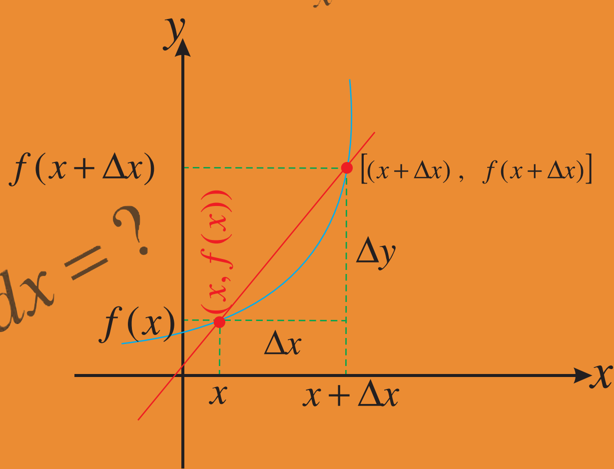
د پوهنې وزارت

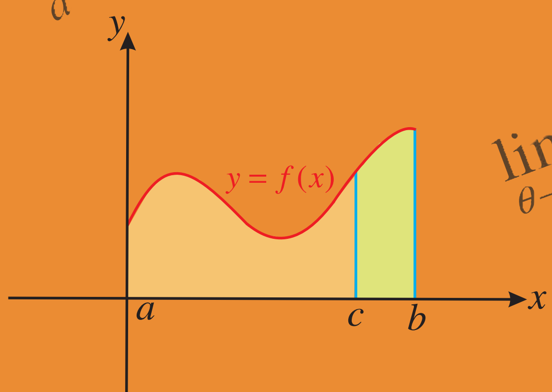
ریاضي ۱۲

ټولګی

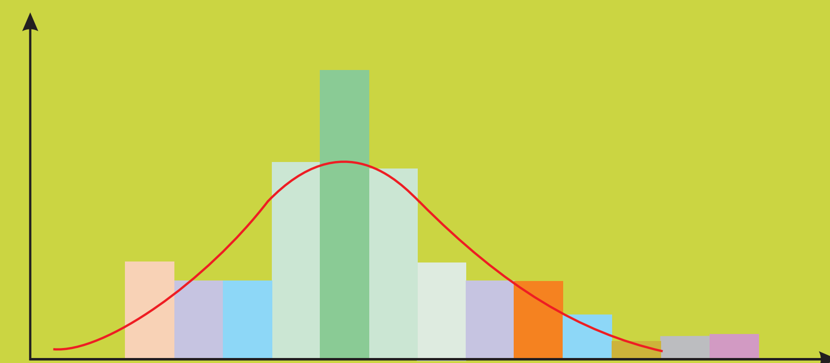
$$\lim_{x \to a} f(x) = ?$$



$$\int_a^b f(x)\,dx = ?$$



$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = ?$$



ریاضي ۱۲ ټولګی

د چاپ کال: ۱۳۹۸

ملي سرود

دا وطن افغانستان دی
کور د سولې کور د تورې
دا وطن د ټولو کور دی
د پښتون او هزاره وو
ورسره عرب، گوجر دي
براهوي دي، قزلباش دي
دا هیواد به تل ځلیږي
په سینه کې د آسیا به
نوم د حق مو دی رهبر

دا عزت د هر افغان دی
هر بچی یې قهرمان دی
د بلوڅو د ازبکو
د ترکمنو د تاجکو
پامیریان، نورستانیان
هم ایماق، هم پشه یان
لکه لمر پر شنه آسمان
لکه زړه وي جاویدان
وایو الله اکبر وایو الله اکبر

بسم الله الرحمن الرحیم

د پوهنې وزارت

رياضي ۱۲ ټولګی

د چاپ کال: ۱۳۹۸ هـ . ش.

د کتاب ځانګړتیاوې

مضمون: ریاضي

مؤلفین: د تعلیمي نصاب د ریاضیاتو د څانګې علمي او مسلکي غړي

اډیټ کوونکي: د پښتو ژبې د اډیټ علمي او مسلکي غړي

ټولګی: دولسم

د متن ژبه: پښتو

انکشاف ورکوونکی: د تعلیمي نصاب د پراختیا او درسي کتابونو د تألیف لوی ریاست

خپروونکی: د پوهنې وزارت د اړیکو او عامه پوهاوي ریاست

د چاپ کال: ۱۳۹۸ هجري شمسي

د چاپ ځای: کابل

چاپخونه:

برېښنالیک پته: curriculum@moe.gov.af

د درسي کتابونو د چاپ، وېش او پلورلو حق د افغانستان اسلامي جمهوریت د پوهنې وزارت سره محفوظ دی. په بازار کې یې پلورل او پېرودل منع دي. له سرغړوونکو سره قانوني چلندکیږي.

د پوهنې د وزیر پیغام

اقرأ باسم ربک

د لوی او ښښونکي خدای ﷻ شکر په ځای کوو، چې موږ ته يې ژوند رابښلی، او د لوست او لیک له نعمت څخه يې برخمن کړي یو، او د الله تعالی پر وروستي پیغمبر محمد مصطفی ﷺ چې الهي لومړنی پیغام ورته (لوستل) و، درود وایو.

څرنګه چې ټولو ته ښکاره ده ۱۳۹۷ هجري لمریز کال د پوهنې د کال په نامه ونومول شو، له دې امله به د ګران هېواد ښوونیز نظام، د ژورو بدلونونو شاهد وي. ښوونکی، زده‌کوونکی، کتاب، ښوونځی، اداره او د والدینو شوراګانې د هېواد د پوهنیز نظام شپږګوني بنسټیز عناصر بلل کیږي، چې د هېواد د ښوونې او روزنې په پراختیا او پرمختیا کې مهم رول لري. په داسې مهم وخت کې د افغانستان د پوهنې وزارت د مشرتابه مقام، د هېواد په ښوونیز نظام کې د ودې او پراختیا په لور بنسټیزو بدلونونو ته ژمن دی.

له همدې امله د ښوونیز نصاب اصلاح او پراختیا، د پوهنې وزارت له مهمو لومړیتوبونو څخه دي. همدارنګه په ښوونځیو، مدرسو او ټولو دولتي او خصوصي ښوونیزو تأسیساتو کې، د درسي کتابونو محتوا، کیفیت او توزیع ته پاملرنه د پوهنې وزارت د چارو په سر کې ځای لري. موږ په دې باور یو، چې د باکیفیته درسي کتابونو له شتون پرته، د ښوونې او روزنې اساسي اهدافو ته رسېدلی نشو.

پورتنیو موخو ته د رسېدو او د اغېزناک ښوونیز نظام د رامنځته کولو لپاره، د راتلونکي نسل د روزونکو په توګه، د هېواد له ټولو زړه سواندو ښوونکو، استادانو او مسلکي مدیرانو څخه په درناوي هیله کوم، چې د هېواد بچیانو ته دې د درسي کتابونو په تدریس، او د محتوا په لېږدولو کې، هیڅ ډول هڅه او هاند ونه سپموي، او د یوه فعال او په دیني، ملي او انتقادي تفکر سمبال نسل په روزنه کې، زیار او کوښښ وکړي. هره ورځ د ژمنې په نوي کولو او د مسؤولیت په درک سره، په دې نیت لوست پیل کړي، چې د نن ورځې ګران زده‌کوونکي به سبا د یوه پرمختللي افغانستان معماران، او د ټولنې متمدن او ګټور اوسېدونکي وي.

همدا راز له خوږو زده کوونکو څخه، چې د هېواد ارزښتناکه پانګه ده، غوښتنه لرم، څو له هر فرصت څخه ګټه پورته کړي، او د زده کړې په پروسه کې د ځیرکو او فعالو ګډونوالو په توګه، او ښوونکو ته په درناوي سره، له تدریس څخه ښه او اغېزناکه استفاده وکړي.

په پای کې د ښوونې او روزنې له ټولو پوهانو او د ښوونیز نصاب له مسلکي همکارانو څخه، چې د دې کتاب په لیکلو او چمتو کولو کې یې نه ستړې کېدونکې هلې ځلې کړې دي، مننه کوم، او د لوی خدای ﷻ له دربار څخه دوی ته په دې سپېڅلې او انسان جوړوونکې هڅې کې بریا غواړم.

د معیاري او پرمختللي ښوونیز نظام او د داسې ودان افغانستان په هیله چې وګړي یې خپلواک، پوه او سوکاله وي.

د پوهنې وزیر

دکتور محمد میرویس بلخي

فهرست

سرلیکونه	مخونه
لومړی څپرکی لیمیټ	۱-٤٠
• د لیمیټ مفهوم	
• د ښي او کیڼې خوا لیمیټونه	
• د لیمیټ خاصیتونه	
• د نسبتي تابع ګانو لیمیټونه	
• د $\frac{\infty}{\infty}$ مبهم شکل	
• د $\infty - \infty$ او $0 \cdot \infty$ مبهم شکلونه	
• د $0^0, \infty^0, 1^\infty$ مبهم شکلونه	
• د مثلثاتي تابع ګانو لیمیټ	
• د تابع ګانو متمادیت	
• د متمادي تابع ګانو خاصیتونه	
• د څپرکي لنډیز او پوښتنې	
دویم څپرکی مشتقات	٤١-٨٢
• د یوې تابع مشتق	
• د مشتق هندسي تعبیر	
• د مشتق قوانین	
• د مرکبو تابع ګانو مشتق	
• د مثلثاتي تابع ګانو مشتق	
• ضمني مشتقات	
• لوړ مرتبه یي مشتقات	
• د څپرکي لنډیز او پوښتنې	
دریم څپرکی د مشتق د استعمال ځایونه	٨٣-١٣٢
• د یوې تابع بحراني ټکی(اعظمي او اصغري)	
• د انعطاف د ټکي ټاکل له دویم مشتق څخه په ګټې اخېستنې سره	
• د منحنيګانو رسمول	
• د توابعو د ګرافونو مجانبونه	
• د هوموګرافیک تابع ګانو ګراف	
• د دریمې درجې یو مجهوله تابع ګراف	
• د رول قضیه	
• د متوسط قیمت قضیه	
• د لوپیټال قاعده	
• د بحراني ټکو تطبیق	
• د څپرکي لنډیز او پوښتنې	

سرليکونه	مخونه
څلورم څپرکی انتیګرال	۱۳۳-۱۷۲

څلورم څپرکی انتیګرال ۱۳۳-۱۷۲

- د ریمان مجموعه
- د انتیګرال مفهوم
- د غیرمعین انتیګرال خواص
- معین انتیګرال
- د معین انتیګرال خواص
- د مشتق او انتیګرال اساسي قضیې
- په تعویضي طریقې سره انتیګرال نیول
- په قسمي طریقې سره انتي ګرال نیول
- د څپرکي لنډیز او پوښتنې

پنځم څپرکی د لوګاریتمي او اکسپوننشیل تابعګانو مشتق او انتیګرال ۱۷۳-۱۹۸

- د لوګاریتمي او اکسپوننشیل تابع ګانو مشتق
- د معکوسو تابع ګانو مشتق
- قسمي کسرونه
- د اکسپوننشیل تابع ګانو انتیګرالونه
- د لوګاریتمي تابع ګانو انتیګرال
- د قسمي کسرونو په مرسته د انتیګرال محاسبه
- د څپرکي لنډیز او پوښتنې

شپږم څپرکی د انتیګرال تطبیقات ۱۹۹-۲۲۲

- د یوه منحني په واسطه د محصور شوې سطحې د مساحت محاسبه
- د دوو منحنی ګانو ترمنځ د محصور شوې سطحې د مساحت محاسبه
- د ګراف له دوران څخه د په لاس راغلي جسم حجم
- د قوس د اوږدوالی محاسبه
- د څپرکي لنډیز او پوښتنې

اووم څپرکی احصائیه ۲۲۳-۲۶۰

- د احتمال د تابع توزیع
- د دوه جملهیي توزیع او د برنولي آزمايښت
- د پواسن د احتمال توزیع
- نورمال توزیع
- د نورمال توزیع منحني لاندې مساحت او د هغې سټنډرډ کول
- نمونه اخيستل
- د نمونې د اوسط توزیع
- د مرکزي لیمیټ قضیه
- د نمونهیي توزیع نسبت
- د څپرکي لنډیز او پوښتنې

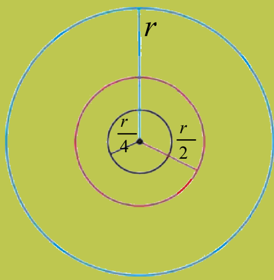
اتم څپرکی احتمالات ۲۶۱-۲۸۲

- پرېکړې او نښتې فضاګانې
- هم چانسه پیښې
- د نښتو یا پیوسته فضاګانو احتمال
- مشروط احتمال
- د حاصل ضرب اصل
- د ناخاپي پېښو استقلالیت
- د څپرکي لنډیز او پوښتنې

لومړی څپرکی

لیمیټ

د لیمیټ مفهوم



په یوه مستوي کې درې دایرې داسې رسم کړئ چې د O ټکي د دایرو متحد مرکز او شعاع ګانې یې په ترتیب سره $r, \frac{r}{2}$ او $\frac{r}{4}$ وي، دې عملیې ته څو ځلې دوام ورکولای شئ؟

فعالیت

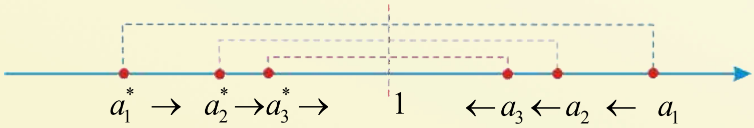
د $a_n = (1+\frac{1}{n})$ او $a_n^* = (1-\frac{1}{n})$ ترادفونه د $n \in IN$ لپاره په پام کې ونیسئ او لاندې فعالیت ترسره کړئ:

- د عددونو په محور باندې د a_1 او a_1^* موقعیت(ځای) وښیئ.
- ویلای شئ چې د a_2 او a_2^* قیمتونه د $[a_1^*, a_1]$ د فاصلې دننه یا د باندې پراته دي.
- د a_1، a_1^* او a_2، a_2^* منځنی ټکي یو له بل سره پرتله کړئ.
- پورته پړاوونو ته په پاملرنې سره ویلای شئ چې د a_3 او a_3^* د ټکو موقعیت د عددونو پر محور په کوم ځای کې واقع دي.
- آیا ویلای شئ چې د n د تر ټولو لویو قیمتونو په اخیستلو سره د a_n او a_n^* ردیفونه کومو قیمتونو ته نژدې کېږي؟

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله لیکلای شو:

پایله:لیدل کېږي چې د a_n ترادف له ښي لوري څخه د 1 او د a_n^* ترادف له کیڼ لوري څخه د 1 عدد ته د n په زیاتېدو سره نژدې کېږي، یعنې:

ـ د a_n ترادف کله چې n بې نهایت ته تقرب وکړي، مساوي په(1) سره کېږي او همداشان د a_n^* د ترادف $n-$ام حد که n بې نهایت ته نژدې شي هم مساوي له (1) سره کېږي.



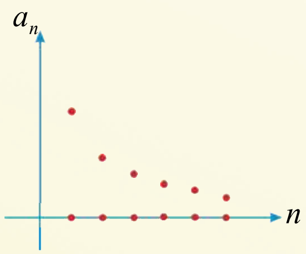
ددې لپاره چې د لیمیټ مفهوم مو ښه څرګند کړی وي، په لومړي پړاو کې هغه په څو ترادفونو کې د ګراف په پام کې نیولو سره تر څېړنې لاندې نیسو.

مثال: لاندي ورکړل شوي ردیفونه د n د تر ټولو لويو قيمتونو لپاره کوم قيمت ته تقرب کوي يا نژدې کېږي، موضوع په ګرافيکي ډول تشريح کړئ، په داسې حال کې چې:

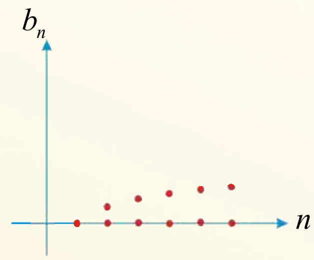
$$a_n = \left(\frac{2n+3}{n}\right) \; ... (i) \qquad b_n = \left(\frac{n-1}{n}\right) \; ... (ii) \qquad c_n = (-1)^n \frac{1}{n} \; ... (iii)$$

حل: پوهېږو چې د n د بېلابېلو قيمتونو لپاره ګرافيکي شودنه په لاندې ډول ده.

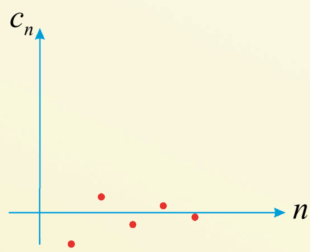
n	1	2	3	4	5	6	7	$\to \infty$
a_n	5	$\frac{7}{2}$	3	$\frac{11}{4}$	$\frac{13}{5}$	$\frac{15}{6}$	$\frac{17}{7}$	$\to 2$



n	1	2	3	4	5	$\to \infty$
b_n	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\to 1$



n	1	2	3	4	5	$\to \infty$
c_n	-1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{5}$	$\to 0$

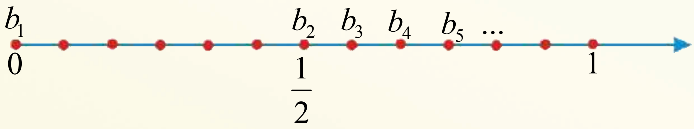


له پورتينو ګرافونو څخه ليدل کېږي چې راکړل شوي ترادفونه د n د قيمتونو په زياتېدو سره د ترادفونو قيمت يوه ټاکلي عدد ته نژدې کېږي، لکه: د a_n ترادف د 2 عدد ته د b_n ترادف د 1 عدد ته او د c_n ترادف صفر ته تقرب کوي چې n ته د ډېرو لويو قيمتونو په ورکولو سره موضوع په آسانۍ سره روښانه کېږي.

د ترادف د قيمتونو له جدول څخه د لېميټ قيمت ښکارېږي، د لېميټ په شته والي کې رديف يوه ټاکلي عدد ته نژدې کېږي. دغه ټاکلي عدد ته لېميټ (limit) وايي. چې په lim سره ښودل کېږي.

ددې لپاره د $b_n=\dfrac{n-1}{n}$ ترادف په پام کې نیسو، لرو چې:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...
b_n	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{10}{11}$	...



او یا که چېرې $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\ \dots,\ \frac{1}{n}$ .... I , $2,\frac{3}{2},\frac{4}{3},\frac{5}{4},\ \dots,\ \frac{n+1}{n}$ .... II او

$2,4,6,\ \dots,\ 2n$ .... (III) د عددونو ترادفونه په پام کې ونیسو، لیدل کېږي چې که n د بې نهایت لورې ته نږدې شي، نو د I ترادف صفر ته نږدې کېږي د II ترادف د (1) عدد ته نږدې کېږي د III ترادف بې‌نهایت (∞) ته نږدې کېږي.

