}{r^2 \lambda^2} = \frac{10^3 \times 0.32 \times 0.91}{16 \times 10^6 \times 1} = 18 \mu\text{W}$$

حاصل ہوتی ہے جہاں ترسیلی اینٹینا کی سمتیت

$$D = \frac{4\pi}{\theta_{HP} \phi_{HP}} = \frac{4\pi}{\frac{360 \times \pi}{180} \times \frac{10 \times \pi}{180}} = 11.459$$

لیتے ہوئے اس کا اخراجی رقبہ

$$A_t = \frac{\lambda^2}{4\pi} D = 0.91 \text{ m}^2$$

اور وصولی اینٹینا کا وصولی رقبہ

$$A_w = \frac{\lambda^2}{4\pi} D = \frac{1^2 \times 4}{4\pi} = 0.32 \text{ m}^2$$

لئے گئے ہیں۔ سیدھی آمد اور انعکاسی آمد میدان مل کر زیادہ سے زیادہ طاقت 4 گنا کر دیتی ہیں۔ یوں افقی قطبی اور عمودی قطبی اینٹینا کی صورت میں زیادہ سے زیادہ وصول کردہ طاقت $72 \mu\text{W}$ ہو گا جبکہ دونوں صورتوں میں کم سے کم حاصل کردہ طاقت صفر ہو گا۔

دائری قطبی صورت میں وصولی اینٹینا کی سمتیت

$$D = 15 \left(\frac{C}{\lambda} \right)^2 \frac{nd}{\lambda} = 15 \left(\frac{0.22}{\tan 12.5^\circ} \right)^2 \times \frac{6 \times 0.22}{1} = 19.5$$

اور وصولی رقبہ

$$A_w = \frac{\lambda^2 D}{4\pi} = 1.55 \text{ m}^2$$

ہیں لہذا ہر اونچائی پر وصول کردہ طاقت

$$P_w = \frac{1.55}{0.32} \times 18 = 87 \mu\text{W}$$

ہو گا۔

وصول کردہ طاقت کا تخمینہ لگاتے ہوئے ہم نے اینٹینوں کے درمیان فاصلے کو چار کلو میٹر ہی تصور کیا اگرچہ حقیقی فاصلے قدر مختلف ہیں۔ چار کلو میٹر کے فاصلے پر چند میٹر کم یا زیادہ سے حاصل جواب میں کوئی خاص تبدیلی پیدا نہیں ہوتی۔

14.20 ریڈیائی دور بین، اینٹینا کی حرارت اور تخلیلی کار کردگی

کسی بھی برقی مزاحمت R میں حرارت T کی وجہ سے آزاد پار حرکت کرتے ہیں جس سے مزاحمت میں حراری شور⁶⁸ پیدا ہوتا ہے۔ ایسی مزاحمت کے برقی سروں پر B تعددی پٹی پر

(14.245)

$$W = kBT$$

طاقت شور⁶⁹ پایا جاتا ہے۔ اکائی تعددی پٹی پر یوں

$$(14.246) \quad w = kT$$

طاقت شور پایا جائے گا جہاں

$$w \text{ اکائی تعددی پٹی پر شور کی طاقت، } \frac{W}{Hz}$$

$$k \text{ بولٹزمن کا مستقل، } 1.38 \times 10^{-23} \frac{J}{K}$$

$$B \text{ تعددی پٹی، Hz}$$

$$T \text{ مزاحمت کی حتمی حرارت، K}$$

ہیں۔ T کو حرارت شور⁷⁰ کہا جاتا ہے۔ برابر تعددی پٹی پر برابر طاقت شور پایا جاتا ہے۔

اگر برقی مزاحمت R کے برابر اخراجی مزاحمت ($R_{\text{اخراجی}} = R$) کے اینٹینا کے برقی سروں پر طاقت شور ناپی جائے تو یہ مزاحمت پر ناپی گئی طاقت شور سے مختلف ہوگی۔ اینٹینا کے سروں پر طاقت شور، خلاء کے اس خطے کی حرارت T سے پیدا شور ہو گا جہاں سے اینٹینا طاقت وصول کر رہا ہو۔ اس طاقت شور کا اینٹینا کی حرارت سے کوئی تعلق نہیں۔ یوں اینٹینا کو بطور بعید پیما حرارت⁷¹ استعمال کیا جا سکتا ہے۔

ایک سنٹی میٹر طول موج کے ریڈیائی دور بین کی مرکز نگاہ آسمان کے ایسے خطوں پر رکھی جا سکتی ہے جہاں حتمی حرارت $0 K$ کے قریب قریب ہوتی ہے۔ ایسی صورت میں طاقت شور آسمان کی حرارت سے پیدا ہو گا تاکہ اینٹینا کے حرارت سے $300 K$ کے لگ بھگ ہوگی۔ ریڈیائی دور بین کی طاقت شور فی تعدد

$$(14.247) \quad w = kT_A \left(\frac{W}{Hz} \right)$$

لکھی جاتی ہے جہاں T_A اینٹینا کی حراری شور ہے جسے عموماً حرارت اینٹینا⁷² یا اخراجی مزاحمت کی حرارت کہا جاتا ہے۔ حرارت اینٹینا وہ خطہ کرتی ہے جس پر اینٹینا کے نقش کی نظر ہو۔ یوں اینٹینا کی مدد سے دور آسمان کے خطوں

noise power⁶⁹
noise temperature⁷⁰
remote temperature sensor⁷¹
antenna temperature⁷²

کی حرارت ناپنا ممکن ہے۔ ہم نے اس پورے بحث میں یہ فرض کر رکھا ہے کہ اینٹینا بے ضیاع ہے اور یہ آسمان کی طرف نظر رکھے ہوئے ہے۔ یوں انعکاسی شعاع اور ثانوی شعاع کو رد کیا گیا ہے۔

ریڈیائی دور بین کو استعمال کرتے ہوئے کثافت طاقت شور فی تعدد

$$(14.248) \quad p = \frac{w}{S_e} = \frac{kT_A}{S_e} \quad \left(\frac{W}{m^2 \text{ Hz}} \right)$$

کا استعمال زیادہ سود مند ثابت ہوتا ہے جسے پوائنٹنگ سمتیہ فی تعدد تصور کیا جا سکتا ہے۔

اگر ہمیں منبع شور کی زاویائی وسعت Ω_M معلوم ہو اور یہ Ω_A کی نسبت سے کم ہو تب منبع کی حرارت

$$(14.249) \quad \frac{T_A}{T_M} = \frac{\Omega_M}{\Omega_A}$$

سے حاصل کی جا سکتی ہے۔ یاد رہے کہ T_A کا اینٹینا کی حرارت سے کوئی تعلق نہیں۔

مثال 14.14: مرخ⁷³ پر مرکز نگاہ رکھتے ہوئے 15 m لمبی ریڈیائی دور بین کی اینٹینا حرارت 31.5 mm طول موج پر 0.24 K ناپی جاتی ہے۔ اینٹینا پر مرخ⁷³ 0.005° زاویہ بناتا ہے اور اینٹینا کا نصف طاقت زاویہ 0.116° ہے۔ مرخ⁷³ کی حرارت دریافت کریں۔

حل: مساوات 14.249 سے مرخ⁷³ کی حرارت

$$T_M = \frac{\Omega_A}{\Omega_M} T_A \approx \frac{0.116^2}{\pi(0.005^2/4)} 0.24 = 164 \text{ K}$$

حاصل ہوتی ہے۔

14.21 حرارت نظام اور حرارت بعید

حرارت اینٹینا سے اس خطے کی حرارت حاصل کی جاسکتی ہے جس پر اینٹینا کا مرکز نگاہ ہو۔ یوں اینٹینا کو بعید پیمہ حرارت استعمال کیا جاسکتا ہے۔ ایک سنٹی میٹر طول موج کے ریڈیائی دور بین کی نگاہ، ستاروں سے خالی آسمان کے خطے پر رکھتے ہوئے انتہائی کم اینٹینا حرارت حاصل کی جاسکتی ہے۔ آسمان کو دیکھتے ہوئے کم تر حرارت 3K حاصل ہوتی جو کائنات کی ابتدائی دھماکے⁷⁴ کی بقیہ حرارت⁷⁵ ہے۔ اگر اینٹینا کے سامنے ستارہ موجود ہو تب بقیہ حرارت سے زیادہ حرارت ناپی جائے گی۔ ایک میٹر طول موج پر ہماری کہکشاں کی حرارت کئی ہزار کیلون ناپی جاتی ہے۔ ہم حراری⁷⁶ شور کی حرارت ناپنے کی بات کر رہے ہیں۔ یہ کامل اخراجی-وصولی خاصیت کے جسم کی حرارت ہے۔ ایسے جسم کو سیاہ جسم⁷⁷ کہا جاتا ہے۔ یوں اگر اینٹینا کی پوری وصولی نقش کے خطے میں گرم کونکے یا سیاہ دھات کا کرہ پایا جائے، تو اینٹینا سے کرہ کی ناپی گئی حرارت وہی ہوگی جو تھرمامیٹر⁷⁸ سے ناپی جائے گی۔ اس کے برعکس تریسلی اینٹینا کی ناپی گئی اینٹینا حرارت غیر یقینی طور پر زیادہ حاصل ہوتی ہے۔

مثال کے طور پر اگر قریب ریڈیو اسٹیشن کی نشریات، 10 m^2 وصولی رقبے اور 10 kHz تعددی پٹی کے وصولی اینٹینا کے قریب $10 \frac{\mu\text{V}}{\text{m}}$ کا میدان پیدا کرے تو وصولی اینٹینا کی کل وصول کردہ طاقت

$$W = \frac{E^2}{Z_0} S_e = \frac{10^{-10}}{377} \times 10 = 2.65 \text{ pW}$$

ہوگی جسے مساوات 14.245 میں پر کرتے ہوئے

$$T = \frac{W}{k_B} = \frac{2.65 \times 10^{-12}}{1.38 \times 10^{-23} \times 10^4} = 1.9 \times 10^7 \text{ K}$$

حاصل ہوتی ہے۔ اس مثال میں آپ نے دیکھا کہ صرف $10 \frac{\mu\text{V}}{\text{m}}$ کا میدان $1.9 \times 10^7 \text{ K}$ کی اینٹینا حرارت پیدا کر سکتا ہے۔ یہ اتنی بڑی مقدار ہے کہ اس کی موجودگی میں بقایا نظام کی حرارت، جسے حرارت نظام⁷⁹ پکارا جاتا ہے، کو نظر انداز کیا جاسکتا ہے۔ البتہ، ریڈیائی دور بین اتنی کم طاقت کے اشارات پر کام کرتے ہیں کہ ان میں حرارت نظام انتہائی اہم ہوتا ہے۔ اس کا اندازہ آپ یوں کر سکتے ہیں کہ ریڈیائی دور بین کے استعمال میں کشاف طاقت فی ہرٹز کی اکائی جانسکی⁸⁰ ہے جہاں $1 \text{ Ja} = 10^{-26} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{ Hz}}$ کے برابر ہے۔

big bang⁷⁴
residual temperature⁷⁵
thermal⁷⁶
blackbody⁷⁷
thermometer⁷⁸
system temperature⁷⁹
Jansky⁸⁰

سوالات

سوال 14.1: غیر سمتی اینٹینا $E = \frac{25I}{r}$ میدان پیدا کرتی ہے جہاں اینٹینا کا داخلی موثر برقی رو I اور اینٹینا سے فاصلہ r ہے۔ اس اینٹینا کی اخراجی مزاحمت حاصل کریں۔

جواب: 20.8Ω

سوال 14.2: اینٹینا کی شعاع $0 < \theta < 30^\circ$ ، $0 < \phi < 2\pi$ خطے میں یکساں میدان پیدا کرتی ہے جبکہ $30^\circ < \theta < 180^\circ$ خطے میں میدان صفر کے برابر ہے۔ الف) اینٹینا کا اخراجی ٹھوس زاویہ Ω_A حاصل کریں۔ ب) شعاع کی سمتیت D دریافت کریں۔

جوابات: 0.842 sr ، 14.9

سوال 14.3: اینٹینا کی شعاع $0 < \theta < 60^\circ$ ، $0 < \phi < 2\pi$ خطے میں یکساں میدان پیدا کرتی ہے جبکہ $60^\circ < \theta < 180^\circ$ خطے میں میدان صفر کے برابر ہے۔ الف) اینٹینا کا اخراجی ٹھوس زاویہ Ω_A حاصل کریں۔ ب) شعاع کی سمتیت D دریافت کریں۔ پ) اینٹینا کا اخراجی رقبہ A_e حاصل کریں۔ ت) اینٹینا کا داخلی موثر برقی رو 12 A ہونے کی صورت میں اینٹینا سے 164 m کے فاصلے پر موثر برقی میدان $7 \frac{\text{V}}{\text{m}}$ ہے۔ اینٹینا کا اخراجی مزاحمت $R_{\text{اخراجی}}$ دریافت کریں۔

جوابات: 3.142 sr ، 4 ، $0.318 \lambda^2$ ، 76.3Ω

سوال 14.4: اینٹینا کی شعاع $45^\circ < \theta < 60^\circ$ ، $0^\circ < \phi < 120^\circ$ خطے میں یکساں ہے۔ بقایا خطے میں میدان صفر کے برابر ہے۔ اینٹینا سے 1000 m کے فاصلے پر اس خطے میں $2 \frac{\text{V}}{\text{m}}$ برقی میدان حاصل کرنے کی خاطر 4 A موثر داخلی برقی رو درکار ہے۔ اینٹینا کی اخراجی مزاحمت $R_{\text{اخراجی}}$ دریافت کریں۔

جواب: 288Ω

سوال 14.5: اینٹینا کی مرکزی شعاع $0^\circ < \theta < 45^\circ$ خطے میں یکساں پائی جاتی ہے جبکہ اس کی ثانوی شعاع $120^\circ < \theta < 180^\circ$ خطے میں یکساں پائی جاتی ہے۔ میدان ϕ کے ساتھ تبدیل نہیں ہوتا۔ مرکزی شعاع میں میدان ثانوی شعاع کے میدان کے چار گنا ہے۔ الف) اینٹینا کی سمتیت D دریافت کریں۔ ب) مرکزی شعاع میں اینٹینا سے 350 m فاصلے پر $6 \frac{\text{V}}{\text{m}} = E$ موثر برقی میدان کے حصول کے لئے اینٹینا کو 6 A موثر داخلی برقی رو مہیا کیا جاتی ہے۔ اینٹینا کی اخراجی مزاحمت $R_{\text{اخراجی}}$ دریافت کریں۔