د متحول تقرب: ویل کېږي چې د x متحول د a عدد ته تقرب کوي، په داسې حال کې چې x په اختیاري ډول د a عدد ته نږدې کېږي، یعني د x او a ترمنځ تفاوت له هر کوچني عدد($\delta>0$) څخه کوچنی وي یا په لاندې ډول:

$$\forall\delta>0: |x-a|<\delta \quad \text{یا} \quad x\to a \quad \text{یا} \quad |x-a|\to 0$$

له ښي لوري د متحول تقرب: ($x\to a^+$) که چېرې د x د قیمتونو یو متناقص ترادف موجود وي په داسې حال کې چې په تدریجي ډول د a اختیاري عدد ته نږدې شي.

$$x:\ a+0.1,\ a+0.01\ ,\ a+0.001\ ,\ a+0.0001\ ,\ \dots\ \to\ a^+$$

له کیڼ لوري د متحول تقرب: ($x\to a^-$) که چېرې د x د قیمتونو یو متزاید ترادف موجود وي په داسې حال کې چې x په تدریجي ډول د a اختیاري عدد ته نږدې شي.

$$x:\ a-0.1,\ a-0.01\ ,\ a-0.001\ ,\ a-0.0001\ ,\ \dots\ \to\ a^-$$

نو د x د متحول تقرب د a عدد ته معادل دی د x د متحول تقرب له ښي لوري او د x د متحول تقرب له چپ لوري، یعني:

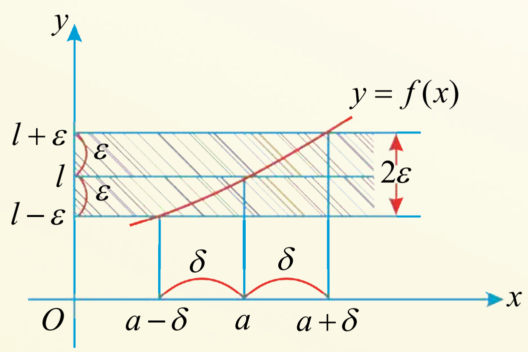
$$x\to a \quad\Leftrightarrow\quad (x\to a^+\ ,\ x\to a^-)$$

لومړی بېلګه: د x متحول د 9 عدد ته نژدې کړئ یا په بل عبارت د $x \to 9$ مفهوم توضیح کړئ.

حل:

$$x: 9.1\ ,\ 9.01\ ,\ 9.001\ ,\ 9.0001\ ,\ \ldots\ \to 9^{+}$$
$$x: 8.9\ ,\ 8.99\ ,\ 8.999\ ,\ 8.9999\ ,\ \ldots\ \to 9^{-}$$

تعریف: که چېرې د $f(x)$ تابع په یوه غیر تړلي انټروال کې چې د a عدد په هغه کې ګډون لري کېدای شي چې تابع په a کې نه وي تعریف شوی. که چېرې د x متحول د a عدد ته نژدې، شي نو د $f(x)$ تابع د l عدد ته نژدې کېږي، نو ویل کېږي چې د $f(x)$ تابع لېمیټ عبارت له l څخه دی، کله چې د x متحول د a عدد ته تقرب وکړېږي، نو داسې يې لیکو: $\lim_{x \to a} f(x) = l$ یا $\begin{matrix} x \to a \\ f(x) \to l \end{matrix}$



$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \ : |x-a| < \delta \quad \Rightarrow \ |f(x) - l| < \varepsilon$$
$$\lim_{x \to a} f(x) = l \ \Leftrightarrow \ \ (|x-a| \to 0 \Rightarrow \ |f(x) - l| \to 0)$$

پوښتنه

د $f(x) = 2x$ تابع په ګرافیکي ډول وښيئ چې که x د (3) عدد ته نژدې شي $f(x)$ د (6) عددته نژدې کېږي.

د ښي او کيڼ خوا لېمېټونه

مخامخ تصوير ته پاملرنه وکړئ ووايئ چې مخامخ ونې ته له کومو خواوو څخه نژدې کېدای شو.

فعالیت

په لاندې جدول کې د $x \neq 1$ ، $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ ته ځينې قيمتونه ورکړل شوي.

x	0.98	0.99	0.999	?	1.001	1.01	1.02
$f(x)$	1.98	1.99	1.999	?	2.001	2.01	2.02

$\longrightarrow \qquad \longleftarrow$

- د تابع گراف رسم کړئ.
- که x د (1) عدد ته نژدې شي، نو $f(x)$ کوم عدد ته نژدې کېږي.

له پورتني فعاليت څخه لاندې پايله ليکلای شو:

د ښي خوا لېمېټ: د $f(x)$ تابع د a په عدد کې د ښي لوري l_1 لېمېټ لري که چېرې د هر $\varepsilon > 0$ لپاره يو کوچنی عدد د $\delta > 0$ موجود وي داسې چې که: $x \in (a, a+\delta) \Rightarrow f(x) \in (l_1 - \varepsilon, l_1 + \varepsilon)$ يا

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = l_1$$

د کيڼ خوا لېمېټ: د $f(x)$ تابع د a په عدد کې د کيڼ لوري l_2 لېمېټ لري. که چېرې د هر $\varepsilon > 0$ لپاره د $\delta > 0$ يو عدد پيدا شي داسې چې $x \in (a-\delta, a) \Rightarrow f(x) \in (l_2 - \varepsilon, l_2 + \varepsilon)$ يا

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = l_2$$

د $f(x)$ تابع هغه وخت چې $x \to a$ ته نژدې شي د l لېمېټ لري، يعني: $\lim_{x \to a} f(x) = l$ په دې شرط چې:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = l = \lim_{x \to a^+} f(x)$$

دويمه بېلګه: و ښيئ چې $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=6$ سره دی.

حل: د ښي او کيڼې خوا لېميتونه تر څېړنې لاندې نيسو:

x	3.5	3.1	3.01	3.001	...	3^+
$f(x)$	6.5	6.1	6.01	6.001	...	6

$$\Rightarrow \lim_{x\to 3^+}\frac{x^2-9}{x-3}=6$$

x	2.5	2.9	2.99	2.999	...	3^-
$f(x)$	5.5	5.9	5.99	5.999	...	6

$$\Rightarrow \lim_{x\to 3^-}\frac{x^2-9}{x-3}=6$$

ليدل کېږي چې د ښي خوا او کيڼې خوا لېميتونه سره مساوي دي، نو $\lim_{x\to 3}=\frac{x^2-9}{x-3}=6$ دی.

دويمه طريقه: د لېميټ د تعريف په پام کې نيولو سره فرضوو چې د هر اختياري کوچني عدد ε لپاره يو δ شتون لري داسې چې:

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta>0 : \ |x-a|<\delta \ \Rightarrow \ |f(x)-l|<\varepsilon$$

$$|x-3|<\delta \ \Rightarrow \left|\frac{x^2-9}{x-3}-6\right|=\left|\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}-6\right|=|x+3-6|=|x-3|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow \varepsilon=\delta$$

له پورتنۍ اړيکې څخه دا معلومېږي چې ε له δ سره اړيکه لري، که δ ته قيمت ورکړو ε قيمت اخلي او که ε ته قيمت ورکړو δ قيمت اخلي، بنا پر دې هغه تعريف چې د لېميټ لپاره موجود دی سم دی او تابع لېميټ لري، يعنې: $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=6$

پوښتنه

وښيئ چې د $f(x)=\frac{|x-2|}{x-2}$ تابع کله چې $x\to 2$ لېميټ نه لري.

د لیمیټ خاصیتونه(Properties of Limit)

د مخامخ مساوات دلیمیټونو دواړه خواوې کله چې $x \to -1$ وکړي، سره مساوي دي او که نه؟

$$\lim_{x \to -1}(x^2 \pm x) = \lim_{x \to -1} x^2 \pm \lim_{x \to -1} x$$

فعالیت

ددې فعالیت د سرته رسولو لپاره لاندې پوښتنو ته ځوابونه پیدا کړئ:

- که x د 2 عدد ته نژدې شي، نو د $f(x) = x + 2$ تابع لیمیټ به څو وي؟
- که $x \to 3$ ته تقرب وکړي، نو د $g(x) = 2x$ تابع لیمیټ پیدا کړئ.
- $\lim_{x \to 2} f(x) \pm \lim_{x \to 2} g(x)$ پیدا کړئ.
- $\lim_{x \to 2} f(x) \cdot \lim_{x \to 2} g(x)$ پیدا کړئ.
- $\lim_{x \to 2} f(x) \div \lim_{x \to 2} g(x)$ پیدا کړئ.

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایلې لیکلای شو:

که $\lim_{x \to a} f(x) = A$ او $\lim_{x \to a} g(x) = B$ وي، نو:

1) $\lim_{x \to a} Kf(x) = K \lim_{x \to a} f(x) = KA$

2) $\lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x) = A \pm B$

3) $\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x) = A \cdot B$

4) $\lim_{x \to a} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} = \frac{A}{B}$, $\lim_{x \to a} g(x) = B \neq 0$

5) $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)} = \sqrt[n]{A}$, $\lim_{x \to a} f(x) = A \geq 0$

له پورتنیو خواصو څخه درې خاصیتونه ثبوتوو او پاتې یې د زده‌کوونکو کورنی دنده ده.

بې نهایت کوچنی تابع ګاڼي: د $\varepsilon(x)$ تابع کله چې $x \to a$ ته نژدې شي، بې نهایت کوچنی بللې کېږي، که چېرې $\lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$ وي.

1- ددې لپاره چې $\lim_{x\to a} f(x)=b$ سره شي، لازم او کافي ده چې د $f(x)$ تابع د يوه ثابت عدد b او يوې بې نهايت کوچني تابع $\varepsilon(x)$ کله چې $x\to a$ د مجموعې په شکل وښودل شي، يعنې:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=b+\varepsilon(x) \\ \lim_{x\to a}\varepsilon(x)=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x)=b$$

2- که چېرې $\varepsilon(x)$ ، $x\to a$ ته نژدې شي، بې نهايت کوچنۍ تابع وي، خو صفر نه وي، نو $\lim_{x\to a}\frac{1}{\varepsilon(x)}=\infty$

د بې نهايت کوچنۍ تابع ګانو مجموعه بيا هم يوه بې نهايت کوچنۍ تابع ده.

3- د بې نهايت کوچنيو تابع ګانو د ضرب حاصل بيا هم يوه بې نهايت کوچنۍ تابع ده.

4- که چېرې $\varepsilon(x)$ يوه بې نهايت کوچنۍ تابع او $u(x)$ داسې يوه تابع وي چې لېميټ يې صفر نه وي، نو د $v(x)=\frac{\varepsilon(x)}{u(x)}$ تابع يوه بې نهايت کوچنۍ تابع ده.

مثال:

I) د $\varepsilon(x)=x^2-9$ تابع کله چې $x\to 3$ ، يوه بې نهايت کوچنۍ تابع ده ځکه چې:

$$\lim_{x\to 3}(x^2-9)=0$$

II) $\varepsilon(x)=\frac{1}{2x}$ تابع کله چې $x\to\infty$ ته نژدې شي بې نهايت کوچنۍ تابع ده:

$$\lim_{x\to\infty}\varepsilon(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2x}=0$$

پوښتنې: د تېرو خاصيتونو په مرسته لاندې سوالونه حل کړئ.

$$1)\ \lim_{x\to 2}(2x^2-1)=\lim_{x\to 2}2x^2-\lim_{x\to 2}1=2\lim_{x\to 2}x^2-\lim_{x\to 2}1=2\cdot 2^2-1=7$$

$$2)\ \lim_{x\to -3}(x-1)^2=\lim_{x\to -3}(x-1)\cdot\lim_{x\to -3}(x-1)=(-4)(-4)=16$$

$$3)\ \lim_{x\to 0}\frac{4x-3}{x+1}=\frac{\lim_{x\to 0}4x-\lim_{x\to 0}3}{\lim_{x\to 0}x+\lim_{x\to 0}1}=\frac{0-3}{0+1}=-3$$

د پورتنيو پوښتنو له حل څخه د لېميټ يو خاصيت داسې بيان او ثبوو:

1. د څو تابع ګانو د مجموعې لېميټ د نومړو هرې تابع د لېميټونو له مجموعې سره مساوي دي، يعنې: که چېرې د $f(x_1), f(x_2)$ تابع ګانې وي، نو لرو چې:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x_1)+f(x_2)\right]=\lim_{x\to a}f(x_1)+\lim_{x\to a}f(x_2)$$

ثبوت:که $\lim_{x\to a}f(x_1)=b_1\ ,\ \lim_{x\to a}f(x_2)=b_2$ او ε_1 او ε_2 بې نهايت کوچنۍ تابع ګانې وي، نو:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x_1)\pm f(x_2)\right]=b_1\pm b_2$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x_1)=b_1+\varepsilon_1\ \ .....\ I \\ f(x_2)=b_2+\varepsilon_2\ \ .....\ II \end{array}\right\}\Rightarrow f(x_1)\pm f(x_2)=(b_1+\varepsilon_1)\pm(b_2+\varepsilon_2)=b_1\pm b_2+(\varepsilon_1\pm\varepsilon_2)$$

ځرنګه چې $(\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2)$ د بې نهایت کوچنیو تابع ګانو مجموعه او تفاضل ده او د بې نهایت کوچنیو تابع ګانو مجموعه او تفاضل بیاهم یوه بې نهایت کوچنی تابع ده، نو:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x_1)\pm f(x_2)\right]=b_1\pm b_2=\lim_{x\to a}f(x_1)\pm\lim_{x\to a}f(x_2)$$

2. د دوو یا څو تابع ګانو د ضرب د حاصل لیمیټ د نومورو تابع ګانو د لیمیټونو د ضرب له حاصل سره مساوي دی:

ثبوت:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x_1)\cdot f(x_2)\right]=\lim_{x\to a}f(x_1)\cdot\lim_{x\to a}f(x_2)=b_1\cdot b_2$$

$$\left.\begin{aligned}f(x_1)&=b_1+\varepsilon_1\\ f(x_2)&=b_2+\varepsilon_2\end{aligned}\right\}\Rightarrow\ f(x_1)\cdot f(x_2)=(b_1+\varepsilon_1)(b_2+\varepsilon_2)$$

$$f(x_1)\cdot f(x_2)=b_1\cdot b_2+b_1\cdot\varepsilon_2+b_2\cdot\varepsilon_1+\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2$$

ځرنګه چې ε_1 او ε_2 ډېر کوچني عددونه دي، نو د ضرب حاصل یې د b_1 او b_2 سره او همداشان په خپلو کې بې‌نهایت کوچنی کېږي، نو:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x_1)\cdot f(x_2)\right]=b_1\cdot b_2=\lim_{x\to a}f(x_1)\cdot\lim_{x\to a}f(x_2)$$

3. د دوو تابع ګانو د نسبت لیمیټ د هغو تابع ګانو د لیمیټونو له نسبت څخه عبارت دی، لکه په لاندې ډول:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}=\frac{b_1}{b_2}\qquad,\quad g(x)=b_2\neq 0$$

ثبوت:

$$\left.\begin{aligned}f(x)&=b_1+\varepsilon_1\\ g(x)&=b_2+\varepsilon_2\end{aligned}\right\}\ \Rightarrow\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{b_1+\varepsilon_1}{b_2+\varepsilon_2}$$

د مساوات له دواړو خواوو څخه $\frac{b_1}{b_2}$ تفریق کوو:

$$\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{b_1}{b_2}=\frac{b_1+\varepsilon_1}{b_2+\varepsilon_2}-\frac{b_1}{b_2}=\frac{b_2(b_1+\varepsilon_1)-b_1(b_2+\varepsilon_2)}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}$$

$$=\frac{b_2b_1+b_2\varepsilon_1-b_1b_2-b_1\varepsilon_2}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}=\frac{b_2\varepsilon_1-b_1\varepsilon_2}{b_2(b_2+\varepsilon_1)}$$

$$\Rightarrow\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{b_2\varepsilon_1-b\varepsilon_2}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}+\frac{b_1}{b_2}=\frac{b_2\varepsilon_1-b_1\varepsilon_2+b_1b_2+b_1\varepsilon_2}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}$$

$$=\frac{b_2(b_1+\varepsilon_1)}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}=\frac{b_1+\varepsilon_1}{b_2+\varepsilon_2}\quad\Rightarrow\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{b_1+\varepsilon_1}{b_2+\varepsilon_2}$$

خرنگه چې ε_1 او ε_2 ډېر کوچني مثبت عددونه ($0<\varepsilon<1$) دي، نو کله چې $x \to a$ وکړي صفر کېږي او په پایله کې په لاس راځي چې:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}=\frac{b_1}{b_2}$$

د ساندویچ قضیه: که چېرې د $f(x), g(x)$ او $h(x)$ تابع گانې د هر x لپاره په یوه غیر ترلي انټروال کې چې د a عدد په کې شامل دی (ولو که $x \neq a$) او $f(x) \le g(x) \le h(x)$ شرط صدق وکړي په هغه صورت کې چې $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b=\lim\limits_{x\to a} h(x)$ وي، نو $\lim\limits_{x\to a} g(x)=b$ دی.

مثال: که د $u(x)$ تابع دغه خاصیت ($1-\frac{x^2}{4} \le u(x) \le 1+\frac{x^2}{2}$) ولري، نو $\lim\limits_{x\to a} u(x)$ په لاس راوړئ.

حل: لیدل کېږي چې $\lim\limits_{x\to 0}(1-\frac{x^2}{4})=1=\lim\limits_{x\to 0}(1+\frac{x^2}{2})$ دی، نو د ساندویچ د قضیې په پام کې نیولو سره لرو چې:

$$\lim_{x\to 0} u(x)=1$$

قضیه: که چېرې $f(x)$ او $g(x)$ داسې تابع گانې وي چې $f(x) \le g(x)$ نو د لېمیټ د شتون په صورت کې یې لمېیټ $\lim\limits_{x\to a} f(x) \le \lim\limits_{x\to a} g(x)$ سره دی.

مثال: د $f(x)=\frac{15x-4}{5x+6}$ او $g(x)=\frac{15x+4}{5x-6}$ تابع گانې په پام کې نیسو په واضح ډول معلومېږي چې د $x>1$ لپاره لرو $f(x)<g(x)$ دی.

حل:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{15x-4}{5x+6}=\frac{15}{5}=3$$

$$\lim_{x\to\infty} g(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{15x+4}{5x-6}=\frac{15}{5}=3$$

پوښتنې

لاندې لېمیټونه د امکان په صورت کې پیدا کړئ.

1) $\lim\limits_{x\to 0} 6x^3-2x^2+5x+3$

2) $\lim\limits_{x\to -1} x^7-2x-5$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(9x+2)^2-4}{x}$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x^2+7x}{(2x-5)^2-9}$

5) $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{x-2}$

6) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x}{x^2-4x+1}$

د نسبتي تابع ګانو لېمیټونه

آیا پوهیږئ چې مخامخ اړیکې په څه نامه یادیږي؟

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$$

$$\infty - \infty$$

$$0 \cdot \infty$$

فعالیت

- د $y = x^2 - 1$ تابع لېمیټ هغه وخت پیدا کړئ چې $x \to -2$ ته تقرب وکړي.
- د $y = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ تابع لېمیټ هغه وخت پیدا کړئ چې $x \to 1$ ته تقرب وکړي.
- د $y = \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$ تابع لېمیټ هغه وخت پیدا کړئ چې $x \to \infty$ ته تقرب وکړي.