جوابت: $D = 6.17$ ، 662Ω

سوال 14.6: دو عدد غیر سمتی، ہم قدم منبع کے درمیان فاصلہ 2λ ہے۔ الف) نقش کے صفر حاصل کریں۔ ب) نقش کی چوٹیاں حاصل کریں۔

جوابت: الف) 0° ، $\pm 60^\circ$ ، $\pm 90^\circ$ ، $\pm 104.5^\circ$ ، $\pm 138.6^\circ$ ؛ ب) 180° ، $\pm 120^\circ$

سوال 14.7: دو عدد غیر سمتی، منبع کے درمیان فاصلہ $\frac{3\lambda}{2}$ ہے جبکہ ان میں زاویائی فرق 180° ہے۔ الف) نقش کے صفر حاصل کریں۔ ب) نقش کی چوٹیاں حاصل کریں۔

جوابت: الف) 0° ، $\pm 48.2^\circ$ ، $\pm 90^\circ$ ، $\pm 131.8^\circ$ ؛ ب) 0° ، $\pm 70.5^\circ$ ، $\pm 109.5^\circ$

سوال 14.8: چار رکنی قطار میں غیر سمتی، یکساں طاقت کے منبع پائے جاتے ہیں۔ قطار میں ہر دو قریبی منبع میں δ زاویائی فرق پایا جاتا ہے۔ منبع کے درمیان فاصلہ نصف طول موج سے کم $d < \frac{\lambda}{2}$ ہے۔ زیادہ سے زیادہ میدان $\theta = 45^\circ$ پر اور نقش کا صفر $\theta = 90^\circ$ پر حاصل کرنے کے لئے درکار δ اور d حاصل کریں۔

جوابت: $d = 0.354\lambda$ ، $\delta = -90^\circ$

سوال 14.9: گھریلو ریڈیو سے 585 kHz تعدد کی نشریات سنی جا رہی ہے۔ الف) ریڈیو اینٹینا کو غیر سمتی تصور کرتے ہوئے اس کا اخراجی رقبہ دریافت کریں۔ ب) گھر سے ریڈیو اسٹیشن کا فاصلہ 10 km جبکہ اسٹیشن کی اخراجی طاقت 5 kW کی صورت میں ریڈیو کتنی طاقت وصول کر پاتا ہے۔ اسٹیشن کی اخراج غیر سمتی تصور کریں۔ پ) ریڈیو کی داخلی مزاحمت 300Ω ہے۔ ریڈیو کو صرف $1 \mu\text{V}$ موثر داخلی اشارہ درکار ہے۔ درکار داخلی طاقت کی قیمت حاصل کریں۔

جوابت: 3.33 fW ، 83.3 mW ، 20928 m^2

سوال 14.10: 1.5λ لمبے خطی اینٹینا کا اخراجی مزاحمت حاصل کریں۔ ایسا کرنے کی خاطر آپ کو صفحہ 804 پر دیے جدول 14.2 کے طرز کا جدول حاصل کرنا ہو گا۔

جواب: 100Ω

سوال 14.11: یکساں غیر سمتی منبع پر مبنی قطار میں ارکان کے درمیان $d = \frac{\lambda}{4}$ ہے۔ مرکزی شعاع $\theta = 30^\circ$ پر حاصل کرنے کی خاطر ارکان کے مابین زاویائی فرق δ حاصل کریں۔

جواب: 1.36 rad

سوال 14.12: تداخل پیمیا میں جفت قطب کے مابین فاصلہ 10λ ہونے کی صورت میں پہلے صفر چوڑائی حاصل کریں۔

جواب: 5.7°

سوال 14.13: خلاء میں دو مصنوعی سیاروں کے درمیان 2×10^8 m کا فاصلہ ہے۔ یہ آپس میں 2.5 GHz تعدد پر اشارات کا تبادلہ کرتے ہیں۔ دونوں سیارے $D = 1500$ سمیتیت کے اینٹینا استعمال کرتے ہیں۔ اطلاعات صحیح موصول ہونے کے لئے ضروری ہے کہ حاصل کردہ اشارے کی طاقت برقی شور سے قدر زیادہ ہو۔ یوں ضروری ہے کہ حاصل کردہ برقی اشارے کی طاقت کم از کم 1 pW ہو۔ اخراجی اینٹینا کی درکار طاقت حاصل کریں۔

جواب: 195 W

ضمیمہ: طبعی مستقل

موصلیت: σ

$\sigma, \frac{S}{m}$	چیز	$\sigma, \frac{S}{m}$	چیز
7×10^4	گریفائٹ	6.17×10^7	چاندی
1200	سیلیکان	5.80×10^7	تانبہ
100	فیرائٹ (عمومی قیمت)	4.10×10^7	سونا
5	سمندری پانی	3.82×10^7	المونیم
10^{-2}	چھوٹا پتھر	1.82×10^7	ڈنگسٹن
5×10^{-3}	چکنی مٹی	1.67×10^7	جست
10^{-3}	تازہ پانی	1.50×10^7	پیتل
10^{-4}	مقطر پانی	1.45×10^7	نکل
10^{-5}	ریتیلی مٹی	1.03×10^7	لوہا
10^{-8}	سنگ مرمر	0.70×10^7	قلعی
10^{-9}	بیک لائٹ	0.60×10^7	کاربن سٹیل
10^{-10}	چینی مٹی	0.227×10^7	سٹینلین
2×10^{-13}	ہیرا	0.22×10^7	جر مینیم
10^{-16}	پولیسٹرین پلاسٹک	0.11×10^7	سٹینلس سٹیل
10^{-17}	کوارٹز (سنگ مردہ)	0.10×10^7	نائیکروم

جزوی برقی مستقل اور مماس ضیاع: $\sigma / \omega \epsilon$ and ϵ_R

$\sigma / \omega \epsilon$	ϵ_R	چیز
	1	خالی خلاء
	1.0006	ہوا
0.0006	8.8	المونیم آکسائیڈ
0.002	2.7	عنبر
0.022	4.74	بیک لائٹ
	1.001	کاربن ڈائی آکسائیڈ
	16	جرمنیم
0.001	7.4	شیشہ
0.1	4.2	برف
0.0006	5.4	ایرق
0.02	3.5	نانکون
0.008	3	کاغذ
0.04	3.45	پلیکسی گلاس
0.0002	2.26	پلاسٹک (تھیلا بنانے والا)
0.00005	2.55	پولیسٹرین
0.014	6	چینی مٹی
0.0006	4	پائریکس شیشہ (برتن بنانے والا)
0.00075	3.8	کوارٹز (سنگ مردہ)
0.002	3.25	ربر
0.00075	3.8	سیلیکا SiO_2
	11.8	سیلیکان
0.5	3.3	قدرتی برف
0.0001	5.9	کھانے کا نمک
0.07	2.8	خشک مٹی
0.0001	1.03	سٹارٹوفوم
0.0003	2.1	ٹیفیلان
0.0015	100	ٹائٹینیم ڈائی آکسائیڈ
0.04	80	مقطر پانی
4		سمندری پانی
0.01	4.15	خشک لکڑی

جزوی مقناطیسی مستقل: μ_R

μ_R	چیز
0.999 998 6	بہت
0.999 999 42	پیرا فین
0.999 999 5	لکڑی
0.999 999 81	چاندی
1.000 000 65	المونیم
1.000 000 79	بیریلیم
50	نکل
60	ڈھلواں لوہا
300	مشین سٹیل
1000	فیرائٹ (عمومی قیمت)
2500	پریم بھرت (permalloy)
3000	ٹرانسفارمر پتڑی
3500	سیلکان لوہا
4000	خالص لوہا
20 000	میومٹیل (mumetal)
30 000	سڈسٹ (sendust)
100 000	سوپریم بھرت (supermalloy)

جدول 14.3: اہم طبعی مستقل

قیمت	علامت	چیز
$(1.602 189 2 \pm 0.000 004 6) \times 10^{-19} \text{ C}$	e	ایلیکٹران ہار
$(9.109 534 \pm 0.000 047) \times 10^{-31} \text{ kg}$	m	ایلیکٹران کمیت
$(8.854 187 818 \pm 0.000 000 071) \times 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}}$	ϵ_0	برقی مستقل (خالی خلاء)
$4\pi 10^{-7} \frac{\text{H}}{\text{m}}$	μ_0	مقناطیسی مستقل (خالی خلاء)
$(2.997 924 574 \pm 0.000 000 011) \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$	c	روشنی کی رفتار (خالی خلاء)

ضمیمہ: ڈھلوان، پھیلاؤ، گردش اور لاپلاسی

کار تیبسی محدود

$$\begin{aligned}\nabla f &= \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{a}_z \\ \nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\ \nabla \times \mathbf{A} &= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathbf{a}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \mathbf{a}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathbf{a}_z \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \\ \nabla^2 f &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\end{aligned}$$

تکلی محدود

$$\begin{aligned}\nabla f &= \frac{\partial f}{\partial \rho} \mathbf{a}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \phi} \mathbf{a}_\phi + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{a}_z \\ \nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\ \nabla \times \mathbf{A} &= \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right) \mathbf{a}_\rho + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) \mathbf{a}_\phi + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial(\rho A_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \right) \mathbf{a}_z \\ &= \begin{vmatrix} \frac{1}{\rho} \mathbf{a}_\rho & \mathbf{a}_\phi & \frac{1}{\rho} \mathbf{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & \rho A_\phi & A_z \end{vmatrix} \\ \nabla^2 f &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\end{aligned}$$

کروی محدود

$$\begin{aligned}\nabla f &= \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{a}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \mathbf{a}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \mathbf{a}_\phi \\ \nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \\ \nabla \times \mathbf{A} &= \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial(\sin \theta A_\phi)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right] \mathbf{a}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(r A_\phi)}{\partial r} \right) \mathbf{a}_\theta \\ &\quad + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \mathbf{a}_\phi \\ \nabla^2 f &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla f &= \frac{1}{k_1} \frac{\partial f}{\partial u} \mathbf{a}_u + \frac{1}{k_2} \frac{\partial f}{\partial v} \mathbf{a}_v + \frac{1}{k_3} \frac{\partial f}{\partial w} \mathbf{a}_w \\ \nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{1}{k_1 k_2 k_3} \left(\frac{\partial(k_2 k_3 A_u)}{\partial u} + \frac{\partial(k_3 k_1 A_v)}{\partial v} + \frac{\partial(k_1 k_2 A_w)}{\partial w} \right) \\ \nabla \times \mathbf{A} &= \frac{1}{k_2 k_3} \left[\frac{\partial(k_3 A_w)}{\partial v} - \frac{\partial(k_2 A_v)}{\partial w} \right] \mathbf{a}_u + \frac{1}{k_3 k_1} \left[\frac{\partial(k_1 A_u)}{\partial w} - \frac{\partial(k_3 A_w)}{\partial u} \right] \mathbf{a}_v \\ &\quad + \frac{1}{k_1 k_2} \left[\frac{\partial(k_2 A_v)}{\partial u} - \frac{\partial(k_1 A_u)}{\partial v} \right] \mathbf{a}_w \\ \nabla^2 f &= \frac{1}{k_1 k_2 k_3} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{k_2 k_3}{k_1} \frac{\partial f}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{k_3 k_1}{k_2} \frac{\partial f}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{k_1 k_2}{k_3} \frac{\partial f}{\partial w} \right) \right]\end{aligned}$$

سطحی اور حجمی تکمیل کے تعلق

مندرجہ ذیل تین مساوات میں دائیں جانب حجمی تکمیل کے حجم کو بائیں جانب سطحی تکمیل کی سطح گھیرتی ہے۔

$$\begin{aligned}\oint_S f \, dS &= \int_h \nabla f \, dh \\ \oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \int_h \nabla \cdot \mathbf{F} \, dh \quad \text{مسئلہ پھیلاؤ} \\ \oint_S \mathbf{a}_N \times \mathbf{F} \, dS &= \int_h \nabla \times \mathbf{F} \, dh\end{aligned}$$

خطی اور سطحی تکمیل کے تعلق

مندرجہ ذیل دو مساوات میں دائیں جانب سطحی تکمیل کی سطح کو بائیں جانب خطی تکمیل کی بند راہ گھیرتی ہے۔

$$\begin{aligned}\oint_l f \, dl &= \int_S \mathbf{a}_N \times \nabla f \, dS \\ \oint_l \mathbf{F} \cdot dl &= \int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} \quad \text{مسئلہ سٹوکس}\end{aligned}$$

خطی الجبرائی مماثل

$$\begin{aligned}\mathbf{F} \cdot \mathbf{G} &= FG \cos \theta \\ &= F_x G_x + F_y G_y + F_z G_z \\ \theta &= \cos^{-1} \left(\frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}}{FG} \right)\end{aligned}$$

غیر سمتی (نقطہ) ضرب

$$\mathbf{F} \times \mathbf{G} = FG \sin \theta \mathbf{a}_N$$

سمتی (صلیبی) ضرب

$$\begin{aligned}&= \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \\ \theta &= \sin^{-1} \left[\frac{(\mathbf{F} \times \mathbf{G}) \cdot \mathbf{a}_N}{FG} \right]\end{aligned}$$

مماثل

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) &= 0 \\ \nabla \cdot \nabla f &= \nabla^2 f \\ \nabla \times \nabla f &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla(f + g) &= \nabla f + \nabla g \\ \nabla \cdot (\mathbf{F} + \mathbf{G}) &= \nabla \cdot \mathbf{F} + \nabla \cdot \mathbf{G} \\ \nabla \times (\mathbf{F} + \mathbf{G}) &= \nabla \times \mathbf{F} + \nabla \times \mathbf{G}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla(fg) &= f\nabla g + g\nabla f \\ \nabla \cdot (f\mathbf{G}) &= f(\nabla \cdot \mathbf{G}) + \mathbf{G} \cdot (\nabla f) \\ \nabla \times (f\mathbf{G}) &= f(\nabla \times \mathbf{G}) + (\nabla f) \times \mathbf{G}\end{aligned}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2 \mathbf{F}$$