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله لیکلای شو:

پایله

- د ځینو تابع ګانو لېمیټ مستقیماً د قیمت په وضع کولو سره لاسته راځي.
- ځنې تابع ګانې د $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$ ... مبهم شکلونه لري چې د ابهام د له منځه وړلو څخه وروسته د تابع لېمیټ لاسته راځي چې په لاندې ډول یې تر څېړنې لاندې نیسو:

I- د $\frac{0}{0}$ مبهم شکل:

فعالیت

- د $f(x) = \dfrac{x - 1}{x^2 - 1}$ تابع قیمت د $x = -1$ په نقطه کې وڅېړئ.
- د $f(x)$ تابع لېمیټ کله چې $x \to 1$ وي د ابهام کومه بڼه لري.
- آیا د $f(x)$ تابع په داسې ډول ساده کولای شو چې د $x = 1$ لپاره یو معین قیمت ولري؟

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

که چېرې یوه تابع د $\frac{0}{0}$ په شکل مبهمه بڼه ولري، د لېمیټ د پیدا کولو لپاره یې لومړی تابع د تجزیې په مرسته ساده کوو د ابهام عامل (خبیثه فکتور) له منځه وړو او بیا یې د لېمیټ قیمت په لاس راوړو.

مثال: لاندې لېمیټونه پیدا کړئ.

$$1)\ \lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x+2}\quad,\quad 2)\ \lim_{x\to 2}\frac{x^2-6x+8}{x-2}\quad,\quad 3)\ \lim_{x\to 16}\frac{\sqrt{x}-4}{x-16}$$

حل: لومړی د لېمیټ بڼه ټاکو:

$$1)\ \lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x+2}=\frac{(-2)^2-4}{-2+2}=\frac{0}{0}$$

څرنګه چې پاسنې لېمیټونه د $\frac{0}{0}$ بڼه لري، نو د تجزیې په مرسته یې وروسته له ساده کولو څخه د لېمیټ قیمت په لاندې ډول په لاس راوړو:

$$\Rightarrow \lim_{x\to -2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x+2)}=\lim_{x\to -2}(x-2)=-2-2=-4$$

$$2)\ \lim_{x\to 2}\frac{x^2-6x+8}{x-2}=\frac{2^2-12+8}{2-2}=\frac{0}{0}$$

حل: بیا هم لېمیټ د $\frac{0}{0}$ مبهم شکل لري:

$$\Rightarrow \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-4)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x-4)=2-4=-2$$

$$3)\ \lim_{x\to 16}\frac{\sqrt{x}-4}{x-16}=\frac{0}{0}$$

حل: لیدل کېږي چې نوموړی لېمیټ بیا هم د $\frac{0}{0}$ بڼه لري، نو د لېمیټ د لاسته راوړلو لپاره د کسر صورت او مخرج د صورت په مزدوج کې ضربوو:

$$\Rightarrow \lim_{x\to 16}\frac{\sqrt{x}-4}{x-16}\cdot\frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+4}=\lim_{x\to 16}\frac{(x-16)}{(x-16)(\sqrt{x}+4)}$$

$$=\lim_{x\to 16}\frac{1}{\sqrt{x}+4}=\frac{1}{8}$$

پوښتنې

$$1)\ \lim_{x\to 3}\frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2}=?\qquad 2)\ \lim_{x\to 1}\frac{\frac{5}{2x-3}+5}{x^2-1}=?\qquad 3)\ \lim_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}=?$$

$$4)\ \lim_{x\to 2}\frac{\frac{2x}{x^2+1}-\frac{4}{5}}{x-2}=?\qquad 5)\ \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x+3}-\frac{1}{3}}{x}=?$$

II- د $\frac{\infty}{\infty}$ مبهم شکل

آیا د مخامخ تابع لېمیټ ټاکلی شئ؟

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-3x+8}{2x^2-2}$$

- د $f(x)=2x^4+x^3-4x-1$ تابع لېمیټ چې $x\to\infty$ وخېږئ.
- د $g(x)=x^3-2x-4$ تابع لېمیټ چې $x\to\infty$ وخېږئ.
- د $y=\frac{5}{x-2}$ تابع لېمیټ چې $x\to\infty$ وخېږئ.
- د $\frac{f(x)}{g(x)}$ تابع لېمیټ هغه وخت په لاس راوړئ چې $x\to 0$ وکړي.
- د $\frac{f(x)}{g(x)}$ تابع لېمیټ هغه وخت په لاس راوړئ چې $x\to\infty$ وکړي.

له پاسني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

پایله: هغه توابع چې د $\frac{\infty}{\infty}$ بڼه ولري د لېمیټ د پیداکولو لپاره یې داسې کړنه کوو:

د تابع صورت او مخرج په هغه متحول چې تر ټولو لوی توان ولري وېشو، وروسته له ساده کولو څخه یې لېمیټ په لاس راځي.

لومړی مثال: $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{3x^2-2}$ پیداکړئ.

حل: لومړی د لېمیټ بڼه ټاکو:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{3x^2-2}=\frac{\infty-1}{\infty-2}=\frac{\infty}{\infty}$$

څرنګه چې پوښتنه د $\frac{\infty}{\infty}$ شکل لري، نو صورت او مخرج په x^2 باندې وېشو:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{3x^2-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}}{\frac{3x^2}{x^2}-\frac{2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{2}{x^2}}{3-\frac{2}{x^2}}=\frac{1-\frac{1}{\infty}}{3-\frac{2}{\infty}}=\frac{1-0}{3-0}=\frac{1}{3}$$

دويم مثال: د $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2}{x-2}$ پيدا کړئ.

حل:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2}{x-2}=\frac{\infty}{\infty}$$

څرنګه چې پوښتنه د $\frac{\infty}{\infty}$ شکل لري، نو صورت او مخرج د x له ټولو په لوړ توان وېشو:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2}{x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{2}{x^2}}{\frac{x}{x^2}-\frac{2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{2}{x^2}}{\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}=\frac{1-\frac{2}{\infty}}{\frac{1}{\infty}-\frac{2}{\infty}}=\frac{1-0}{0}=\frac{1}{0}=\infty$$

دريم مثال: $\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x^2-2}$ پيدا کړئ.

حل:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x^2-2}=\frac{\infty}{\infty}$$

څرنګه چې پوښتنه $\frac{\infty}{\infty}$ شکل لري، نو صورت او مخرج د x له ټولو په لوړ توان وېشو:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x^2-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x^2}-\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{2}{x^2}}=\frac{\frac{1}{\infty}-\frac{1}{\infty}}{1-\frac{2}{\infty}}=\frac{0}{1-0}=\frac{0}{1}=0$$

يادونه: هغه تابع ګانې چې د $\frac{\infty}{\infty}$ بڼه ولري، پرته له دې چې عمليه پرې سرته ورسوو کولای شو، په لاندې ډول د هغوی لېميټ په لاس راوړو:

د $f(x)=\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+...+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+...+b_n}$ تابع په پام کې ونیسئ که چېرې ($x\to\infty$) کړی وي، نو دلته درې حالتونه ممکن دي:

1- د $m=n$ لپاره د نومورې کسر لیمیټ عبارت دی له $\frac{a_0}{b_0}$.

2- د $m<n$ لپاره د نومورې کسر لیمیټ عبارت له صفر څخه دی.

3- د $m>n$ لپاره د نومورې کسر لیمیټ عبارت له $\pm\infty$ څخه دی.

څلورم مثال: لاندې لیمیټونه پیدا کړئ.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^2+6x^4-x^3+x-1}{-x^4+2x^2-3}$ 2) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{-8+6x^3-x^2+x}{5x^3-x^4+6x-1}$ 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-2}{x+1}$

حل:

1- څرنګه چې $m=n$ دی، نو:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+6x^4-x^3+x-1}{-x^4+2x^2-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{6x^4}{-x^4}=-6$$

2- څرنګه چې $m<n$ دی، نو د نومورې تابع لیمیټ صفر دی.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-8+6x^3-x^2+x}{5x^3-x^4+6x-1}=0$$

3- څرنګه چې $m>n$ دی، نو د نومورې تابع لیمیټ مساوي له ∞ سره دی:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-2}{x+1}=\infty$$

یادونه: زده‌کوونکي دې ورکړل شوي څوابونه په کور کې د عملیې د سرته رسولو څخه وروسته په لاس راوړي.

پوښتنې

لاندې لیمیټونه پیدا کړئ؟

1) $\lim_{x\to\infty}\frac{6}{x^2-x}$

2) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+x^2+x+6}{x^3-3x+4}$

3) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^5+x^2-x+9}{x^4+x^2-x+5}$

4) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x^2-x+7}{x^3-x+5}$

5) $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-2}{x+1}$

III- د $(\infty-\infty)$ او $(0\cdot\infty)$ مبهم شکلونه

د مخامخ لیمیټونو قیمتونه پیدا کړئ.

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{x^2-4}-\frac{x-1}{x^2-4}$$

$$\lim_{x\to 3}(x^2-9)\cdot\frac{2x^3-4}{x-3}$$

- د $a+1$ مزدوج ولیکئ.
- د $\sqrt{x}-1$ مزدوج ولیکئ.
- د $f(x)=\sqrt{x}-\sqrt{x+1}$ لیمیټ پیدا کړئ، کله چې $x\to\infty$ تقرب وکړي.
- د $f(x)=(2x-1)(x+1)$ تابع لیمیټ وټاکئ، کله چې $x\to\infty$ تقرب وکړي.

له پورتني فعالیت څخه پایله داسې بیانوو:

د هغو تابع ګانو چې د $(\infty-\infty)$ او $(0\cdot\infty)$ مبهم شکلونه ولري، د لیمیټ د پیدا کولو لپاره یې د کسرونو له جمع کولو، ضرب او مزدوج څخه ګټه اخلو او هغه داسې ساده کوو، تر څو چې د $\frac{0}{0}$ او یا $\frac{\infty}{\infty}$ بڼه غوره کړي، وروسته یې لیمیټ په لاس راوړو.

مثال: لاندې لیمیټونه پیدا کړئ.

1) $\lim_{x\to 1}(\frac{9}{x-1}-\frac{8x+10}{x^2-1})=?$ 2) $\lim_{x\to 1}(x-1)(\frac{1}{x^2+2x-3})=?$

حل 1:

$$\lim_{x\to 1}(\frac{9}{x-1}-\frac{8x+10}{x^2-1})=\frac{9}{1-1}-\frac{8\cdot 1+10}{1^2-1}=\frac{9}{0}-\frac{18}{0}=\infty-\infty$$

څرنګه چې نوموړی لیمیټ د $(\infty-\infty)$ بڼه لري، نو لیکلای شو چې:

$$=\lim_{x\to 1}\frac{9x+9-8x-10}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1}=\frac{0}{0}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}$$

2) $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)(\frac{1}{x^2+2x-3})=?$

حل2:

$$\lim_{x\to 1}(x-1)(\frac{1}{x^2+2x-3})=(1-1)(\frac{1}{1^2+2-3})=0\cdot\frac{1}{3-3}=0\cdot\frac{1}{0}=0\cdot\infty$$

لیدل کېږي چې نوموړی لیمیټ د $(0\cdot\infty)$ مبهم شکل لري، نو:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2+2x-3}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(x+3)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+3}=\frac{1}{4}$$

پوښتنې

لاندې لیمیټونه پیدا کړئ.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$

2) $\lim\limits_{x\to 1}(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x^2})$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}(x^5-8x^3)$

4) $\lim\limits_{x\to 5}\left[(x^2-25)\frac{1}{x-5}\right]$

5) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x+a}-\sqrt{x})$

د $1^\infty, \infty^0, 0^0$ مبهم شکلونه

د مخامخ لیمیټ مبهم شکل وټاکئ؟

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}} = ?$$

- د $y = x^x$ تابع لیمیټ په هغه صورت کې پیدا کړئ چې $x \to 0$ وکړي.
- د $y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ لیمیټ بېړه په هغه صورت کې وټاکئ چې $x \to \infty$ وکړي.
- د کومې عملیې په مرسته کولای شو چې د $1^\infty, \infty^0, 0^0$ مبهم شکلونو ابهام له منځه ویسو؟

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

که چېرې یوه تابع پورتني مبهم شکلونه ځانته غوره کړي، هغه د طبیعي لوګاریتم په مرسته د $0\cdot\infty$ شکل ته د اړولو وړ دي، یعنې: $\lim_{x\to a}(f(x))^{g(x)} \Rightarrow \ln(\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}) = \lim_{x\to a}(\ln f(x)^{g(x)}) = \lim_{x\to a}[g(x)\ln f(x)]$

یادونه:

I- که چېرې $n \to \infty$ وکړي د $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$ ترادف $e = 2.71828182$ عدد ته تقرب کوي.

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$$

چې په لاندې جدول کې ښکاربږي:

n	$\frac{1}{n}$	$1+\frac{1}{n}$	$(1+\frac{1}{n})^n$
1	1	2	2
2	0.5	1.5	2.25
5	0.2	1.2	2.48832
10	0.1	1.1	2.59374246
100	0.01	1.01	2.704813829
1000	0.001	1.001	2.716923932
10000	0.0001	1.0001	2.718145926
100000	0.00001	1.00001	2.718268237
1000000	0.000001	1.000001	2.718280469
1000000000	10^{-9}	$1+10^{-9}$	2.718281828

نو $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e = 2.718281828$ دی چې ... $e = 2.71$ عدد ته د Euler عدد وایي.

II- لاندې لیمیتونه پیدا کړئ:

1) $\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$ 2) $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{\alpha}{x})^{\beta x} = e^{\alpha\beta}$

3) $\lim_{x\to 0}\frac{Ln(1+x)}{x} = 1$ 4) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1$

ثبوت: پوهېږو چې څلور واړه پوښتنې د 1^∞ مبهم شکلونه لري.

1) $x = \frac{1}{\alpha} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{x}$, $\alpha \to 0 \Rightarrow x \to \infty \Rightarrow \lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = \lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$

2) $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{\alpha}{x})^{\beta x} = e^{\alpha\beta}$

$u = \frac{\alpha}{x} \Rightarrow x = \frac{\alpha}{u}$, $x \to \infty \Rightarrow u \to 0$

$\lim_{u\to 0}(1+u)^{\beta\frac{\alpha}{u}} = \lim_{u\to 0}\left[(1+u)^{\frac{1}{u}}\right]^{\alpha\beta}$

$x = \frac{1}{u} \to u = \frac{1}{x}$, $u \to 0 \Rightarrow x \to \infty$

$\lim_{u\to 0}\left[(1+u)^{\frac{1}{u}}\right]^{\alpha\beta} = \lim_{x\to\infty}\left[(1+\frac{1}{x})^x\right]^{\alpha\beta} = e^{\alpha\beta}$

3) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} \Rightarrow \lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}\ln(1+x)\right] = \lim_{x\to 0}\left[\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]$

$\ln\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]$, $x = \frac{1}{u} \Rightarrow u = \frac{1}{x}$, $x \to 0 \Rightarrow u \to \infty$

$\ln\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right] = \ln\left[\lim_{u\to\infty}(1+\frac{1}{u})^u\right] = \ln e = 1$

4) $y = e^x - 1 \quad \Rightarrow \; e^x = 1 + y \quad \Rightarrow \; x = \ln(1+y)$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)} = \lim_{y\to 0}\frac{1}{\frac{\ln(1+y)}{y}} = \frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y}}$$

$$= \frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\frac{1}{y}\ln(1+y)} = \frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\ln(1+y)^{\frac{1}{y}}} \;,\; y = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{y} \;,\; y \to 0 \Rightarrow x \to \infty$$

$$= \frac{1}{\ln \lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x} = \frac{1}{\ln e} = \frac{1}{1} = 1$$

د 1^∞ مبهم شکل عمومي حالت: **که چېرې د اکسپوننشیل تابع لیمیټ یعنې** $\lim\limits_{x\to a}[u(x)]^{v(x)}$ د 1^∞ مبهم شکل ځانته غوره کړي په دې حالت کې $\alpha = u-1$ سره تعویضوو، په نتیجه کې:

$$\lim_{x\to a} u^v = \lim_{x\to a}[(1+u-1)]^{\frac{v}{u-1}u-1} = \lim_{x\to a}\left[(1+\alpha)^{\frac{v}{\alpha}\alpha}\right] = \lim_{x\to a}\left[(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{\lim\limits_{x\to a}(v\alpha)}$$

څرنگه چې $\alpha = u-1$ دی که چېرې $u \to 1$ نو $\alpha \to 0$ **ته نژدې کېږي په پایله کې :**

$$\lim_{x\to a}[u(x)]^{v(x)} = \left[\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{\lim\limits_{x\to a}[v(u-1)]} = e^{\lim\limits_{x\to a}[v(u-1)]} = e^P$$

$$\lim_{x\to a}[u(x)]^{v(x)} = e^P \quad , \quad P = \lim_{x\to a}[v(u-1)]$$

لومړی مثال: د $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{2}{x})^x$ لیمیټ قیمت په لاس راوړئ.

حل: لومړی د لیمیټ بڼه ټاکو معلومېږي چې لیمیټ د 1^∞مبهم شکل لري، نو له فورمول څخه کار اخلو:

$$u = 1 + \frac{2}{x} \quad , \quad v = x$$

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{2}{x})^x = e^P \quad , \quad P = \lim_{x\to\infty}\left[x(1+\frac{2}{x}-1)\right] = 2$$

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{2}{x})^x = e^P = e^2$$

دویم مثال: د $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{\frac{x-5}{2}}$ **قیمت محاسبه کړئ.**

حل:**لومړی د لیمیټ بڼه ټاکو** $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{\frac{x-5}{2}} = 1^\infty$

څرنګه چې معلومېږي نوموړی لیمیټ د 1^∞ مبهم شکل لري، نو له فورمول څخه کار اخلو:

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{\frac{x-5}{2}}=e^P$$

$$u=1+\frac{1}{x}\quad,\quad v=\frac{x-5}{2}$$

$$P=\lim_{x\to a}[v(u-1)]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x-5}{2}(1+\frac{1}{x}-1)\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x-5}{2}(\frac{1}{x})\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x-5}{2x}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{\frac{x-5}{2}}=e^P=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$$

دریم مثال: $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}=?$

حل: د تېر په شان بیاهم لومړی د لیمیټ بڼه ټاکو، $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}=1^\infty$

څرنګه چې معلومېږي لیمیټ د 1^∞ مبهم شکل لري د فورمول په مرسته یې محاسبه کوو:

$$u=\cos x\quad,\quad v=\frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}=e^P$$

$$P=\lim_{x\to a}[v(u-1)]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}(\cos x-1)\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\cos x-1)(\cos x+1)}{x(\cos x+1)}$$

$$\frac{\cos^2 x+\cos x-\cos x-1}{x(\cos x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-\sin^2 x-\cos^2 x}{x(\cos x+1)}$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x+1}=-1\cdot\frac{0}{2}=0$$

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}=e^P=e^0=1$$

پوښتنې

لاندې لیمیټونه محاسبه کړئ.

1) $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{x+2}$

2) $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\ln x}$

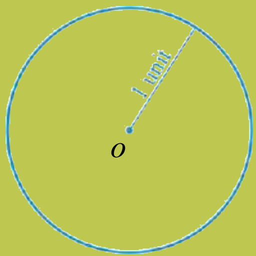
3) $\lim_{x\to\infty}(\frac{x+3}{x-1})^{x+2}$

4) $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{n^2})^{n^2}$

5) $\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x}}$

د مثلثاتي تابع ګانو لیمیټ

Trigonometric functions limits



که د يوې دايرې شعاع يو واحد (1unit) وي، نوموړې دايرې ته څه ډول دايره وايي.