جہاں $\nabla^2 \mathbf{F}$ سے مراد

$$\nabla^2 \mathbf{F} = \nabla^2 F_x \mathbf{a}_x + \nabla^2 F_y \mathbf{a}_y + \nabla^2 F_z \mathbf{a}_z$$

←

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) &= \mathbf{G} \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) - \mathbf{F} \cdot (\nabla \times \mathbf{G}) \\ \mathbf{F} \cdot (\mathbf{G} \times \mathbf{H}) &= \mathbf{G} \cdot (\mathbf{H} \times \mathbf{F}) = \mathbf{H} \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) \\ \nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) &= \mathbf{F}(\nabla \cdot \mathbf{G}) - \mathbf{G}(\nabla \cdot \mathbf{F}) + (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} - (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G} \\ \nabla(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}) &= (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G} + (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} + \mathbf{F} \times (\nabla \times \mathbf{G}) + \mathbf{G} \times (\nabla \times \mathbf{F})\end{aligned}$$

محد کے باہمی تعلق

$$x = \rho \cos \phi$$

$$y = \rho \sin \phi$$

$$z = z$$

نکلی سے کار تیبسی

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (\rho \geq 0)$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

$$z = z$$

کار تیبسی سے نکلی

$$x = r \sin \theta \cos \phi$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi$$

$$z = r \cos \theta$$

کر دی سے کار تیبسی

نکلی اکائی سمتیات کا کار تیبسی اکائی سمتیات کے ساتھ غیر سمتی ضرب۔

a_z	a_y	a_x	
0	$\sin \phi$	$\cos \phi$	a_ρ
0	$\cos \phi$	$-\sin \phi$	a_ϕ
1	0	0	a_z

کروی اکائی سمتیہ کا کارٹیزیائی سمتیہ کے ساتھ غیر سمتی ضرب۔

\mathbf{a}_z	\mathbf{a}_y	\mathbf{a}_x	
$\cos \theta$	$\sin \theta \sin \phi$	$\sin \theta \cos \phi$	\mathbf{a}_r
$-\sin \theta$	$\cos \theta \sin \phi$	$\cos \theta \cos \phi$	\mathbf{a}_θ
0	$\cos \phi$	$-\sin \phi$	\mathbf{a}_ϕ

کروی اکائی سمتیہ کا کروی سمتیہ کے ساتھ غیر سمتی ضرب۔

\mathbf{a}_z	\mathbf{a}_ϕ	\mathbf{a}_ρ	
$\cos \theta$	0	$\sin \theta$	\mathbf{a}_r
$-\sin \theta$	0	$\cos \theta$	\mathbf{a}_θ
0	1	0	\mathbf{a}_ϕ

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$\theta = \cos^{-1} \frac{z}{r}$$

$$= \cos^{-1} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

کارٹیزیائی سے کروی

- astronomy, 785
 attenuation constant, 446
 axial ratio, 516
 axon, 712

 band pass filter, 504
 beam width between first nulls, 779
 Bessel functions, 544
 Bessel's equation, 685
 big bang, 827
 binomial series, 773
 binomial theorem, 461
 Biot-Savart law, 277
 blackbody, 827
 Booker's theory, 816
 bound charge, 199
 boundary conditions
 electric and magnetic, 420
 electric field, 205, 210
 magnetic field, 374
 Brewster angle, 620
 broadside array, 779
 BWFN, 779

 camera, 511
 capacitance, 212
 capacitor, 77, 175, 212
 mica, 214
 carrier frequency, 633
 Cartesian coordinates, 1
 cavity resonator, 715
 charge, 35, 58

 acceptor, 197
 active region, 446
 aligned, 369
 Ampere's circuital law, 284
 ampere-turns, 378
 amplitude modulation, 633
 angle
 Brewster, 620
 complementary, 778
 incidence, 605
 polarizing, 621
 reflection, 605
 refraction, 606
 steradian, 759
 angular dispersion, 631
 angular frequency, 441
 anisotropic, 202, 373
 antenna, 330, 504, 535
 aperture, 766
 end-fire, 712
 gain, 764
 receiving, 765
 reciprocity, 813
 temperature, 825
 transmitting, 765
 antireflective coating, 509
 aperture, 766
 area
 cross sectional, 254
 array
 pattern, 772
 associative law, 3

- coordinates, 24
- de Moivre, 747
- decibel, dB, 460
- dendrite, 714
- dense medium, 612
- density
 - current, 176
 - electric flux, 98
 - line charge, 67
 - surface charge, 74
- deposit, 214
- determinant, 298
- dielectric, 199
- diffraction, 440
- diffusion, 252
- digital, 579
- digital signal, 635
- dimensionless, 446
- diode, 252
- dipole, 35, 156
 - short, 742
- dipole moment, 158
- directional coupler, 577
- directivity, 762
- discontinuous, 206, 208, 374
- dispersion, 579, 635
 - angular, 631
 - chromatic, 631
- dispersion parameter, 638
- displacement current density, 411
- displacement vector, 19
- divergence, 113
- divergence theorem, 122
- domain, 369
- donor, 196
- doping, 196
- dot product, 14
- doughnut, 750
- drift velocity, 181
- easy axis, 202
- charges
 - uncovered, 354
- chirp, 638
- circular polarization, 810
- closed surface, 401
- coaxial, 286
 - inductance, 383, 388
- coaxial cable, 106
- cobolt, 369
- coefficient, 258
- commutative law, 3
- complementary antenna, 816
- complex
 - frequency, 442
- complex conjugate, 468
- conductivity, 182
- cone, 40
- cones, 712
- conservative field, 130, 147
- continuity equation, 179
- continuous, 206, 374
- continuous aperture, 787
- coordinates, 4
 - generalized, 118
- coplanar, 4
- copper, 182
- critical angle, 614
- cross product, 21
- curl, 292, 297
- current
 - bound, 368
 - convection, density, 178
 - conventional, 580
 - density, conduction, 182
 - displacement, 411
- cutoff
 - frequency, 671
 - wavelength, 671
- cutoff frequency, 669
- cutoff wavelength, 647
- cylindrical

- frequency, 439
 - angular, 439
 - complex, 442
 - low cutoff, 644
- frequency band, 634
- Friis transmission equation, 819
- fringing, 214, 274
- function
 - complex, 442
 - dependent, 441
- gain, 764
- gain coefficient, 446
- Gauss's law, 99
- Gaussian signal, 635
- gaussian surface, 100
- gradient, 150
- gravitational constant, 57
- gravity, 62
- ground, 139
- group, 196
- group delay, 639
- group velocity, 579, 651
- half power beam width, 779
- half-wave matching, 504
- half-width, 635
- Hall
 - effect, 354
 - effect current meter, 355
 - magnetic flux meter, 355
 - voltage, 354
- head to tail rule, 2
- heater, 228
- helical-beam antenna, 810
- Helmholtz
 - vector equation, 444
- Henry, 382
- Hertz, 441
- hole, 197
- holes
 - free, 252, 354
- effective
 - aperture, 767
- efficiency, 758
- electric
 - susceptibility, 203
- electric constant, 58
 - relative, 203
 - vacuum, 203
- electric field
 - boundary conditions, 205, 420
- electric field intensity, 64
- electric flux, 97
- electromagnetic, 439
- electromotive force, 400
- electrons
 - free, 252
- electrostatic, 188
- ellipse, 516
- elliptic
 - polarization, 513
- emf, 400
- envelope, 633
- equipotential surface, 141
- Euler's identity, 441, 536
- evanescent wave, 617, 795
- Fabry-Perot
 - free spectral range, 507
- Fabry-Perot interferometer, 506
- Farad, 212
- Faraday shield, 89
- Faraday's law, 399
- ferroelectric, 203
- ferromagnetic, 369
- flux linkage, 382
- force
 - moment of, 360
- Fourier series, 265
- Fourier transform
 - pair, 791
- free spectral range, 507

- Snell's, 612
- LED, 711
- left circular polarization, 514
- lens, 511, 712
- Lenz's law, 400
- light, 439
- light medium, 612
- linear, 62, 241, 372
 - polarization, 512
- linear polarization, 512
- lobe, 762
 - minor, 762
- longitude, 40
- loop antenna, 809
- Lorentz force equation, 352
- loss less, 446
- loss tangent, 461
- lossy, 446
- magnetic
 - constant, 373
 - relative constant, 373
 - susceptibility, 372
- magnetic constant, 321
- magnetic field
 - boundary conditions, 374, 420
- magnetic flux, 321
- magnetization, 370
- main lobe, 762
- Mars, 826
- matched, 499, 503, 505
- Maxwell
 - first equation, 403
- Maxwell equation, 113, 299
- Maxwell's equation
 - point form, 417
- medium
 - dense, 612
 - light, 612
- micro wave oven, 529
- microwave, 477
- homogeneous, 235
- horn antenna, 817
- HPBW, 779
- Huygen's principle, 628, 787
- hysteresis, 369
- image, 193
- imaginary, 442
 - number, 441
- impedance
 - transverse electric wave, 658
 - transverse magnetic wave, 675
 - wave, 502
- impedance transformation, 510
- incident wave, 483
- indeterminate, 776
- inductance
 - mutual, 390
- inductor, 382
- infrared, 708
- input intrinsic impedance, 541
- integral
 - elliptic, 327
- intensity
 - radiation, 761
- interferometer, 785
- intrinsic impedance, 450, 540
- intrinsic input impedance, 498
- isotropic, 203, 372, 762
- Jansky, 827
- kinetic energy, 163
- L Hospital's rule, 776
- Laplace equation, 236
- Laplacian
 - vector, 302
- Laplacian operator, 236
- laser, 446, 711
- latitude, 40
- law

- array, 772
 - multiplication, 772
 - primary, 772
- periodic table, 196
- permeability, 58, 321, 373
- permittivity, 58
 - relative, 203
- phase
 - velocity, 672
- phase angle, 441
- phase constant, 446
- phase velocity, 539, 579, 650
- phasor, 441
- photon, 712
- pivot, 360
- plane wave, 445
- point charge, 58
- Poisson equation, 235
- polar, 198
- polarization, 199
 - elliptic, 513
 - linear, 512
 - right circular, 514
- polarized
 - parallel, 606
 - perpendicular, 606
- potential
 - scalar magnetic, 330
 - vector magnetic, 330
- potential energy, 130
 - magnetic field, 381
- power
 - normalized pattern, 761
- power series, 257
- Poynting
 - complex, 468
- Poynting theorem, 464
- Poynting vector, 381, 466
- prism, 631
 - Brewster, 641
 - temporal, 637
- microwave oven, 330
- mobility
 - electron, 181
- mode
 - dominant, 690
 - higher order, 645
- mode, transverse electric, TE, 645
- modulating frequency, 633
- moment
 - arm, 360
 - magnetic dipole, 364
 - of force, 360
- mutual inductance, 383, 390
- nabla, 115
- neper, 446
- nichrome, 474
- nickel, 369
- noise
 - power, 825
 - temperature, 825
- non homogeneous, 204
- non polar, 198
- normal incidence, 483
- normalized, 761
- nucleus, 714
- numerical aperture, 640
- numerical iteration, 266
- numerical solution, 327
- ohm, 185
- Ohm's law, 185
 - point form, 182
- open surface, 401
- optic nerve, 712
- optical fiber, 708
- optics, 612
- parallelogram law, 2
- Pascal triangle, 773
- passive, 446
- pattern

- current, 739
- retarded potential, 432
- retarded potentials, 427
- retina, 712
- right circular polarization, 514
- right hand rule, 20, 401
- RMS, 552
- rods, 712

- scalar, 1
- scalar product, 14
- scanning antenna, 785
- self inductance, 383
- semi-infinite region, 499
- separation constant, 256
- shielded, 107
- silicon, 252
- skin depth, 476
- skin effect, 476
- slot antenna, 816
- slotted line, 572
- Smith
 - admittance chart, 572
 - impedance chart, 572
- Smith chart, 556, 561
- Snell's law, 612
- solenoid, 290
- solid angle, 759
 - beam, 762
 - major lobe, 762
- spectral packet, 632
- standing wave, 488
- standing wave ratio, 493, 540
- standing wave ration, 496
- static electric field, 147
- stationary points, 796
- steady state, 578
- step, 206
- step function, 579
- steradian, 759
- Stokes theorem, 317

- projection, 53
- propagation constant, 444, 539
- Pythagoras theorem, 10

- quadrant, 135
- quality factor, Q, 720
- quantum mechanics, 369
- quarter-wave matching, 509
- quasi stationary fields, 753

- radar, 459, 504
- radar cross section, 821
- radar equation, 821
- radian
 - defined, 759
- radiation, 427
 - resistance, 755
- radiation fields, 753
- radio
 - astronomy, 785
- real, 442
- receiving
 - antenna, 765
- reciprocity, 770
- rectifier, 492
- reference point, 138
- reflected wave, 485
- reflection, 440
 - total internal, 614
- reflection coefficient, 486, 540
- refracted wave, 606
- refraction, 440
- refraction index, 611
- refractive index, 506, 631
- relative permeability, 373
- residual temperature, 827
- resistance, 185
 - radiation, 755
- resonant circuit, 714
- resonator
 - rectangular, 716
- retarded

- travelling wave, 445
- tuned, 492
- TV, 550
- undefined, 248
- uniform, 131
- unshielded, 544
- vector, 1
- vector area, 13
- vector product, 20
- velocity
 - group, 728
 - phase, 729
- volt, 138
- voltage, 138
- voltmeter, 405
- wave
 - evanescent, 617
 - polarization, 511
 - refracted, 606
 - surface, 615
 - voltage, 539
- waveguide, 330, 643
- wavelength, 447, 539
 - cutoff, 647
- Weber, 321
- wireless, 59, 453
- work, 129
- streamlines, 159
- stripline, 548
- substrate
 - dielectric, 706
- surface wave, 615
- susceptibility
 - electric, 203
- Taylor series, 110, 294, 361, 637, 797
- TEM, 451, 643
- temperature
 - residual, 827
 - system, 827
- temperature sensor
 - remote, 825
- tensor, 204, 373
- Tesla, 321
- theorem
 - Poynting, 464
- thermal noise, 824
- thermometer, 827
- Thevenin, 550, 766
- tilt angle, 516
- time constant, 187
- times period, 439
- toroid, 291
- torque, 360
- transient response, 579
- transient state, 579
- transmission coefficient, 486
- transmitted wave, 484
- transmitter, 535
- transmitting
 - antenna, 765
- transverse, 535
- transverse electric mode, 645
- transverse electric, TE, 654
- transverse electromagnetic, 451, 643
- transverse magnetic
 - wave impedance, 675
- transverse waves, 451