- دوضعيه کمياتو په سيستم کې د $C(o,r)$ په مثلثاتي دايره کې د θ مرکزي زاويه رسم کړئ.
- د C له بهرني ټکي څخه په دايره باندې د ox پر محور د $\overline{CA}$ مماس او $\overline{MB}$ عمود رسم کړئ.
- د C ټکی د دايرې له مرکز سره وصل کړئ.
- د مرکزي زاويې د مقابل قوس د اندازه کولو واحد په ګوته کړئ.

له پورتني فعاليت څخه قضيه داسې بيان او ثبوتوو:

قضيه: د يوې زاويې د ساين او د هغې زاويې د نسبت لیمیټ مساوي په (1) دي، کله چې زاويه صفر ته تقرب وکړي.

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$$

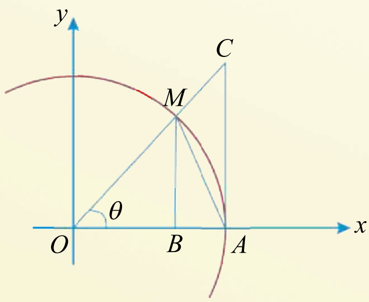
ثبوت: په لاندې شکل کې د MOA او COA د مثلثونو او OMA د قطاع مساحتونه په لاس راوړو:

$$\text{مثلث مساحت } MOA \text{ د} = \frac{1}{2}\cdot\overline{OA}\cdot\overline{BM}=\frac{1}{2}\cdot r\cdot\overline{BM}=\frac{\overline{BM}}{2}\cdot r$$

$$\text{قطاع مساحت } O\overset{\frown}{A}M \text{ د} = \frac{1}{2}\theta r^2$$

د θ د زاويې پراخوالی بايد په راديان لاسته راوړو.

$$\text{مساحت } C\overset{\Delta}{O}A \text{ د} = \frac{1}{2}\cdot\overline{OA}\cdot\overline{AC}=\frac{1}{2}\cdot r\cdot\overline{AC}=\frac{\overline{AC}}{2}\cdot r$$



د MOA او COA مثلثونو مساحتونه د OMA د قطاع له مساحت سره پرتله کوو:

$$\frac{1}{2}r\,\overline{BM}<\frac{1}{2}\theta r^2<\frac{\overline{AC}}{2}\cdot r$$

د نامساواتو دواړه خواوې په $\frac{2}{r^2}$ کې ضربوو:

$$\frac{\overline{BM}}{r} < \theta < \frac{\overline{AC}}{r} \Rightarrow \sin\theta < \theta < \tan\theta \Rightarrow 1 < \frac{\theta}{\sin\theta} < \frac{1}{\cos\theta}$$

$$\Rightarrow \cos\theta < \frac{\sin\theta}{\theta} < 1 \Rightarrow \lim_{\theta\to 0}\cos\theta \le \lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} \le \lim_{\theta\to 0} 1$$

د ساندوېچ د قضيې پر بنسټ معلومېږي چې $\lim_{\theta\to 0}\cos\theta = 1$ او همدارنګه $\lim_{\theta\to 0} 1 = 1$ دی، نو $\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$ دی.

پوهېږو چې د هرې زاويې ساین د (1) او (-1) د عددونو تر منځ تحول کوي:

$$-1 \le \sin\theta \le 1$$

$$-\frac{1}{\theta} \le \frac{\sin\theta}{\theta} \le \frac{1}{\theta}$$

$$-\lim_{\theta\to\infty}\frac{1}{\theta} \le \lim_{\theta\to\infty}\frac{\sin\theta}{\theta} \le \lim_{\theta\to\infty}\frac{1}{\theta}$$

د ساندوېچ د قضيې پر اساس ليکلای شو چې:

$$\left.\begin{aligned} -\lim_{\theta\to\infty}\frac{1}{\theta} = 0 \\ \lim_{\theta\to\infty}\frac{1}{\theta} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_{\theta\to\infty}\frac{\sin\theta}{\theta} = 0$$

په پايله کې ويلای شو چې د يوې زاويې ساين او د هغې زاويې د نسبت لېمېټ مساوي په صفر دی هغه وخت چې زاويه بې‌نهايت ته نژدې شي.

لومړی مثال: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}$ پيدا کړئ.

حل: که $2x = \alpha$ نو $x = \frac{\alpha}{2}$ کېږي، څرنګه چې $x \to 0$ کړی دی، نو $\alpha \to 0$ کوي، نو ليکلای شو:

$$\frac{\sin\alpha}{\frac{\alpha}{2}} = 2\frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

له پورته مساواتو څخه لاس ته راځي:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x} = \lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow 2\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha} = 2\cdot 1 = 2$$

دویم مثال: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5\tan 2x}{7x}$ حل کړئ.

حل:

$$\frac{5\tan 2x}{7x}=\frac{5\dfrac{\sin 2x}{\cos 2x}}{7x}=\frac{5\sin 2x}{7x\cos 2x}=\frac{5\cdot 2x\dfrac{\sin 2x}{2x}}{7x\cos 2x}=\frac{10\dfrac{\sin 2x}{2x}}{7\cos 2x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{5\tan 2x}{7x}=\frac{10}{7}\frac{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{2x}}{\lim\limits_{x\to 0}\cos 2x}=\frac{10}{7}$$

دریم مثال: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x}$ حل کړئ.

حل: پوهیږو چې $1-\cos 2x=2\sin^2 x$ سره دی، نو:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x}$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\sin x=2\cdot 1\cdot 0=0$$

خلورم مثال: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 3x}{\sin 5x}$ پیدا کړئ:

حل:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{\sin 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin 3x}{\cos 3x}}{\sin 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{3x\dfrac{\sin 3x}{3x}}{\cos 3x}}{5x\dfrac{\sin 5x}{5x}}=\frac{3x}{5x}\frac{\dfrac{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3x}}{\lim\limits_{x\to 0}\cos 3x}}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{5x}}=\frac{3}{5}\frac{\dfrac{1}{1}}{1}=\frac{3}{5}$$

پنځم مثال: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 4x-\cos 6x}{x^2}$ په لاس راوړئ.

حل:پوهیږو چې $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ نو:

$$\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin\dfrac{4x+6x}{2}\sin\dfrac{4x-6x}{2}}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin 5x\sin(-x)}{x^2}=-2\lim_{x\to 0}\frac{5\sin 5x}{5x}\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{x}$$

که $5x = y$ سره وي، او $x \to 0$ نو $y \to 0$ کوي، نو:

$$= 10\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 10\cdot 1\cdot 1 = 10$$

پوښتنې

لاندې لیمیټونه محاسبه کړئ.

1) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x+\frac{\pi}{6})}{x+\frac{\pi}{6}}$ 2) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x}$ 3) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\tan^2 x}$

4) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x}$ 5) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{\sin 3x}$ 6) $\lim_{x\to 0}\sin 5x\cos 3x$

7) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan(2x-1)}{4x^2-1}$ 8) $\lim_{x\to 0}\sqrt{\cos 2x - \cos x + 1}$ 9) $\lim_{x\to 1}(\cos^2 x + \sin^2 x)$

د تابع گانو متمادیت

Continuity of functions

شکلونو ته پام وکړئ.

لومړی او دویم پلونه یو له بل څخه څه توپیر لري، خپل نظر بیان کړئ.

د تابع گانو گرافونه مختلف شکلونه لري چې ځینې یې په یوه قلم پرته له دې چې د قلم څوکه له کاغذ څخه پورته شي رسمېږي، متصلې یا متمادي تابع گانې بلل کېږي او ځینې یې په یوه قلم نه شي رسمېدلای یعنې د رسم په وخت کې باید د قلم څوکه یو ځل یا څو ځلې د کاغذ څخه پورته شي، څکه په یوه برخه کې یې گراف غوڅ وي، دغه ډول تابع گانې په نوموړی ټکي کې غیر متصلې یا غیر متمادي تابع گانې بلل کېږي.

فعالیت

- د $f(x) = x^2 + 4x$ تابع گراف رسم کړئ.
- د $f(x)$ د تابع لېمیټ د $x = 1$ په نقطه کې پیدا کړئ.
- د $f(x)$ د تابع قیمت د $x = 1$ په نقطه کې پیدا او وروسته دواړه اړیکې سره پرتله کړئ.

له پاسني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

پایله: د $y = f(x)$ تابع د $x = a$ په ټکي کې متمادي بلله کېږي چې لاندې شرطونه په کې صدق وکړي.

1- د $f(x)$ تابع د a په ټکي کې تعریف شوي وي.

2- راکړل شوي تابع د a په ټکي کې لېمیټ ولري.

3- د $f(a)$ قیمت باید د $f(x)$ له لېمیټ سره مساوي وي: $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

لومړی مثال: وښیئ چې د $f(x)=x^2+2x-1$ تابع د $x_0=2$ په ټکي کې متمادي ده.

حل: څرنګه چې د تابع د تعریف ساحه ټول حقیقي عددونه دي، نو د متمادیت له شرطونو څخه لیکلای شو:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ 2\in Dom\ f(x)=IR \\ 2)\ \lim\limits_{x\to 2}(x^2+2x-1)=4+4-1=7 \\ 3)\ f(2)=2^2+4-1=7 \end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to 2}f(x)=f(2)=7$$

څرنګه چې د متمادیت درې واړه شرطونه په کې حقیقت لري، بناءً تابع متمادي ده.

دویم مثال: د $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+1}$ د تابع متمادیت د $x_0=-1$ په ټکي کې وڅېړئ.

حل: د $f(x)$ د تابع د تعریف ساحه عبارت ده، له: $IR\setminus\{-1\}$

او $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x-1}{x+1}=\dfrac{-3}{0}=\infty$ سره دی.

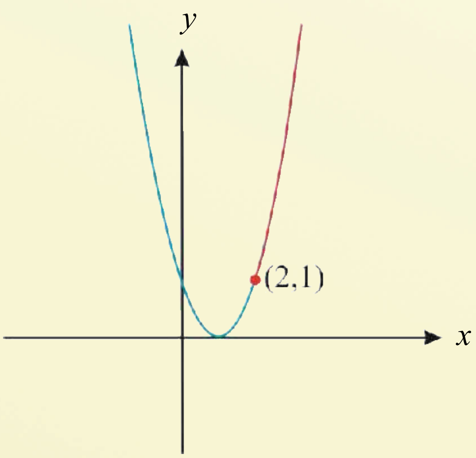
څرنګه چې لیدل کېږي -1 د تابع د تعریف په ساحه کې شامل نه دی، بناءً نوموړی تابع د -1 په ټکي کې متمادي نه ده.

دریم مثال: د $f(x)=\begin{cases} x^2-2x+1 & ; x<2 \\ x^2-3 & ; x\geq 2 \end{cases}$ د تابع متمادیت د $x=2$ په ټکي کې وڅېړئ.

حل: لومړی د تابع د ښي او کیڼې خوا لېمیټونه څېړو:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(x^2-3)=1 \\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(x^2-2x+1)=1 \end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^-} f(x)\quad\Rightarrow \lim_{x\to 2}f(x)=f(2)$$

په پایله کې ویلای شو چې تابع په نوموړي ټکي کې متمادي ده، لکه چې په شکل کې لیدل کېږي.



ځلورم مثال: که $f(x)=\begin{cases}2x+1 & ; x\ge 1\\ 1-x & ; x<1\end{cases}$ وي، نو د $x=1$ په ټکي کې د تابع متمادیت وڅېړئ.

حل:

$$\lim_{x\to 1} f(x)=1-x=0 \left.\begin{matrix}\\ \end{matrix}\right\} \quad f(1)=0 \quad \left.\begin{matrix}\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+} 2x+1=3\\ \lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-} 1-x=0\end{matrix}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 1^+} f(x)\neq \lim_{x\to 1^-} f(x)$$

نو تابع په $x=1$ کې غیر متمادي ده.

پایله: که چېرې د $g(x)$ تابع د $x=a$ په ټکي کې $f(x)$ په $x=g(a)$ کې متمادي وي، نو $f(g(x))$ په $x=a$ کې هم متمادي ده، یعنې:

$$\lim_{x\to a} f(g(x))=f(\lim_{x\to a} g(x))=f(g(a))$$

1) $\lim_{x\to a}(f(x))^{\alpha}=(\lim_{x\to a} f(x))^{\alpha} \quad , \quad \alpha\in IR$

2) $\lim_{x\to a} a^{f(x)}=a^{\lim_{x\to a} f(x)}$

3) $\lim_{x\to a}\log_a f(x)=\log_a(\lim_{x\to a} f(x))$

4) $\lim_{x\to a}\sin f(x)=\sin(\lim_{x\to a} f(x))$

پنځم مثال: که $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x+3}$ وي او $x\neq -3$ وي.

آیا د $f(x)$ تابع د $x=-3$ په ټکي کې متمادي ده؟

حل: څرنگه چې تابع د $x=-3$ په نقطه کې نه ده تعریف شوې یا په بل عبارت د -3 عدد د تابع د تعریف په ساحه کې نه دی شامل، نوله دې امله تابع د $x=-3$ په ټکي کې متمادي نه ده.

غیر متمادیت: که چېرې د $f(x)$ تابع په $x=a$ کې یو له لاندې درې شرطونو څخه و نه لري وایو چې په f په a کې غیر متمادي ده او a یې د انفصال ټکی دی. انفصال په درې ډوله دی.

لومړی ډول: د f تابع د a په ټکي کې د ښي او کیڼ لوري لیمیټونه ولري، خو مساوي نه وي.

دویم ډول: کم تر کمه یو له دوو لیمیټونو(د ښي او کیڼ لوري لیمیټونه) څخه موجود نه وي.

دریم ډول: که چېرې تابع د a په ټکي کې لیمیټ ولري، خو a د f د تعریف په ساحه کې شامل نه وي.(یوازې یو خالي ټکی وي.)

پوښتنې

په ورکړ شویو ټکو کې د تابع متمادیت وڅیړئ.

$a)\ f(x)=x^2+5(x-2)^7 \quad ; \quad x=3$

$b)\ f(x)=\dfrac{x+3}{(x^2+2x-5)} \quad ; \quad x=-1$

$c)\ h(x)=\dfrac{\sqrt{8-x^2}}{2x^2-5} \quad ; \quad x=-2$

$d)\ f(x)=\dfrac{1}{(x-3)^3} \quad ; \quad x=3$

$e)\ f(x)=|x-3| \quad ; \quad x=3$

$f)\ g(x)=\dfrac{|x|}{x} \quad ; \quad x=0$

$$g)\ f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3+x}{x} & ; \quad x\neq 0 \\ 3 & ; \quad x=2 \end{cases}$$

$h)\ f(x)=\dfrac{x^2-9}{x+3} \quad ; \quad x=2$

د متمادي تابع‌گانو خاصیتونه

د مخامخ مساواتو په اړه سوچ وکړئ چې حقیقت لري او که نه؟

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$$
$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$
$$(f \div g)(x) = f(x) \div g(x) \quad , \; g(x) \neq 0$$

- که $f(x) = x^2 - 1$ وي د تابع متمادیت وڅېړئ.
- که $g(x) = x + 3$ وي د تابع متمادیت وڅېړئ.
- د $f(x) + g(x)$ د تابع‌گانو متمادیت وڅېړئ.

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

پایله: که د $f(x)$ او $g(x)$ تابع‌گانې د $x = c$ په ټکي کې متمادي وي، نو له لاندې تابع‌گانو څخه یې هره یوه په $x = c$ یا یوه انټروال کې متمادي ده.

1- د تابع‌گانو جمع $\quad f(x) + g(x)$

2- د تابع‌گانو تفریق $\quad f(x) - g(x)$

3- د تابع‌گانو ضرب $\quad f(x) \cdot g(x)$

4- د تابع‌گانو تقسیم $\quad \dfrac{f(x)}{g(x)} \; ; \; g(x) \neq 0$

لومړۍ بېلگه: **که** $f(x) = x^2 + 3$ **او** $g(x) = x^2 + 3x - 2$ **وي، نو:**

1- f او g د $x = 1$ په ټکي کې متمادي دي او که نه؟

2- وڅېړئ چې:

الف) $f(x) + g(x) = (f + g)(x)$ وي.

ب) $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ د $x = 1$ په نقطه کې متمادي ده او که غير متمادي.

حل:لومړی هره يوه تابع بېلابېله څېړو چې متمادي ده که نه؟

1) $Df(x) = IR$

2) $\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1}(x^2 + 3) = 4$

3) $f(1) = (1^2 + 3) = 4$

نو د f **تابع د** $x = 1$ په نقطه کې متمادي ده.

1) $D\,g(x) = IR$

2) $\lim_{x \to 1} g(x) = \lim_{x \to 1}(x^2 + 3x - 2) = 1^2 + 3 \cdot 1 - 2 = 2$

3) $g(1) = (1^2 + 3 \cdot 1 - 2) = 2$

په همدې شان د g تابع د $x = 1$ په ټکي کې هم متمادي ده.

2- اوس د تابع گانو د جمعې او ضرب د حاصل متماديت څېړو:

الف)

$f(x) + g(x) = x^2 + 3 + x^2 + 3x - 2 = 2x^2 + 3x + 1$

1) $D(f(x) + g(x)) = IR$

2) $\lim_{x \to 1}[f(x) + g(x)] = \lim_{x \to 1}(2x^2 + 3x + 1) = 6$

3) $f(1) + g(1) = (1 + 3 + 1 + 3 - 2) = 6$

$\lim_{x \to 1}[f(x) + g(x)] = f(1) + g(1) = 6$

$(f + g)(x) = x^2 + 3 + x^2 + 3x - 2 = 2x^2 + 3x + 1$

1) $D[(f + g)(x)] = IR$

2) $\lim_{x \to 1}[(f + g)(x)] = \lim_{x \to 1}[2x^2 + 3x + 1] = 6$

3) $(f + g)(1) = (2x^2 + 3x + 1)(1) = 6$

$\lim_{x \to 1}[(f + g)(x)] = (f + g)(1) = 6$

په پايله کې د متمادي تابع گانو د جمعې حاصل د $x = 1$ په نقطه کې متمادي دی.

ب)

$$f(x)\cdot g(x)=(x^2+3)(x^2+3x-2)=x^4+3x^3+x^2+9x-6$$

1) $D(f\cdot g)(x)=IR$

2) $(f\cdot g)_{(1)}=1^4+3\cdot 1^3+1^2+9\cdot 1-6=8$

3) $\lim\limits_{x\to 1}(f\cdot g)(x)=8$

$\lim\limits_{x\to 1}(f\cdot g)(x)=(f\cdot g)(1)=8$

په پايله کې د متمادي تابع گانو د ضرب حاصل د $x=1$ په نقطه کې متمادي ده.

دويمه بېلگه: که $g(x)=3x-2$ او $f(x)=x+1$ وي، وښيئ چې آيا $f(x)\cdot g(x)$ د $x=2$ په نقطه کې متمادي ده؟

حل:

1) $Df(x)=IR$

2) $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\lim\limits_{x\to 2}(x+1)=3$

3) $f(2)=x+1=3$

$\lim\limits_{x\to 2}f(x)=f(2)=3$

1) $Dg(x)=IR$

2) $\lim\limits_{x\to 2}g(x)=3x-2=3\cdot 2-2=4$

3) $g(2)=3x-2=3\cdot 2-2=4$

$\lim\limits_{x\to 2}g(x)=g(2)=4$

$$f(x)\cdot g(x)=(x+1)(3x-2)=3x^2-2x+3x-2=3x^2+x-2$$

$D(f\cdot g)(x)=IR$

$\lim\limits_{x\to 2}[f(x)\cdot g(x)]=3(4)+2-2=12$

$(f\cdot g)(2)=3(4)+2-2=12$

$\lim\limits_{x\to 2}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=(f\cdot g)(2)=12$

په پايله کې لاس ته راځي چې $f(x)\cdot g(x)$ د $x=2$ په ټکي کې متمادي ده.

پوښتنې

1- وښيئ چې لاندې تابع ګانې په ورکړ شويو نقطو کې متمادي دي او که نه؟

1) $f(x)=x^3-2(x+1)^5 \quad ; \quad x=2$

2) $g(x)=\dfrac{x^2+3}{(x^2-x+5)(x^2+2x)} \quad ; \quad x=-1$

3) $h(x)=\dfrac{x\sqrt{x}+1}{(x+2)^3} \quad ; \quad x=4$

2- تشريح کړئ چې ولې د $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{2}}{x}$ تابع په $x=0$ کې غيرمتمادي ده.

د متحول تقرب: ویل کېږي چې د x متحول د a عدد ته تقرب کوي، په داسې حال کې چې x په اختیاري ډول د a عدد ته نژدې کېږي، یعنې د x او a ترمنځ تفاوت له هرکوچني عدد($\delta > 0$) څخه کوچني دی یا په لاندې ډول:

$$\forall \delta > 0 : |x-a| < \delta \quad \text{یا} \quad x \to a \quad \text{یا} \quad |x-a| \to 0$$

له ښي لوري د متحول تقرب: ($x \to a^{+}$) که چېرې د x د قیمتونو یو متناقص ترادف موجود وي، په داسې حال کې چې په تدریجي ډول د a اختیاري عدد ته نژدې شي.

$$x:\ a+0.1,\ a+0.01\ ,\ a+0.001\ ,\ a+0.0001\ ,\ \ldots \to a^{+}$$

له کیڼ لوري د متحول تقرب: ($x \to a^{-}$) که چېرې د x د قیمتونو یو متزاید ترادف موجود وي، په داسې حال کې چې x په تدریجي ډول د a اختیاري عدد ته نژدې شي.

$$x:\ a-0.1,\ a-0.01\ ,\ a-0.001\ ,\ a-0.0001\ ,\ \ldots \to a^{-}$$

نو د x د متحول تقرب د a عدد ته معادل دی د x د متحول تقرب له ښي لوري او د x د متحول تقرب له چپ لوري؛ یعنې:

$$x \to a \iff (x \to a^{+}\ ,\ x \to a^{-})$$

تعریف: که چېرې د $f(x)$ تابع په یوه غیر تړلي انټروال کې چې د a عدد په هغې کې شامل وي کېدای شي چې تابع په a کې نه وي تعریف شوی. که چېرې د x متحول د a عدد ته نژدې شي، نو د $f(x)$ تابع د l عدد ته نژدې کېږي، نو ویل کېږي چې د $f(x)$ د تابع لیمیټ عبارت له l څخه دی، کله چې د x متحول د a عدد ته تقرب وکړي، نو داسې یې لیکو:

$$\lim_{x \to a} f(x) = l \quad \text{یا} \quad \begin{matrix} x \to a \\ f(x) \to l \end{matrix}$$

د لیمیټ ځانګړتیاوې: که f او g دوې تابع ګانې وي، C,L او M حقیقي عددونه وي، داسې چې $\lim_{x \to c} f(x) = L$ او $\lim_{x \to c} g(x) = M$، نو لاندې رابطې لیکلای شو:

1) $$\lim_{x \to c}(f(x)+g(x)) = \lim_{x \to c} f(x) + \lim_{x \to c} g(x) = L + M$$

2) $$\lim_{x \to c}(f(x)-g(x)) = \lim_{x \to c} f(x) - \lim_{x \to c} g(x) = L - M$$

3) $$\lim_{x \to c}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x \to c} f(x) \cdot \lim_{x \to c} g(x) = L \cdot M$$

4) $$\lim_{x \to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to c} f(x)}{\lim_{x \to c} g(x)} = \frac{L}{M}\ ,\quad M \neq 0\quad ,\quad g(x) \neq 0$$

5) $$\lim_{x \to c}\sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim_{x \to c} f(x)} = \sqrt{L}$$

بې نهايت کوچنی تابع ګانې: د $\varepsilon(x)$ تابع کله چې $x \to a$ ته نژدې شي، بې نهايت کوچنی بللې کېږي، کـه چېرې $\lim_{x\to a}\varepsilon(x)=0$ وي.

د ساندوېچ قضيه: که چېرې د $g(x), f(x)$ او $h(x)$ تابع ګانې د هر x لپاره په يوه غير تړلي انټروال کې چې د a عدد په کې شامل دی(ولو که $x \neq a$) او $f(x) \le g(x) \le h(x)$ شرط صدق وکړي پـه هغه صـورت کـې چې $\lim_{x\to a} f(x) = b = \lim_{x\to a} h(x)$ وي، نو $\lim_{x\to a} g(x) = b$ دی.

- که چېرې يوه تابع د $\frac{0}{0}$ مبهمه بڼه ولري، د لېمېټ د پيداکولو لپاره يې لومړی تابع د تجزيې په مرسته ساده کـوو او بيا يې لېمېټ په لاس راوړو.
- $f(x) = \frac{a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ ...\ + a_m}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ ...\ + b_n}$ د تابع د لېمېټ د پيداکولو لپاره چې $x \to \infty$ وکـړي، عبـارت دی له:

  1. د $m = n$ لپاره د نوموړي کسر ليميټ عبارت دی له $\frac{a_0}{b_0}$
  2. د $m < n$ لپاره د نوموړي کسر ليميټ عبارت له صفر څخه دی.
  3. د $m > n$ لپاره د نوموړي کسر ليميټ عبارت دی له $\pm\infty$

- د هغو تابع ګانو چې $(\infty - \infty)$ او $(0 \cdot \infty)$ بڼه ولري د لېمېـټ د پيـداکولـو لپـاره يـې د کـسرونو د جمعې، ضرب او مزدوج څخه ګټه اخلو، تر څو د $\frac{0}{0}$ يا $\frac{\infty}{\infty}$ بڼه غوره کړي چې وروسته يې لېمېټ په لاس راوړو.
- هغـــه تـــابع ګـــانې چـــې د 1^∞ مـــبهم شـــکلونه لـــري لـــه دې فورمـــول څخـــه $P = \lim_{x\to a}[v(u-1)] \quad , \quad \lim_{x\to a}[u(x)]^{v(x)} \overset{1^\infty}{=} e^P$ يې د لېمېټ د پيداکولو لپاره کار اخلو.
- لاندې رابطه کله چې $\theta \to 0$ وکړي همېشه سمه ده.

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

- د $y = f(x)$ تابع د $x = a$ په ټکی کې متمادي بلل کېږي، کله چې:

  1. a د $f(x)$ د تابع په دومين کې شامل وي.
  2. راکړل شوی تابع د a په نقطه کې لېمېټ ولري.
  3. $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

د لومړي څپرکي پوښتنې

لاندې پوښتنو ته څلور ځوابونه ورکړل شوي دي، سم ځواب يې په نښه کړي.

-1 $\lim_{x\to 0}\frac{3x-\sin x}{x}$

a) 2 b) -2 c) 1 d) 3

-2 $\lim_{x\to -2}\frac{x^2-x-6}{x^2+x-2}$

a) $-\frac{5}{3}$ b) $\frac{5}{3}$ c) 0 d) 1

-3 $\lim_{x\to 1.4}(2x+0.3)$

a) 1 b) 3 c) 0 d) هيڅ يو

-4 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\tan 2x}$

a) 1 b) 0 c) $\frac{3}{2}$ d) $\frac{2}{3}$

-5 $\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$

a) $2+\sqrt{2}$ b) 2 c) $\sqrt{2}$ d) 4

-6 $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{1+\cos 2x}$

a) 1 b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{4}$ d) 4

-7 لاندې لېميټونه پيدا کړئ.

1) $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-2x+5}{2x^2+1}$

2) $\lim_{x\to -1}\sqrt{3+x}$

3) $\lim_{x\to +\infty}\frac{6}{x^2-7}$

4) $\lim_{x\to \infty}\frac{x^4+x^2+x+6}{x^3-3x+4}$

5) $\lim_{x\to \infty}\frac{3x^2-2}{x+1}$

6) $\lim_{x\to 2}\frac{x^3+5x-18}{x^2+3x-10}$

7) $\lim_{x\to 2}\frac{x^3-2x-4}{x-\sqrt{3x-2}}$

8) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x-10}$

9) $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan x}$

10) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x\cos x}$

11) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+3x-10}{x^2-x-2}$

12) $\lim\limits_{x\to -2}(\dfrac{x+3}{x+2}+\dfrac{2}{x^2+2x})$

13) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(a+x)+\sin(a-x)}{\tan(a+x)+\tan(a-x)}$

14) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2}{2x^2-1}-\dfrac{x^2}{2x+2}$

15) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x\sin x-\tan x}{x^2\sin x}$

16) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 3x+\sin^2 x}{a\,x^2}$

17) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin 2x\sin x+\sin^2 x}{x^2}$

18) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin 2x}{x+\sin 3x}$

19) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2\sin 3x\sin 2x}{x\tan 3x}$

20) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{x+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$

21) $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\sin 3(\pi+u)}{\sin 8(\pi+u)}$

22) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^2}{\sin\pi x}$

23) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-x+3}{x^2-8x+5}$

24) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x+4}{4x+\sqrt{x}}$

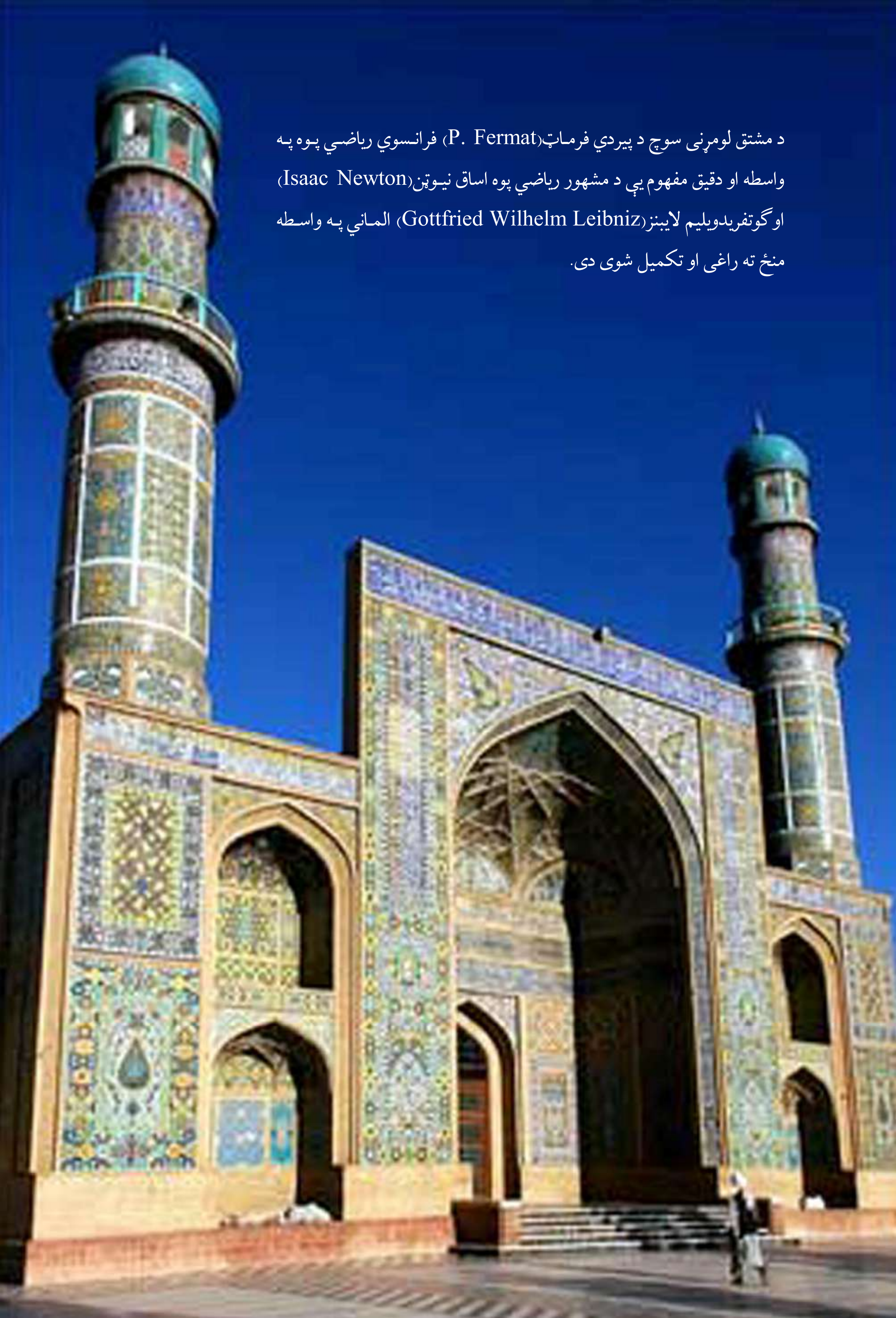
25) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{9x^2-x+5}{\sqrt{9x^4+1}}$

26) $\lim\limits_{x\to 1}(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1}{1-x^2})$

دویم څپرکی

مشتق

د مشتق لومړنی سوچ د پیردي فرماټ(P. Fermat) فرانسوي ریاضي پوه په واسطه او دقیق مفهوم یې د مشهور ریاضي پوه اساق نیوټن(Isaac Newton) او گوتفریدویلیم لایبنز(Gottfried Wilhelm Leibniz) الماني په واسطه منځ ته راغی او تکمیل شوی دی.



مشتقات

Derivatives

د $f(x)=x^2-1$ تابع په پام کې ونیسئ د مخامخ کسر لیمیټ پیدا کړئ.

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=?$$

د یوې منحني میل

- که د یوه مستقیم خط دوه ټکې $A(x_1,y_1)$ او $B(x_2,y_2)$ معلوم وي، نو د دې مستقیم خط میل له کومې رابطې څخه په لاس راځي.
- آیا د یوه مستقیم خط میل ثابت او مساوي دي؟ که په یوه ځانګړې ټکي پورې اړه لري؟
- آیا د مستقیم خط میل د هغې زاویې سره اړه لري چې مستقیم خط یې د x د محور له مثبت لورې سره جوړوي؟
- آیا د مستقیم خط او منحني میلونه یو شان پیدا کېږي؟

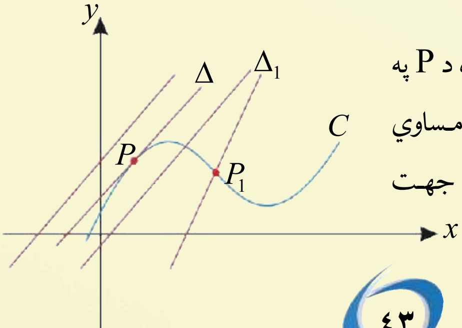
له پورتنیو پوښتنو څخه ښکارېږي چې د منحني میل په اسانۍ سره نشو پیدا کولای، ځکه چې منحني خط په هر ټکي کې خپل مسیر ته بدلون ورکوي او په مختلفو ټکو کې بېلابېل میلونه لري، نو له دې کبله لومړی د یوه منحني خط میل د هغه په یوه ټکي کې تعریفوو او بیا یې د محاسبې لپاره یو فورمول په لاس راوړو.

فعالیت

- د وضعیه کمیاتو په مستوي کې د c منحني خط رسم او د P او P_1 دوه ټکي پرې وټاکئ.
- د P_1 په ټکي کې د Δ_1 قاطع او د p په ټکي کې د Δ مماس رسم کړئ.
- که د P_1 ټکی د C په منحني باندې داسې حرکت وکړي چې د p ټکي ته نژدې شي، په پایله کې د Δ_1 مستقیم خط له Δ مستقیم خط سره څه اړیکه پیدا کوي؟

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

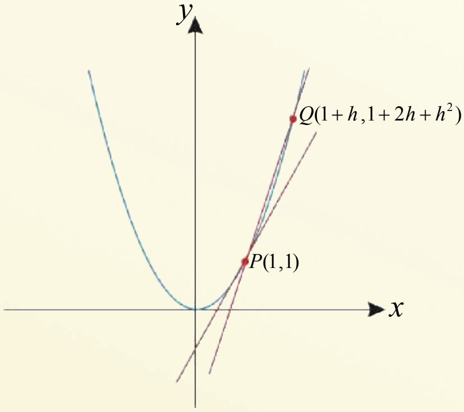
د Δ د مستقیم خط میل چې د C له منحني سره د P په نقطه کې مماس دی د هغې زاویې له (tan) سره مساوي دی چې مستقیم خط یې د x د محور له مثبت جهت سره جوړوي.



لومړی مثال: د $y = f(x) = x^2$ له منحني سره د مماس میل د $P(1,1)$ په ټکي کې پیدا کړئ.

حل: څرنګه چې د منحني میل د مماس له میل سره د P په ټکي کې برابر دي، نو ددې مماس میل له هغه فورمول څخه چې دوې نقطې یې معلومې وي، نشو پیدا کولای، ځکه دلته یوازې د یوې نقطې مختصات ورکړل شوي دي. ولې کولای شو د دې مماس د میل تخمیني قیمت د هغه قاطع خط له میل څخه چې د P او Q له ټکو څخه تېرېږي، پیدا کړو، په هغه صورت کې چې د Q ټکی د P ټکي ته نژدې شي د PQ د مماس میل 2 ته تقرب کوي چې په لاندې جدول کې لیدل کېږي.

x	2	1.5	1.1	1.01	1.001
y	4	2.25	1.21	1.0201	1.002001
$m_{PQ} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	3	2.5	2.1	2.01	2.001



په عمومي ډول هغه لومړی مختصه چې د $P(1,1)$ ټکي ته نژدې ده په $1+h$ ښودلای شو چې h یو کوچنی مثبت یا منفي عدد دی، خو $h \neq 0$ دی نو لیکلای شو:

$$f(1+h) = (1+h)^2 = 1 + 2h + h^2$$

نو دا $(1+h \;,\; 1+2h+h^2)$ ټکی د منحني پر مخ راکړل شوی پروت دی، نو په پایله کې هغه مستقیم خط چې له $P(1,1)$ او $Q(1+h, 1+2h+h^2)$ له ټکو څخه تیرېږي، میل یې عبارت دی له:

$$m_{PQ} \frac{(1+2h+h^2)-1}{(1+h)-1} = \frac{2h+h^2}{h} = 2+h$$

که چېرې په شکل کې $h \to 0$ نو $Q \to P$ کوي، قاطع خط د $P(1,1)$ په نقطه کې مماس کېږي چې د همدې مماس میل ته د تابع مشتق وایي؛ یعنې: $\overline{PQ} = \lim_{h \to 0}(2+h) = 2$

د لیمیټ دا عملیه موږ تـه دا امکـان پـه لاس راکـوي چې د $y = x^2$ د تـابع د منحنـي میل پـه یـوه اختیـاري ټکـي $P(x, y)$ کې په لاس راوړو. که د Q د ټکي اختیـاري مختصات $\left[x+h, (x+h)^2\right]$ وي او د PQ میـل تـه m او د P په ټکي کې د مماس میل په m_T سره وښیو لرو چې:

$$m = \frac{(x+h)^2 - x^2}{x+h-x} = \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h} = \frac{2xh + h^2}{h} = 2x + h$$

$$m_T = \lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x$$

نو په عمومي بڼه لیکلای شو، که چېرې $Q[x+h\ , f(x+h)],\ P[x, f(x)]$ د نوموړي منحني دوې اختیاري نقطې وي، نو لاندې خارج قسمت چې د Newton د رابطې په نامه مشهور دی، لیکلای شو:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{x+h-x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

په حقیقت کې دا د هغه مستقیم خط میل دی چې د P او Q له ټکو څخه تېرېږي.