- آزاد الیکٹران، 252
 آسان سمت، 202
 آسان محور، 202
 آمدی موج، 605، 483،
 آنکھ
 پردہ، 712
 ابتدائی دھماکا، 827
 ابن سہل کا قانون انعطاف، 612
 اثر پذیری
 برقی، 203
 اثر جلد، 476
 اخراج
 مزاحمت، 755
 اخراجی
 لینٹینا، 765
 رقبہ لینٹینا، 767
 اخراجی ٹھوس زاویہ، 762
 اخراجی شدت، 761
 اخراجی میدان، 753
 ارتباط بہاؤ، 382
 استمراری مساوات، 179
 اشعاعی اخراج، 427
 اصول ہائیگن، 628
 انفرانٹ
 لینٹینا، 764
 انفرانٹ مستقل، 446
 ال ہوس پٹل، 776
 امالہ، 382، 383
 خود، 383
 مشترکہ، 390، 383
 امالہ گیر، 382
 انتشار، 635، 579
 رنگین، 631
 زاویائی، 631
 انتشاری مستقل، 638
 انحراف، 440
 انداز
 بلند درجی، 645
 عرضی برقی، 645
 اندر سے، 750، 291
 انعطاف
 ابن سہل کا قانون، 612
 انعطاف نما، 611
 انعطافی مستقل، 631، 611، 506
 انعکاس، 440
 مکمل اندرونی، 614
 انفرادی نقش، 772
 انقطاعی
 پست تعدد، 644
 تعدد، 671
 طول موج، 671
 انقطاعی تعدد، 669
 انقطاعی طول، 647
 انکسار امواج، 440
 اوہم، 185
 قانون، 185
 اوہم قانون
 نقطہ شکل، 182
 اینکیمپیر
 دوری قانون نقطہ شکل، 298
 اینکیمپیر چکر، 378
 اینکیمپیر قانون
 عمومی نقطہ شکل، 412
 اینکیمپیر کا دوری قانون، 284
 لینٹینا، 535، 504، 330
 اخراجی، 765
 اخراجی رقبہ، 767
 انفرانٹس، 764
 بدلتا زاویہ، 785
 پیمپا، 817
 چیچ دار، 810
 کھلمہ، 816
 جھری، 816
 حرارت، 825
 دو طرفہ خاصیت، 813
 سمتیت، 762
 غیر سمتی، 762
 گھیرا، 809
 میکافیت، 770
 محوری، 712
 وصولی، 765

- 374:206 بلا جوڑ، بلا جوڑ، بلا جوڑ، بلا جوڑ
بلا جوڑ، بلا جوڑ
690 غالب، غالب
بند
401 سطح، سطح
بند کلمہ، 100
بیسل
687 تقاعل، تقاعل
687 صفر، صفر
بیسل تقاعل، 544
بیسل مساوات، 685
بیضوی قطبیت، 513
بے بعد، 446
بے بعد، 761
بے پردہ، 544:354
بے تار، 453:59
بے ضیاع، 446
بے معنی، 776
تالیخ تقاعل، 441
تانیخ
639 مجموعی، مجموعی
تانیخ
739 برقی رو، برقی رو
432:427 تانیخ دباؤ، تانیخ دباؤ
182 تانبا، تانبا
510 تبادلہ رکاوٹ، تبادلہ رکاوٹ
57 تنجاذب، تنجاذب
57 تنجاذبی مستقل، تنجاذبی مستقل
63 تنجاذبی میدان، تنجاذبی میدان
785 تداخل بیبا، تداخل بیبا
516 تزخیم، تزخیم
تریلی
548 سطح مستوی، سطح مستوی
484 تریلی موج، تریلی موج
تسلسل
797 ٹیلر، ٹیلر
773 ثنائی، ثنائی
446 تضعیفی مستقل، تضعیفی مستقل
439 تعدد، تعدد
669 انقطاعی، انقطاعی
- 766 وصولی رقبہ، وصولی رقبہ
58 بار، بار
35 برقی، برقی
199 مقید، مقید
بازو
360 قوت، قوت
277 باپوٹ - سیوارٹ، باپوٹ - سیوارٹ
785 بدلتے زاویہ اخراجی اینٹینا، بدلتے زاویہ اخراجی اینٹینا
58:35 برقی، برقی
برقی
203 اثر پذیر، اثر پذیر
205 سرحدی شرائط، سرحدی شرائط
برقرار یکساں حال، 578
برقی گیر، 77، 175، 212
ابرقی، 214
برقی بار، 58:35
برقی بہاؤ، 97
برقی چال، 203
برقی دباؤ، 138
بیبا، 405
برقی رو
580 روایتی، روایتی
176 کشافیت، کشافیت
368 مقید، مقید
برقی زمین، 139
برقی سکون، 188
برقی گنجائش، 212
برقی مستقل، 58
خالی خلاء، 203
برقی میدان
420 سرحدی شرائط، سرحدی شرائط
64 شدت، شدت
برقی و مقناطیسی، 439
بریوسٹر زاویہ، 620
بصری
زیریں، 708
بصریات، 612
بعید بیبا حرارت، 825
بقائی میدان، 147
بقیہ حرارت، 827

- بعدیہ، 825
 بقیہ، 827
 شور، 825
 نظام، 827
 حراری، 827
 حرکت پذیری
 الیکٹران، 181
 حرکی توانائی، 163
 حرکی مستقل، 444، 539
 حقیقی، 442
 حوالہ
 نقطہ، 138
 حیطہ سوار، 633
 خط
 سمت بہاؤ، 159
 طول بلد، 40
 عرض بلد، 40
 خردامواج، 477
 خرد موج چولہا، 330، 529
 خطی، 62، 241، 372
 قطبیت، 512
 نول، 197
 آزاد، 252، 354
 خود مالہ، 383
 خیالی، 442
 عدد، 441
 داخلی قدرتی رکاوٹ، 498، 503، 541
 دائری قطبیت، 810
 دائیں ہاتھ
 قانون، 20
 دایاں دائری قطبیت، 514
 دایاں ہاتھ
 قانون، 401
 دباؤ
 تاخیری، 432
 سمتی مقناطیسی، 334
 دوری
 رفتار، 650، 672
 دوری جدول، 196
 پست انقطاعی، 644
 زاویائی، 439، 441
 مخلوط، 442
 تعدد سوار، 633
 تعدد سوار، 633
 تعددی پٹی، 634
 تفاعل
 تابع، 441
 مخلوط، 442
 تقابل پذیر، 761
 تقطیب، 199
 تقطیب موج، 511
 تکمل
 بیضوی، 327
 تکملہ اینٹینا، 816
 تکون
 پاسکل، 773
 تناوی، 373
 تناوی مستقل، 204
 تھرمامیٹر، 827
 تھون، 550، 766
 تھانوی شعاع، 762
 ثنائی
 تسلسل، 773
 جانسی، 827
 جزوی برقی مستقل، 203
 جفت قطب، 35، 156، 198
 مختصر، 742
 معیار اثر، 158، 364
 نقطہ، 159
 جلد
 اثر، 476
 جماعت، 196
 جوڑدار، 206، 208، 374
 جوڑی دار مخلوط، 468
 جھری اینٹینا، 816
 حرارت
 اینٹینا، 825