او د منحني میل د هغې په هر اختیاري ټکي کې عبارت دی له:

$$m_T = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

دویم مثال: د $f(x) = x - x^2$ د منحني سره د مماس میل د $P(2,0)$ په ټکي کې پیدا کړئ.

حل: د Newton خارج قسمت تشکیل او د $x = 2$ په ټکي کې د منحني میل حسابوو:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = m_T = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(2+h)-(2+h)^2 - 2 + 2^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2+h-4-4h-h^2-2+4}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h-4h-h^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h(1-4-h)}{h} = \lim_{h\to 0}(-3-h) = -3$$

منځنی یا وسطي تغیر

که یو جسم د یوه مستقیم خط پر مخ د حرکت په حال کې وي، طبیعي ده چې وهـل شـوی فاصـله د زمـان تـابع ده یعنې $S = f(t)$ د t_1 او t_2 دوو وختونـو خـارج قسـمت $\frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2 - t_1}$ د جسم د وسـطي سـرعت پـه نامـه یـادېږي او سـرعت د t_0 پـه وخـت کې عبـارت لـه هغـه حـد یـا لیمیـټ څخـه دی چې لحظـوي سـرعت بلـل کېږي. $\lim_{t\to t_0}\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$

د پورتنی رابطې لېمیټ د t او t_0 په وخت کې داسې لیکو:

$$\lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \to t_0} \frac{S - S_0}{t - t_0} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

په پایله کې ویلای شو چې د تابع او متحول د زیاتوالي خارج قسمت ته متوسط تغییر وایي، یعنې:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$$

مثال: د $y = f(x) = x^2$ په تابع کې د f متوسط تغیرات د $[2,5]$ په انټروال کې پیدا کړئ.

حل: څرنګه چې $x_1 = 2$ او $x_2 = 5$ دی، نو د تعریف په مرسته لیکلای شو:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(5) - f(2)}{5 - 2} = \frac{5^2 - 2^2}{5 - 2}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{25 - 4}{5 - 2} = \frac{21}{3} = 7$$

پوښتنې

1) د لاندې تابع ګانو د x د متحول لپاره د Δx او Δy تزاید په پام کې نیولو سره $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ او میل یې په غوښتل شوو ټکو کې پیدا کړئ.

1) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = ?$, $f(x) = 2x^2 - 4$, (0)

2) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = ?$, $f(x) = 2x - x^2$, (3)

3) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = ?$, $f(x) = 3x^2 - 5x + 4$, $(2, -1)$

2) د $f(t) = 5t^3 - 3t + 1$ د تابع متوسط تغییرات د $[2,4]$ په انټروال کې پیدا کړئ.

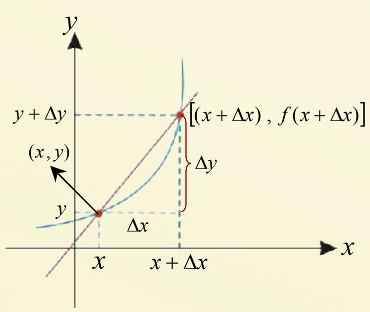
د يوې تابع مشتق

مخامخ لېمیټ څه را ښـيي آيـا پـه بـل ډول يـې لـيکلای شو؟

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

- که چېرې د $y = f(x)$ تابع د $[a,b]$ په انټروال کې متمادي وي، که د x متحول د Δx په انـدازه زيـاتوالی پيدا کړئ آيا تابع تزايد کوي په دې حالت کې، د متحول او تابع د زياتوالي رابطه وليکئ.
- د تابع تزايد د متحول پر تزايد $(\frac{\Delta y}{\Delta x})$ داسې وليکئ چې په مساوات کې بدلون رانشي.
- که له دواړو خواوو څخه لېمیټ ونیول شي، په هغه صورت کې چې Δx صفر ته تقرب وکړي، د دې حـد يـا لېمیټ د څه په نامه يادېږي؟

د پورتني فعاليت پايله داسې بيانوو:



$$y = f(x)$$
$$y + \Delta y = f(x+\Delta x)$$
$$\Delta y = f(x+\Delta x) - y$$
$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) \quad / \quad \div \Delta x$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

تعريف: د تابع او مستقل متحول د تزايد د نسبت لېمیټ کله چې د مستقل متحول تزايد صفر ته تقرب وکړي د تابع مشتق بلل کېږي، لکه: $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ او هغه په $f'(x)$ يا y' ، $\frac{df}{dx}$ ، $\frac{dy}{dx}$ سره ښودل کېږي.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = y' = f'(x)$$

لومړی مثال: که $f(x) = 2x$ وي، د دې تابع مشتق پيدا کړئ.

حل: د مشتق د تعریف څخه په ګټه اخیستنې سره لیکلای شو چې:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2(x+\Delta x)-2x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x+2\Delta x-2x}{\Delta x}$$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\Delta x}{\Delta x}\Rightarrow f'(x)=2$$

دویم مثال: د $f(x)=x^3$ د تابع مشتق پیدا کړئ.

حل:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^3+3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x(3x^2+3x(\Delta x)+(\Delta x)^2)}{\Delta x}=3x^2+3x(0)+0^2\quad\Rightarrow f'(x)=3x^2$$

دریم مثال: د $x\geq 0$, $f(x)=\sqrt{x}$ مشتق پیدا کړئ.

حل: مخکې له حل څخه $x\geq 0$ حالت په پام کې نیسو:

الف: که $x>0$ وي، نو د مشتق د تعریف په مرسته لیکو:

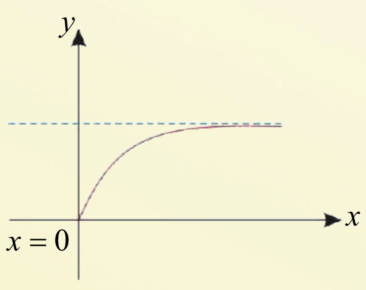
$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}$$

صورت او مخرج د صورت په مزدوج کې ضربوو:

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x})(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x+\Delta x-x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}\quad\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

ب: که $x=0$ شي نو $\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}$ موجود نه دی، نو د $y=\sqrt{x}$ تابع د $x=0$ په ټکي کې د اشتقاق وړ نه ده لکه چې په شکل کې لیدل کېږي، یعنې که x ډېر لوی شي، نو د مماس میل صفر ته نژدې کېږي او د $x=0$ په ټکي کې د مماس میل ډېر لوییږي چې مماس په یوه عمود خط $(\frac{1}{2\sqrt{x}})$ بدلیږي.

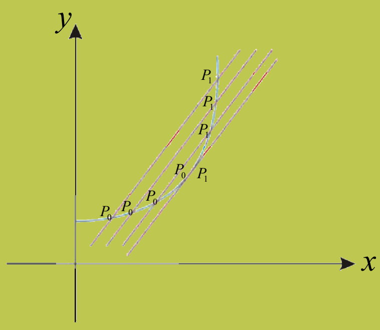


پوښتنې

دلاندې توابعو مشتق د تعریف په مرسته پیدا کړئ.

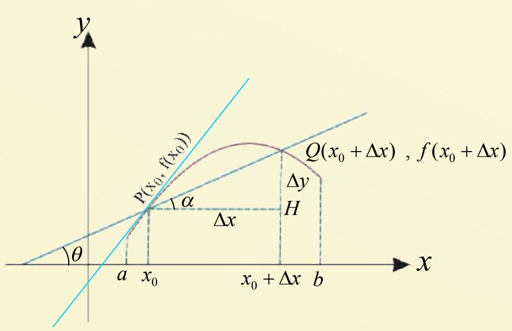
1) $f(x)=x-x^2$　　2) $f(x)=-2x^2$　　3) $f(x)=2x^2+x$

د مشتق هندسي تعبير



په مخامخ شکل کې څه وينئ د هغه په اړه مناقشه وکړئ.

- د وضعيه کمياتو په مستوي کې د C منحني يا د $f(x)$ تابع داسې چې د $[a,b]$ په انټروال کې متمادي وي ګراف يې رسم او د $P(x_0, f(x_0))$ او $Q(x_0+\Delta x\ ,\ f(x_0+\Delta x))$ ټکي د منحني پرمخ وټاکئ.
- د Δ مستقيم خط داسې رسم کړئ چې د منحني د P او Q له ټکو څخه تېر شي.
- آيا ويلای شئ چې د Δ مستقيم خط د x د محور له مثبت جهت سره څه ډول زاويه جوړوي؟
- ووايئ چې د $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ يا $\dfrac{HQ}{HP}$ نسبت د څه په نامه يادېږي؟
- که د Q ټکی د P ټکي ته ډېر نژدې شي $(\Delta x \to 0)$، نو د Δ مستقيم خط په څه ډول کرښه بدلېږي په شکل کې يې وښيئ.
- د $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ لېميټ کله چې $\Delta x \to 0$ وکړي، په $P(x_0, f(x_0))$ ټکي کې وڅېړئ.



د پورتني فعاليت پايله داسې بيانوو:

د $f(x)$ منحني د تابع مشتق، د $P(x_0, f(x_0))$ په ټکي کې د مماس له ميل سره برابر دی، يعنې:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = \tan\alpha = \tan\theta = m_\Delta$$

تعريف: د مماس ميل د منحني د تماس په ټکي کې د تابع له مشتق څخه په هغه ټکي کې عبارت دی، يا په بل عبارت د هغې زاويې له ټانجنټ څخه عبارت دی چې د Δ مستقيم خط يې د x د محور له مثبت جهت سره جوړوي.

لومړی مثال: د هغه مماس میل او معادله چې د $f(x) = 2x^3 - 1$ په منحني د $A(1,1)$ په ټکي کې رسمېږي پیدا کړئ.

حل: پوهېږو چې $m = \tan\alpha = f'(x)$ دی، نو لیکلای شو چې:

$$f(x) = 2x^3 - 1$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2(x+\Delta x)^3 - 1 - (2x^3 - 1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2[x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + (\Delta x)^3]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x^3 + 6x^2\Delta x + 6x(\Delta x)^2 + 2(\Delta x)^3 - 1 - 2x^3 + 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x[6x^2 + 6x\Delta x + 2(\Delta x)^2]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} [6x^2 + 6x(\Delta x) + (\Delta x)^2] = 6x^2$$

بناءً د مماس د میل قیمت د $A(1,1)$ په ټکي کې مساوي دی په: $m = f'(x) = f'(1) = 6x^2 = 6 \cdot 1^2 = 6$

نو د مماس معادله په لاندې ډول ده:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 1 = 6(x - 1) \Rightarrow \quad y = 6x - 5$$

دویم مثال: د $y = x^2 + 1$ تابع د مماس د میل قیمت په $x_0 = 2$ ټکي کې په لاس راوړئ.

حل:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^2 + 1 - (x_0^2 + 1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_0^2 + 2(\Delta x)x_0 + (\Delta x)^2 + 1 - x_0^2 - 1}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (2x_0 + (\Delta x)) = 2x_0$$

$$m = y' = 2x_0 = 2 \cdot 2$$

$$y' = m = 4$$

دریم مثال: د $y = f(x) = x^2$ تابع ورکړل شوې ده، غواړو د $x = x_0$ په ټکي او په ځانګړي توګه د $x_0 = 2$ په ټکي کې د تابع مشتق پیدا کړئ:

$$x = x_0$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x_0\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x(2x_0 + \Delta x)}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$$

اوس د لیمیټ د لاس ته راوړلو له لارې لیکلای شو: $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0$

خرنګه چې $x_0 = 2$ دی، نو $f'(2) = 2\cdot 2 = 4$ یعنې د $x_0 = 2$ په ټکي کې د $y = f(x) = x^2$ د تابع لومړی مشتق له 4 سره برابر دی. دا په دې معنا چې د مستقیم خط میل د $x_0 = 2$ په ټکي کې 4 دی.

څلورم مثال: د $f(x) = x^3$ تابع مشتق پیداکړئ.

حل:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x_0+\Delta x)^3 - x_0{}^3}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x_0{}^3 + 3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x_0{}^3}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x(3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x^2))}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x^2)$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}(3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x)^2) = 3x_0^2$$

نو $f(x)$ د تابع مشتق د x_0 په ټکي کې برابر دی له: $f'(x_0) = 3x_0^2$

پنځم مثال: د x_0 په ټکي کې د $f(x) = \frac{1}{x}$ تابع مشتق پیداکړئ.

حل:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$f(x_0) = \frac{1}{x_0}$$

$$f(x_0) + \Delta y = \frac{1}{x_0 + \Delta x}$$

$$\Delta y = \frac{1}{x_0+\Delta x} - f(x_0)$$

$$\Delta y = \frac{1}{x_0+\Delta x} - \frac{1}{x_0}$$

$$\Delta y = \frac{x_0 - (x_0+\Delta x)}{x_0(x_0+\Delta x)}$$

د مساوات دواړه خواوې په Δx ویشو:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\dfrac{x_0 - x_0 - \Delta x}{x_0(x_0+\Delta x)}}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\dfrac{-\Delta x}{x_0(x_0+\Delta x)}}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-\Delta x}{\Delta x\cdot x_0(x_0+\Delta x)} \quad\Rightarrow\quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1}{x_0(x_0+\Delta x)}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{-1}{x_0(x_0+\Delta x)}$$

$$f'(x_0) = \frac{-1}{x_0(x_0+0)} = \frac{-1}{x_0^2}$$

نو $f'(x_0) = -\frac{1}{x_0^2}$ د x_0 په ټکي کې د $f(x)$ تابع مشتق دی.

پوښتنې

1. په لاندې پوښتنو کې د تابع گانو مشتق پیدا کړئ.

1) $f(x)=5x^2-2$ 2) $f(x)=\frac{2}{x}$

2. **په ورکړل شویو ټکو کې د لاندې تابع گانو مشتق پیدا کړئ.**

1) $f(x)=4x^2$, $x_0=\frac{1}{2}$ 2) $f(x)=3x-1$, $x_0=-1$

$$f(x) = 2x^2$$

د مشتق قوانین

آیا کولای شئ چې د مخامخ تابع مشتق پرته د تزاید له لارې په بله طریقه پیدا کړئ؟

1- د یوه ثابت عدد مشتق:

د $y = C$ تابع(C ثابت عدد) په پام کې ونیسئ.

- تابع ته د Δx په اندازه تزاید ورکړئ، د تابع د تزاید په اړه څه فکر کوئ؟
- د تابع او متحول د تزاید نسبت تشکیل کړئ.
- د پورته مساواتو له دواړو خواوو لیمیټ ونیسئ په هغه صورت کې چې $\Delta x \to 0$ وکړي.

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

د هرې ثابتې $f(x) = C$ تابع مشتق له صفر سره مساوي دی، ځکه چې د هرې ثابتې تابع ګراف یوه افقي کرښه ده چې میل یې صفر دی.

ثبوت:

$$y = C$$
$$y + \Delta y = C$$
$$\Delta y = C - y$$
$$\Delta y = C - C$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{C - C}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x}$$
$$y' = 0$$

مثال: د $f(x) = \pi^4$ او $y = 100$ تابع ګانو مشتق پیدا کړئ.

حل: څرنګه چې π^4 او 100 ثابت عددونه دي، نو:

$$f(x) = C \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 0$$
$$f(x) = \pi^4 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 0$$
$$f(x) = 100 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 0$$

2- د يوې طاقت لرونکي تابع مشتق:

فعالیت

د $y = x^n$ تابع چې $n \in IR$ او $n \geq 1$ وي، په پام کې ونيسئ.

- متحول ته د Δx په اندازه تزايد ورکړئ، آيا تابع هم تزايد کوي که تزايد کوي په کومه اندازه، اړيکه يې وليکئ؟
- له پورته اړيکې څخه د Δy قيمت پيدا کړئ، د متحول او تابع د تزايد نسبت تشکيل کړئ.
- د پورته مساوات له اطرافو څخه په هغه صورت کې لېميټ ونيسئ چې $\Delta x \to 0$ وکړي.

د پورته فعاليت پايله داسې ثبوتوو:

که چېرې $f(x) = x^n$ راکړل شوی وي، نو $f'(x) = nx^{n-1}$ سره کېږي.

ثبوت:

$$y = x^n$$

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^n \quad \Rightarrow \quad \Delta y = (x + \Delta x)^n - y$$

$$\Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n$$

$$\Delta y = (x + \Delta x - x)[(x + \Delta x)^{n-1} + (x + \Delta x)^{n-2} x + (x + \Delta x)^{n-3} x^2 + \ldots + x^{n-1}]$$

$$\Delta y = \Delta x[(x + \Delta x)^{n-1} + (x + \Delta x)^{n-2} x + (x + \Delta x)^{n-3} x^2 + \ldots + x^{n-1}]$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x[(x + \Delta x)^{n-1} + (x + \Delta x)^{n-2} x + (x + \Delta x)^{n-3} x^2 + \ldots + x^{n-1}]}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[(x + \Delta x)^{n-1} + (x + \Delta x)^{n-2} x + (x + \Delta x)^{n-3} x^2 + \ldots + x^{n-1}\right]$$

$$y' = \underbrace{x^{n-1} + x^{n-1} + x^{n-1} + \ldots + x^{n-1}}_{x^{n-1} \text{ ځلې } n}$$

$$y' = nx^{n-1}$$

لومړی مثال: د $f(x) = x^5$ تابع مشتق د $x = \frac{1}{2}$ په ټکي کې وټاکئ.

حل:

$$f(x) = x^5 \Rightarrow f'(x) = 5x^{5-1} \Rightarrow f'(x) = 5x^4$$

$$f(\frac{1}{2}) = 5 \cdot (\frac{1}{2})^4 = 5 \cdot \frac{1}{16} = \frac{5}{16}$$

پوښتنې

د لاندې تابع ګانو مشتق پيدا کړئ.

1) $f(x) = x^{-2}$ 2) $x(t) = gt^2$ 3) $t(x) = x^8$

4) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ 5) $f(x) = 10^{10}$

3- د حاصل جمع مشتق:

د u او v مشتق منوونکي تابع ګانې په پام کې ونیسئ.

- آیا د $y=u+v$ تابع د مشتق وړ ده؟
- د $y=u+v$ په تابع کې $u(x)$ ته د Δu په اندازه او $v(x)$ ته د Δv په اندازه تزاید ورکړئ، د y د تزاید په اړه څه فکر کوئ؟ د هغې اندازه ولیکئ.
- لومړی د تابع تزاید پیدا او بیا د رابطې دواړه خواوې په Δx وویشئ او وروسته یې لیمیټ په هغه صورت کې پیدا کړئ چې $\Delta x \to 0$ وکړي.

د پورته فعالیت پایله داسې ثبوتوو:

ثبوت:

د یو حاصل جمع مشتق د حدونو د مشتقاتو د جمعې له حاصل سره مساوي ده:

$$y=u+v$$
$$y+\Delta y=u+\Delta u+v+\Delta v$$
$$\Delta y=u+\Delta u+v+\Delta v-y$$
$$\Delta y=u+\Delta u+v+\Delta v-u-v$$
$$\Delta y=\Delta u+\Delta v$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta u+\Delta v}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}$$

څرنګه چې $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=u'$ او $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}=v'$ دی، نو : $y'=u'+v'$

4- د حاصل تفریق مشتق

که $y=u-v$ وي، نو $y'=u'-v'$ دی.

ثبوت یې د زده‌کوونکو کورنی دنده ده.

لومړی مثال: د $y=2x+1$ تابع مشتق پیدا کړئ.

حل: لیدل کېږي چې $u=2x$ او $v=1$ دی، نو:

$$u'=1\cdot 2x^{1-1}=2x^{0}$$
$$u'=2$$
$$v'=0$$

بناءً: $y'=u'+v' \Rightarrow y'=(2x)'+(1)' \Rightarrow y'=2+0 \Rightarrow y'=2$

دویم مثال: د $f(x)=4x^2-3x+5$ د تابع مشتق پیدا کړئ.

حل: په دې تابع کې $u=4x^2$, $v=3x$ او $w=5$ دی چې $u'=8x$, $v'=3$ او $w'=0$ کېږي، نو:

$$y'=u'+v'+w'$$
$$y'=(4x^2)'-(3x)'+(5)'$$
$$y'=8x-3$$

دریم مثال: د لاندې تابع گانو مشتقونه پیدا کړئ:

حل:

1) $y=12x-7$
$$y'=(12x)'-(7)'$$
$$y'=12$$

2) $f(x)=9x^2-12x+4$
$$f'(x)=(9x^2)'-(12x)'+(4)'$$
$$f'(x)=18x-12$$

3) $f(x)=6x^3-2x^2+6x-1$
$$f'(x)=(6x^3)'-(2x^2)'+(6x)'-(1)'$$
$$f'(x)=18x^2-4x+6$$

5- د حاصل ضرب مشتق:

که د u او v توابع مشتق منونکي وي، نو $u\cdot v$ هم مشتق منونکي ده، د $y=u\cdot v$ تابع په پام کې ونیسئ.

- **په پورتنی تابع کې u ته د Δu په اندازه، v ته د Δv په اندازه تزاید ورکړئ او د تابع تزاید پیدا کړئ.**
- د Δy د تزاید له پیدا کولو وروسته د مساوات اطراف په Δx وویشئ.
- د پورتنی رابطې له دواړو خواوو څخه په هغه صورت کې لیمیټ ونیسئ چې $\Delta x \to 0$ وکړي.

له پورتني فعالیت پایله داسې ثبوتوو:

ثبوت:

$$y=u\cdot v$$
$$y+\Delta y=(u+\Delta u)(v+\Delta v) \Rightarrow \Delta y=(u+\Delta u)(v+\Delta v)-y$$
$$\Delta y=u\cdot v+u\cdot\Delta v+v\cdot\Delta u+\Delta u\cdot\Delta v-u\cdot v$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{u\cdot\Delta v+v\cdot\Delta u+\Delta u\cdot\Delta v}{\Delta x}=v\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}+u\frac{\Delta v}{\Delta x}+\Delta u\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=v\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+u\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\Delta u\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}$$
$$y'=v\cdot u'+u\cdot v'+0\cdot v'$$
$$y'=u'v+v'u$$

لومړی مثال: د $y = x^3(x^2 - 3)$ د تابع مشتق پیدا کړئ؟

حل: پوهیږو چې $y = u \cdot v$ شکل لري چې په دې صورت کې $y' = uv' + vu'$ دی.

$$\left.\begin{array}{l} u = x^3 \;\Rightarrow\; u' = 3x^2 \\ v = x^2 - 3 \;\Rightarrow\; v' = 2x \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} y' = u'v + v'u \\ y = x^3(x^2 - 3) \\ y' = 3x^2(x^2 - 3) + 2x(x^3) \\ y' = 3x^4 - 9x^2 + 2x^4 = 5x^4 - 9x^2 \end{array}$$

دویم مثال: د $y = (5x - 1)^2$ د تابع مشتق پیدا کړئ.

حل: د y تابع کولای شو د فکتورونو د ضرب په شکل داسې ولیکو:

$$y = (5x - 1)^2 = (5x - 1)(5x - 1)$$

$$\left.\begin{array}{l} u = 5x - 1 \;\Rightarrow\; u' = 5 \\ v = 5x - 1 \;\Rightarrow\; v' = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} y' = u'v + v'u \\ y' = 5(5x - 1) + 5(5x - 1) \\ y' = 25x - 5 + 25x - 5 = 50x - 10 \end{array}$$

6- د حاصل تقسیم مشتق:

که د u او v تابع ګانې مشتق منونکې وي، نو $\frac{u}{v}$ کله چې $v \neq 0$ وي، هم مشتق منوونکې ده، اوس د $y = \frac{u}{v}$ تابع په پام کې ونیسئ.

- u او v ته په ترتیب سره د Δu او Δv په اندازه تزاید ورکړئ او د y تابع تزاید پیدا کړئ.
- د مساوات دواړه خواوې په Δx وویشئ.
- د پورتني رابطې له اطراف څخه په هغه صورت کې چې $\Delta x \to 0$ وکړي، لیمیټ ونیسي.

د پورتني فعالیت پایله داسې ثبوتوو:

ثبوت:

$$y=\frac{u}{v} \Rightarrow y+\Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v} \Rightarrow \Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}-y$$

$$\Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}-\frac{u}{v}=\frac{uv+v\cdot\Delta u-uv-u\cdot\Delta v}{v(v+\Delta v)}$$

$$\Delta y=\frac{v\cdot\Delta u-u\cdot\Delta v}{v(v+\Delta v)}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{v\cdot\Delta u-u\cdot\Delta v}{v(v+\Delta v)}}{\Delta x}=\frac{v\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}-u\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\Delta v)}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{v\frac{\Delta u}{\Delta x}-u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\Delta v)}\right)=\frac{v\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}-u\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v\cdot\lim_{\Delta v\to 0}(v+\Delta v)}$$

$$y'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$$

لومړی مثال: د $y=\dfrac{2+3x}{1-2x}$ تابع مشتق پیدا کړئ.

حل: لیدل کېږي چې تابع د $\dfrac{u}{v}$ بڼه لري چې مشتق یې عبارت دی له:

$$\left.\begin{array}{l} u=2+3x \Rightarrow u'=3 \\ v=1-2x \Rightarrow v'=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} y=\dfrac{u}{v} \quad \Rightarrow y'=\dfrac{u'v-v'u}{v^2} \\ y'=\dfrac{3(1-2x)-[-2(2+3x)]}{(1-2x)^2} \\ \quad=\dfrac{3-6x+4+6x}{(1-2x)^2}=\dfrac{7}{(1-2x)^2} \end{array}$$

یادونه: که چېرې وغواړو چې د یوې تابع مشتق په یوه ټاکلې نقطه لکه x_0 کې پیدا کړو د تابع په مشتق کې ټاکلی قیمت وضع کوو چې په پایله کې د تابع مشتق په هغه نقطه کې لاس راځي، لکه:

دویم مثال: د $f(y)=\dfrac{2y^2-3}{1-3y}$ د تابع مشتق د $y=0$ په ټکي کې پیدا کړئ:

حل: د تابع د حاصل تقسیم له مشتق څخه لرو:

$$\left.\begin{array}{l} u=2y^2-3 \Rightarrow u'=4y \\ v=1-3y \Rightarrow v'=-3 \end{array}\right\}$$

$$f'(y)=\frac{4y(1-3y)-[-3(2y^2-3)]}{(1-3y)^2}=\frac{4y-12y^2+6y^2-9}{(1-3y)^2}$$

$$f'(y)=\frac{-6y^2+4y-9}{(1-3y)^2}$$

$$f'(0)=\frac{-6(0)^2+4(0)-9}{(1-0)^2}$$

$$f'(0)=-9$$

دریم مثال: د $f(t)=\dfrac{-3}{2t-1}$ د تابع مشتق پیدا کړئ.

حل: پوهېږو چې تابع د $\dfrac{u}{v}$ بڼه لري، نو د $y=\dfrac{u}{v}$ له فورمول څخه په ګټه اخېستنې سره داسې عمل کوو:

$$\left.\begin{array}{ll} y=\dfrac{u}{v} & \Rightarrow\ y'=\dfrac{u'v-v'u}{v^2} \\ u=-3 & \Rightarrow\ u'=0 \\ v=2t-1 & \Rightarrow\ v'=2 \end{array}\right\} \Rightarrow\ f'(t)=\frac{0\cdot(2t-1)-2(-3)}{(2t-1)^2}=\frac{6}{(2t-1)^2}$$

پوښتنې

د لاندې توابعو مشتق پیدا کړئ:

1) $f(x)=\dfrac{3}{5}x(x-2)$
2) $g(x)=(2x-3)(x-3)$
3) $f(x)=(2x-1)^2$
4) $f(t)=\dfrac{t^2}{1-2t}$
5) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-2}$
6) $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$
7) $f(x)=3x^5-5x^2$
8) $f(x)=7x+3$

7- د يوې جذرالمربع تابع مشتق:

فعالیت

د $y=\sqrt{x}$ تابع په پام کې ونیسي.

- د $y=\sqrt{x}$ تابع متحول ته د Δx په اندازه تزاید ورکړئ د تابع تزاید پیدا کړئ.
- د لاس ته راغلي رابطې له دواړو خواوو څخه لېمیټ په هغه صورت کې ونیسي چې $\Delta x \to 0$ وکړي.

د پورتني فعالیت پایله داسې ثبوتوو:

ثبوت:

$$y=\sqrt{x} \Rightarrow y+\Delta y=\sqrt{x+\Delta x}$$

$$\Delta y=\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}$$

د مساوات د ښي اړخ صورت او مخرج د صورت په مزدوج کې ضربوو:

$$\Delta y=\frac{(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x})(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{x+\Delta x-x}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{\Delta x}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}} \Rightarrow \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\boxed{y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

لومړی مثال: د $f(x)=\sqrt{x}(x^2-1)$ د تابع مشتق پیدا کړئ.

حل: لیدل کېږي چې تابع د $u\cdot v$ بڼه لري، نو:

$$\left.\begin{aligned} u=\sqrt{x} &\Rightarrow u'=\frac{1}{2\sqrt{x}} \\ v=x^2-1 &\Rightarrow v'=2x \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} f'(x)&=\frac{1}{2\sqrt{x}}(x^2-1)+2x\cdot\sqrt{x} \\ f'(x)&=\frac{x^2-1}{2\sqrt{x}}+2x\sqrt{x}=\frac{x^2-1+4x(\sqrt{x})^2}{2\sqrt{x}} \\ &=\frac{x^2-1+4x^2}{2\sqrt{x}}=\frac{5x^2-1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

8- د $\sqrt{u}$ تابع مشتق

- که چېرې y د u او u د x تابع او مشتق منوونکي وي د y اړیکه u ته او u، x ته څه فکر کوئ.
- د u متحول ته د Δu په اندازه تزاید ورکړئ د Δy د تزاید په اړه څه فکر کوئ.
- د مساواتو له دواړه خواوو څخه لیمیټ ونیسئ چې $\Delta x \to 0$ وکړي.

$$y + \Delta y = \sqrt{u + \Delta u}$$

$$\Delta y = \sqrt{u + \Delta u} - \sqrt{u}$$

د مساوات د ښي اړخ صورت او مخرج د صورت په مزدوج کې ضربوو:

$$\Delta y = \frac{(\sqrt{u + \Delta u} - \sqrt{u})(\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u})}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}}$$

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u - u}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}}$$

د مساوات دواړه خواوې په Δx وېشو او بیا د مساوات له دواړو خواوو څخه لیمیټ نیسو چې $\Delta x \to 0$ وکړي.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}} \cdot \frac{1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0 \Rightarrow \Delta u \to 0} \frac{\frac{\Delta u}{\Delta x}}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}}$$

$$y' = \frac{u'}{\sqrt{u} + \sqrt{u}} = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

د ويم مثال: د $h(x) = (x^2 + x)\sqrt{x}$ د تابع مشتق پیدا کړئ.

حل: د $y = u \cdot v$ او $y = \sqrt{x}$ د فورمولونو له مشتق څخه په ګټه اخیستنې سره لرو:

$$\left.\begin{array}{ll} u = x^2 + x & \Rightarrow u' = 2x + 1 \\ v = \sqrt{x} & \Rightarrow v' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} h'(x) = (2x+1)\sqrt{x} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}(x^2 + x) \\ h'(x) = 2x\sqrt{x} + \sqrt{x} + \dfrac{x^2 + x}{2\sqrt{x}} \\ h'(x) = \dfrac{4x^2 + 2x + x^2 + x}{2\sqrt{x}} = \dfrac{5x^2 + 3x}{2\sqrt{x}} \end{array}$$

دريم مثال: د $f(x)=(\sqrt[3]{x}-1)(x+3)$ تابع د مشتق قيمت په $x=8$ ټکي کې په لاس راوړئ.

حل: د $y=u\cdot v$ او $y=\sqrt[n]{u}$ تابع له مشتق څخه په ګټه اخيستنې سره ليکلای شو:

$$\left.\begin{array}{l} u=\sqrt[3]{x}-1\Rightarrow u'=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \\ v=x+3\Rightarrow v'=1 \end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{l} f'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}(x+3)+1(\sqrt[3]{x}-1) \\ f'(x)=\dfrac{x+3}{3\sqrt[3]{x^2}}+(\sqrt[3]{x}-1) \end{array}$$

اوس د تابع مشتق د $x=8$ په نقطه کې پيدا کوو:

$$f'(8)=\frac{8+3}{3\sqrt[3]{8^2}}+\sqrt[3]{8}-1=\frac{11}{12}+1=\frac{23}{12}$$

پوښتنې

1- د لاندې توابعو مشتقونه پيدا کړئ.

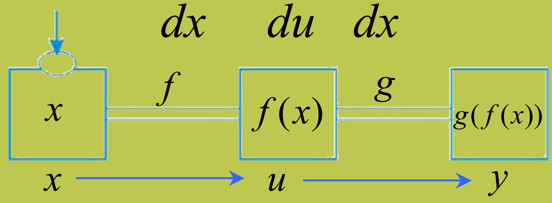
$$f(x)=\frac{1}{x+1} \quad , \quad y=3x^{-3} \quad , \quad f(x)=x^2+3$$

2- که $f(x)=x^2-3x$ او $g(x)=\sqrt{x}-1$ وي، د دې تابع ګانو د جمعې، ضرب او تقسيم مشتقونه پيدا کړئ. $[(f+g)',(f\cdot g)',(f\div g)' \quad g\neq 0]$

د مرکبو تابع گانو مشتق (زنځيري قاعده) Chain Rule

د مخامخ اړيکې او شکل په اړه خپل نظر بيان کړئ.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$



فعالیت

که چېرې y د u او u د x تابع وي او د اشتقاق وړ وي.

- وواياست چې y د u او u له x سره څه اړيکه لري؟
- آیا د $\Delta y = \Delta y \cdot \frac{\Delta u}{\Delta u}$ مساوات حقیقت لري؟
- د پورتني مساوات دواړې خواوې په Δx وويشئ.
- که د ښي اړخ د کسرونو د مخرجونو ځايونه بدل شي، په پورتني رابطه کې بدلون راځي؟
- د پورتني مساوات له اطراف څخه په هغه صورت کې لیمیټ ونیسئ چې $\Delta x \to 0$ وکړي.

د پورتني فعاليت پايله داسې ثبوتوو:

د تابع، تابع مشتق ثبوت او پايله يې په لاندې ډول ده.

ثبوت:

$$\Delta y = \Delta y \cdot \frac{\Delta u}{\Delta u}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta u}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

څرنگه چې $\lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = y'_{(u)}$ او $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u'_{(x)}$ دی، نو: $y'_{(x)} = y'_{(u)} \cdot u'_{(x)}$

د دې زنځيري قاعدې پر بنسټ لاندې پايلې ليکلای شو:

1- که $y = u^n$ وي؛ نو $y' = nu^{n-1} \cdot u'$ کېږي.

2- که $y=\sqrt[n]{u}$ وي، نو $y'=\dfrac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$ کېږي.

مثال: د لاندې تابع گانو مشتق پیدا کړئ.

1) $y=(2x^2-1)^3$ 2) $y=\sqrt{1-x^2}$ 3) $y=(x^2-3)^2\cdot 2x^3$

4) $y=\sqrt[3]{x^2-2x^3}$ 5) $y=(x^2-2)^{-3}$

حل: د زنځیري قاعدې په مرسته لیکلای شو چې:

1) $y=\underbrace{(2x^2-1)^3}_{u}$

$$\left.\begin{array}{l} u=2x^2-1\Rightarrow u'_x=4x \\ y=u^3\Rightarrow y'_u=3u^2 \end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{l} y'_{(x)}=y'_{(u)}\cdot u'_{(x)} \\ y'=3(2x^2-1)^2\cdot 4x=3(4x^4-4x^2+1)\cdot 4x \\ \quad =(12x^4-12x^2+3)\cdot 4x=48x^5-48x^3+12x \\ \quad =12x(4x^4-4x^2+1)\quad =12x(2x^2-1)^2 \end{array}$$

2) $y=\sqrt{1-x^2}$

$$\left.\begin{array}{l} u=1-x^2\Rightarrow u'_{(x)}=-2x \\ y=\sqrt{u}\Rightarrow y'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}} \end{array}\right\}\Rightarrow y'=\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

لیدل کېږي چې تابع د ضرب د حاصل بڼه لري، نو: $y=u\cdot v\Rightarrow y'=u'v+v'u$

3) $y=(x^2-3)^2\cdot 2x^3$

$$\left.\begin{array}{l} u=(x^2-3)^2 \\ u'_{(x)}=2(x^2-3)(2x) \\ v=2x^3\Rightarrow v'_{(x)}=6x^2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y'=\left[(x^2-3)^2\right]'\cdot 2x^3+\left[2x^3\right]'(x^2-3)^2 \\ y'=\left[2(x^2-3)\cdot 2x\right]2x^3+6x^2(x^2-3)^2 \\ \quad =8x^4(x^2-3)+6x^2(x^2-3)^2 \\ \quad =8x^6-24x^4+6x^2(x^4-6x^2+9) \\ \quad =8x^6-24x^4+6x^6-36x^4+54x^2 \\ \quad =14x^6-60x^4+54x^2 \end{array}$$

4) $y=\sqrt[3]{x^2-2x^3}$

$$\left.\begin{array}{l} u=x^2-2x^3 \\ u'_{(x)}=2x-6x^2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y=\sqrt[n]{u}\Rightarrow y'=\dfrac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}} \\ y'=\dfrac{2x-6x^2}{3\sqrt[3]{(x^2-2x^3)^2}} \end{array}$$

5) $y=(x^2-2)^{-3}$

$$\left.\begin{array}{l} u=x^2-2 \\ u'_{(x)}=2x \end{array}\right\} \begin{array}{l} y=u^n\Rightarrow y'=nu^{n-1}\cdot u' \\ y'=-3(x^2-2)^{-4}\cdot 2x=\dfrac{-6x}{(x^2-2)^4} \end{array}$$

يادونه:

I. که چېرې د f تابع د (x_0) په ټکي کې مشتق ولري، نو $f'(x_0)$ د هغه مماس ميل دی چې د $((x_0)\ ,\ f(x_0))$ په نقطه کې له منحني يا د تابع له ګراف سره رسمېږي.