- دوری رفتار، 579
دوری سمتیہ، 441
دوری عرصہ، 439
دوطرفہ خاصیت، 813
دھماکا
ابتدائی، 827
ذوبرق، 199
زیریں، 706
رو
اتصال، 411
انتقالی، 411
ایصال، 411
کشائے اتصال، 178
کشائے انتقالی، 411
کشائے ایصال، 182
ربع اول، 135
رفتار
دوری، 672، 650، 579، 729
مجموعی، 579، 651، 728
موج، 539
رفتار بہاؤ، 181
رقبہ
ریڈار رقبہ تراش، 821
عمودی تراش، 254
وصولی، 766
رکاوت
داخلی قدرتی، 498، 541
عرضی برقی، 658
عرضی برقی موج، 658
عرضی مقناطیسی موج، 675
قدرتی، 450
رکاوت موج، 502
رنگین انتشار، 631
روایتی برقی رو، 580
روشنی، 439
ریڈار، 504، 459
رقبہ تراش، 821
ریڈار مساوات، 821
ریڈیائی
- فلکیات، 785
ریڈیئیں
تعریف، 759
زاویہ
آمد، 605
اخراجی ٹھوس، 762
انعطاف، 606
انعکاس، 605
بریلو سٹر، 620
تکلمہ، 778
ٹھوس، 759
ریڈیئیں کی تعریف، 759
سٹریڈیئیں، 759
زاویائی
انتشار، 631
تعدد، 441
زاویائی فاصلہ، 441
زاویائی مستقل، 446
زاویہ جھکاؤ، 516
زاویہ فاصلہ، 614
زاویہ قطبیت، 621
زاویہ وقوع، 605
زیریں بصری، 708
زیریں ذوبرق، 706
ساکن برقی میدان، 147
ساکن موج، 488
پیشا شرح، 577
ساکن نقطے، 796
سایہ
عمودی، 53
سٹریڈیئیں، 759
سرحدی شرائط
برقی اور مقناطیسی، 420
برقی میدان، 205، 210
مقناطیسی میدان، 374
سرستے ڈم جوڑنا، 2
سطح
بند، 401
کھلی، 401

- سطح مستوی تریسلی ہار، 548
 سطحی اینڈینا، 787
 سطحی موج، 615
 سلاخ، 712
 سلیکان، 252
 سمٹھ
 فراوانی نقشہ، 572
 مزاحمتی نقشہ، 572
 سمت کار، 492
 سمٹھ نقشہ، 561، 556
 سمتیہ، 1
 پوینٹنگ، 466
 سمتی، 202
 سمتیت، 762
 سمتی خاصیت، 373
 سمتی رقبہ، 13
 سمتی ضرب، 20
 سیاہ جسم، 827
 سیزھی نما، 206
 سیزھی نمافاعل، 579
- شدت
 اخراجی، 761
 برقی، 64
 شرح
 انوکاس، 540، 486
 ساکن موج، 540
 شرح ترسیل، 486
 شرح ردا، 516
 شرح ساکن موج، 496، 493
 شعاع
 مرکزی، 762
 شعاعی پٹی، 632
 ٹیگاف دارنار، 572
 شور
 برقی، 824
 حرارت، 825
 حراری، 824
 طاقت، 825
 شیش ریشہ، 708
- صغاری جفت قطب، 742
 صفر
 پہلی صفر چوڑائی، 779
 صلیبی ضرب، 20
 ضرب نقشہ، 772
 ضربیہ، 258
 ضیاع
 مماس، 461
 ضیاع کار، 446
 ضیائی ٹینجٹ، 461
 ضیائی ذرہ، 712
- طاقت
 حراری شور، 825
 نصف طاقت چوڑائی، 779
 طاقتی سلسلہ، 257
 طول
 انقطاعی، 647
 طول موج، 539، 447
 طیفی حد، 507
- عارضی رد عمل، 579
 عارضی صورت حال، 579
 عامل، 446
 عددی اشارہ، 635، 579
 عددی حل، 327
 عددی دہرانا، 266
 عددی ٹیگاف، 640
 عدسہ، 511
 عدسہ چشم، 712
 عرضی
 برقی، 654
 برقی انداز، 645
 برقی و مقناطیسی، 643، 451
 موج، 451
 عرضی برقی موج
 رکاوٹ، 658
 عرضی مقناطیسی
 رکاوٹ، 675
 عرضی موج، 535

- عصبی
ریشہ، 712، 714
شجر یہ، 714
عصب بصری، 712
عصبی ریشہ، 712
عطا کنندہ، 196
عکس، 193
عکس کی ترکیب، 193
علیحدگی متغیرات، 721
علیحدگی مستقل، 256
عمودی آمد، 483
عمودی سائے، 53
عمودی قطب موج، 606
- غالب بلند درجی اندازہ، 690
غلاف، 633
غیر انعکاسی تہ، 509
غیر سمی، 203
غیر سمی خاصیت، 372
غیر سمی ضرب، 14
غیر عامل، 446
غیر قطبی، 198
غیر معین، 248
- فرانس تریسلی مساوات، 819
فلکیات، 785
فناپذیر، 795
فناپذیر موج، 617
فونٹان، 712
فور بیز بدل
جوڑی، 791
فور بیز تسلسل، 265
نولادی مقناطیسی اشیاء، 369
فیبری-بیروٹ
طیفی حد، 507
فیبری-بیروٹ طیف پیمائش، 506
فیثا نحوٹ، 10
فیراڈ، 212
فیراڈے
قانون، 399
فیراڈے پردہ، 89
- قالب
حتی قیمت، 298
قانون
اوہم، 182
فیراڈے، 399
لینز، 400
قانون تبادل، 3
قانون تلازمی، 3
قانون سینیل، 612
قائم میدان، 130
قبول کنندہ، 197
قدامت پسند میدان، 132
قدرتی رکاوٹ، 450، 540
داخلی، 498، 503
قطار
چوڑائی جانب خارجی، 779
قطاری نقش، 772
قطبی، 198
قطبیت
ہائیں دائری، 514
ہیٹروی، 513
دائری، 810
دایاں دائری، 514
زاویہ، 621
عمودی، 606
متوازی، 606
قوت
کابازو، 360
معیار اثر، 360
لاپلاس
سمی، 302
لاپلاس مساوات، 236
لاپلاسی عامل، 236
لچھا
اندرسہ، 291
پنچچرار، 290
لطیف واسطہ، 612
لورنزمساوات قوت، 352
لیزر، 446، 711
لیزر کا قانون، 400

مجموعی
تائیر، 639
مجموعی رفتار، 651-579

مانیکر و ویو چولھا، 330
متحرک موج، 445
متوازی الاضلاع، 2
متوازی قطب موج، 606