مثال: د $f(x)=x^3$ د تابع ميل د $x_0=1$ په ټکي کې پيدا کړئ.

حل: ښکاره ده چې $x_0=1$ دی، نو: $f(x_0)=1$ سره کېږي او $P(1,1)$ چې د تماس ټکی دی، ميل يې عبارت دی، له:

$$f'(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x^2+x+1)=3 \quad\Rightarrow\quad f'(1)=3$$

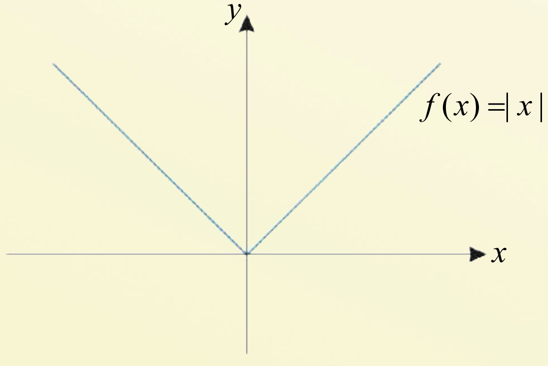
II. که د f تابع د $x=x_0$ په ټکي کې د مشتق وړ وي، نو دا تابع د x_0 په ټکي کې متمادي ده، خو برعکس يې سم نه ده، يعنې کېدای شي، يوه تابع په يوه ټکي کې متمادي وي، ولې په هغه ټکي کې د مشتق وړ نه وي.

مثال: د $f(x)=|x|$ د تابع مشتق د په $x=0$ ټکي کې پيدا کړئ.

حل: پوهېږو چې مشتق په حقيقت کې د نيوټن د نسبت د لېميټ محاسبه ده چې د ښي او کيڼ اړخ لېميټونه يې په صفر کې سره وڅېړل شي.

$$f'(0^+)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1$$

$$f'(0^-)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=-1$$



لیدل کېږي چې $f'(0^+) \neq f'(0^-)$ دی، نو تابع په $x = 0$ کې د مشتق وړ نه ده، ولې تابع د صفر په ټکي کې متمادي ده.

پوښتنې

د لاندې توابعو مشتق پیدا کړئ.

1) $y = (x^2 + 2)^2$

2) $f(x) = (x^3 - 4x^2 + 1)^{-4}$

3) $y = (1 - 2x^3)^4$

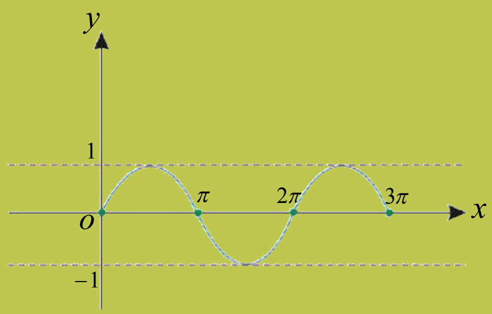
4) $h(z) = \sqrt{\dfrac{1-z}{1+z}}$

5) $f(t) = \sqrt[3]{3t+1}$

6) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2 + x^2 + x^3}}$

د مثلثاتي تابع ګانو مشتق

مخامخ ګراف څه ډول تابع را ښيي؟



فعالیت

- مثلثاتي دایره او رادیان تعریف کړئ.
- آیا دا $-1 \le \sin x \le 1$ اړیکه حقیقت لري او که نه؟
- د $y = \sin x$ تابع په پام کې ونیسئ متحول ته د Δx په اندازه بدلون ورکړئ او د تابع بدلون په پام کې ونیسئ.
- د $\sin(x + \Delta x) - \sin x$ مثلثاتي رابطې ته انکشاف ورکړئ؟
- د پورتنۍ رابطې له انکشاف څخه وروسته د $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ نسبت جوړ او د مساوات له دواړو خواوو څخه په هغه صورت کې لیمیټ ونیسئ چې $\Delta x \to 0$ وکړي.

له پورته فعالیت څخه پایله داسې ثبوتوو:

1- د $y = \sin x$ تابع مشتق:

ثبوت:

$$y = \sin x$$
$$y + \Delta y = \sin(x + \Delta x)$$
$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x$$
$$\Delta y = 2\cos\frac{x + \Delta x + x}{2} \cdot \sin\frac{x + \Delta x - x}{2} = 2\cos\frac{2x + \Delta x}{2} \cdot \sin\frac{\Delta x}{2}$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \cdot 2\cos(x + \frac{\Delta x}{2}) \cdot \sin\frac{\Delta x}{2} = 2\cos(x + \frac{\Delta x}{2}) \cdot \sin\frac{\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\cos(x + \frac{\Delta x}{2}) \cdot \lim_{\Delta x \to 0}\sin\frac{\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \Rightarrow y'(x) = \cos x \cdot 1$$
$$y' = \cos x$$
$$\boxed{y = \sin x \Rightarrow y' = \cos x}$$

که چېرې $f(x) = \sin u$ وي په داسې حال کې چې u د x تابع وي، نو لیکلای شو:

$$f(u) = \sin u \Rightarrow y' = u'\cos u$$

لومړی مثال: د $f(x) = \sin 4x$ تابع مشتق پیدا کړئ.

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = \sin 4x \\ u = 4x \Rightarrow u' = 4 \\ f(x) = \sin u \Rightarrow y'_u = \cos u \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} f(x) = \sin u \quad \Rightarrow f'(x) = u'\cos u \\ f(x) = \sin 4x \Rightarrow f'(x) = 4\cos 4x \end{array}$$

دویم مثال: د $f(x) = x^3 \cdot \csc x$ تابع مشتق پیدا کړئ.

حل:

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = x^3 \cdot \csc x = x^3 \cdot \dfrac{1}{\sin x} \\ u = x^3 \Rightarrow u' = 3x^2 \\ v = \dfrac{1}{\sin x} \Rightarrow v' = \dfrac{-uv'}{v^2} = \dfrac{-\cos x}{\sin^2 x} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} f(x) = x^3 \cdot \csc x \\ f'(x) = 3x^2 \cdot \csc x + \dfrac{-\cos x}{\sin^2 x} \cdot x^3 \\ \quad = 3x^2 \csc x - x^3 \cot x \cdot \csc x \cdot x \\ \quad = 3x^2 \csc x - x^3 \cot x \cdot \csc x \end{array}$$

پوښتني

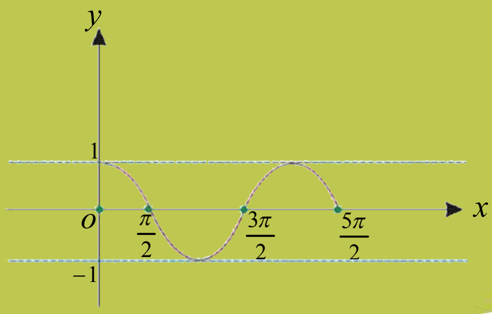
د لاندې توابعو مشتق په لاس راوړئ:

$a)\ y = \sin 5x$ $\qquad b)\ y = \dfrac{\sin x}{1+x}$

$c)\ y = \sqrt{1+\sin x}$

د $y = \cos x$ تابع مشتق

مخامخ گراف څه ډول تابع را ښيي؟



فعالیت

- د $y = f(x) = \cos x$ په تابع کې متحول ته د Δx او تابع ته د Δy په اندازه تزاید ورکړئ.
- د $\cos(x+\Delta x) - \cos x$ مثلثاتي رابطې ته انکشاف ورکړئ.
- د پورتنی انکشافي رابطې په مرسته د $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ نسبت تشکیل او له اطرافو څخه لیمیټ ونیسئ چې $\Delta x \to 0$ وکړي.

د پورتني فعالیت پایله داسې ثبوتوو:

2- د $y = \cos x$ تابع مشتق

ثبوت:

$$y = \cos x$$

$$y + \Delta y = \cos(x + \Delta x)$$

$$\Delta y = \cos(x+\Delta x) - \cos x$$

$$\Delta y = -2\sin\frac{x+\Delta x + x}{2}\cdot\sin\frac{x+\Delta x - x}{2}$$

$$\Delta y = -2\sin\frac{2x+\Delta x}{2}\cdot\sin\frac{\Delta x}{2}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\lim_{\Delta x\to 0}\sin(x+\frac{\Delta x}{2})\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = -\sin x\cdot 1$$

$$\boxed{y=\cos x \quad\Rightarrow\quad y' = -\sin x}$$

یا په لنډ ډول هغه داسې ثبوتوو:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$
$$\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$$
$$(\cos x)' = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}}\cdot(-2\sin x\cos x)$$

پوهېږو $\sqrt{1-\sin^2 x} = \cos x$ چې سره دی، نو:

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cos x}(-2\sin x\cdot\cos x)$$
$$\boxed{(\cos x)' = -\sin x}$$

که چېرې $y = \cos u$ وي، په داسې حال کې چې u د x تابع وي، نو لیکلای شو:

$$\boxed{y = \cos u \Rightarrow y' = -u'\cdot\sin u}$$

لومړی مثال: د لاندې توابعو مشتق پیدا کړئ.

1) $f(x) = \sin 2x = 2\sin x\cos x$ 2) $f(x) = x - \sin x\cos x$

حل: پوهېږو چې $y = u\cdot v \Rightarrow y' = u'v + v'u$ دی، نو:

1) $f(x) = \sin 2x = 2\sin x\cos x$
$$f'(x) = (2\sin x)'\cos x + (\cos x)'\cdot 2\sin x = 2\cos^2 x - 2\sin^2 x$$
$$f'(x) = 2(\cos^2 x - \sin^2 x) \Rightarrow y' = 2\cos 2x$$

2) $f(x) = x - \sin x\cos x$
$$f'(x) = (x)' - (\sin x\cdot\cos x)' = (x)' - [(\sin x)'\cdot\cos x + (\cos x)'\cdot\sin x]$$
$$f'(x) = (x)' - [\cos x\cos x + (-\sin x\sin x)] = 1 - \cos 2x$$

پوښتنې

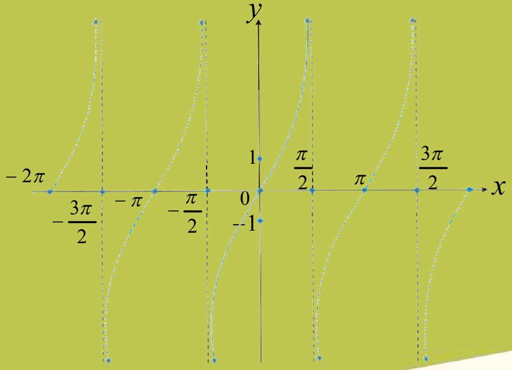
د لاندې تابع ګانو لومړی مشتق پیدا کړئ.

1) $f(x) = (\sec 2x + \tan 2x)^2$ 2) $f(x) = \sin^2 x$ 3) $f(x) = \sec x$

4) $f(x) = \csc x$ 5) $f(x) = \dfrac{5\sin^2 2x}{3\cos 5x}$

د $y = \tan x$ تابع مشتق

مخامخ ګراف څه ډول تابع راښيي.



- د $y = \tan x$ تابع د نسبت په شکل وليکئ.
- له پورتني نسبت څخه مشتق ونيسئ، هغه له څه سره مساوي کېږي.

له پورته فعاليت څخه پايله داسې ثبوتوو:

3- د $y = \tan x$ تابع مشتق:

ثبوت:

$$f(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$f'(x) = \frac{(\sin x)' \cos x - (\cos x)' \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cos x - (-\sin x)(\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$y = \tan x$$

$$y'_{(x)} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

پاتې فورمولونه زده‌کوونکو ته پرېږدو.

لومړی مثال: د لاندې مثلثاتي تابع مشتق پيدا کړئ.

$$y = \tan^3 x$$

حل: پوهېږو چې که $y = u^n$ وي نو مشتق يې $y' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$ سره دی، نو:

$$\left.\begin{aligned} u &= \tan x \\ u' &= \sec^2 x \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \begin{aligned} y &= \tan^3 x \\ y' &= 3\tan^2 x \sec^2 x \end{aligned}$$

دويم مثال: د $y = \sec x \cdot \cot x$ تابع مشتق پيدا کړئ.

حل: څرنګه چې تابع د $y = u \cdot v$ شکل لري، نو:

$$y = \sec x \cdot \cot x$$

$$u = \sec x \quad \Rightarrow \quad u' = \sec x \tan x$$

$$v = \cot x \quad \Rightarrow \quad v' = -\csc^2 x$$

د u, v, u' او v' قيمتونه د $y' = u'v + u \cdot v'$ په فورول کې وضع کوو:

$$y' = \sec x \tan x \cdot \cot x + \sec x(-\csc^2 x)$$

$$= \sec x \tan x \frac{1}{\tan x} - \csc^2 x \sec x$$

$$= \sec x - \csc^2 x \sec x$$

پوښتنې

د لاندې تابع ګانو مشتق پيدا کړئ.

$a)\ \ y = \tan x \cot x$

$b)\ \ y = (x^2 + x - 1)\tan^2 x$

$c)\ \ y = \dfrac{1}{\tan x}$

$d)\ \ y = \tan x \sec x - \cot x$

ضمني مشتقات

مخامخ مساوات په عبارت سره ولیکئ.

$$y'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}}$$

فعالیت

- د $y = 2x^2 - 4$ تابع مشتق پیدا کړئ.
- د $y^2 + xy = 1$ تابع څو متحوله تابع ده؟ ګراف یې څه ډول شکل لري؟
- د پورتني تابع مشتق پیدا کولای شئ.

د یوې منحني خط معادله د وضعیه کمیاتو په سیستم کې عبارت له $y = f(x)$ څخه ده، له دې ځایه $y - f(x) = 0$ کېږي او $y - f(x)$ یوه دوه متحوله تابع د x او y له جنسه ده، که تابع په پام کې ونیسو، نو د دې منحني معادله د $F(x, y)$ شکل غوره کوي، د مثال په ډول: $F(x,y) = y - f(x)$ $F(x,y) = x^2 + y^2 - 25$ وي، نو د $F(x,y) = 0$ له معادلې څخه لیکلای شو چې $x^2 + y^2 - 25 = 0$ یا $x^2 + y^2 = 25$ چې د دې دوو بېلا بېلو توابعو معادلې $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$ دي. په عمومي ډول د $F(x, y) = 0$ معادله کېدای شي چې د څو تابع ګانو معادله د $y = f(x)$ په بڼه وي، پاملرنه وکړئ.

د $y = f(x)$ په تابع کې چې x او y یو له بل څخه جلا وي، نو مشتق یې په آسانۍ پیدا کولای شو، ولې په ځینو رابطو کې y له x سره یو ځای بیان شوي دي لکه په $xy^2 - y + 1 = 0$ چې د مشتق په نیولو کې که د x له جنسه مشتق نیسو، نو y یو ثابت عدد فرضوو او که د y له جنسه مشتق نیسو x ثابت فرضوو، لکه:

$$xy^2 - y + 1 = 0$$

$$(xy^2)' - (y)' + (1)' = 0 \Rightarrow 1y^2 + x(2y'y) - y' = 0 \Rightarrow y^2 = -2xyy' + y' = y'(-2xy + 1)$$

$$y' = \frac{y^2}{-2xy + 1}$$

په عمومي حالاتو کې که تابع غیر صریح وي په دې معنا چې مستقل متحول او د تابع متحول پکې څرګند نه وي، نو ددې ډول تابع مشتق د ضمني مشتق په نامه یادیږي او د هغه مشتق په لاندې ډول محاسبه کوو.

$$y'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}} = -\frac{\text{د تابع مشتق نظر } x \text{ ته(} y \text{ ثابت دی)}}{\text{د تابع مشتق نظر } y \text{ ته(} x \text{ ثابت دی)}}$$

لومړی مثال: د $y = \sin\frac{x}{y} + 1$ ضمني تابع مشتق د $(\pi, 1)$ په ټکي کې پیدا کړئ.

حل: د $y - \sin\frac{x}{y} - 1 = 0$ رابطې څخه $y'_{(x)} = \frac{-f'_{(x)}}{f'_{(y)}}$ پیدا کوو.

$$y - \sin\frac{x}{y} - 1 = 0$$

$$\left.\begin{aligned}
f'_{(x)} &= y'_x - (\sin\frac{x}{y})'_x - (1)'_x \\
&= 0 - \frac{1}{y}\cos\frac{x}{y} - 0 = \frac{-1}{y}\cos\frac{x}{y} \\
f'_{(y)} &= y'_y - (\sin\frac{x}{y})'_y - (1)'_y \\
&= 1 - \cos\frac{x}{y}(\frac{x}{y})'_y - 0 = 1 - \frac{-x}{y^2}\cdot\cos\frac{x}{y} = 1 + \frac{x}{y^2}\cos\frac{x}{y}
\end{aligned}\right\} \Rightarrow y'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}} = -\frac{\frac{-1}{y}\cos\frac{x}{y}}{1 + \frac{x}{y^2}\cdot\cos\frac{x}{y}}$$

اوس په $y'_{(x)}$ رابطه کې د x او y قیمتونه وضع کوو چې د $y'(\pi, 1)$ په لاس راځي.

$$y'_{(\pi,1)} = \frac{\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}}{1 + \frac{x}{y^2}\cdot\cos\frac{x}{y}} = \frac{\frac{1}{1}\cos\pi}{1 + \frac{\pi}{1}\cos\pi} = \frac{-1}{1 + \pi(-1)} = \frac{1}{\pi - 1}$$

دویم مثال: د $x^2 y + 2y^3 = 3x + 2$ رابطې ضمني مشتق پیدا کړئ.

حل:

$$x^2 y + 2y^3 = 3x + 2$$

$$x^2 y + 2y^3 - 3x - 2 = 0$$

$$f'_{(x)} = 2xy + 0 - 3 - 0 = 2xy - 3$$

$$f'_{(y)} = x^2 + 6y^2 - 0 - 0 = x^2 + 6y^2$$

$$f'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}} = -\frac{2xy - 3}{x^2 + 6y^2} = \frac{-2xy + 3}{x^2 + 6y^2}$$

دریم مثال: د $y^6 - y - x^2 = 0$ تابع ضمني مشتق پیداکړئ.

حل:

$$f'_{(x)} = -2x$$

$$f'_{(y)} = 6y^5 - 1$$

$$y'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}} = -\frac{-2x}{6y^5 - 1} = \frac{2x}{6y^5 - 1}$$

او یا په بله طریقه:

$$y^6 - y - x^2 = 0$$

$$6y^5 y' - y' - 2x = 0$$

$$(6y^5 - 1)y' = 2x$$

$$y' = \frac{2x}{6y^5 - 1}$$

د تابع دویم ضمني مشتق

د ضمني رابطې د دویمې مرتبې د ضمني مشتق د پیداکولو لپاره د فورمول په مرسته لومړی د ضمني اریکې لومړی مشتق پیداکوو او بیا له دې رابطې څخه مشتق نیسو.

لومړی مثال: د $x^2 - y^2 = 1$ رابطې دویمه ضمني مشتق $y''_{(x)}$ پیداکړئ.

حل:

$$x^2 - y^2 = 1$$

$$x^2 - y^2 - 1 = 0$$

$$f'_{(x)} = (x^2)'_x - (y^2)'_x - (1)'_x = 2x - 0 - 0 = 2x$$

$$f'_{(y)} = (x^2)'_y - (y^2)'_y - (1)'_y = 0 - 2y - 0 = -2y$$

$$y'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}} = -\frac{2x}{-2y} = \frac{x}{y}$$

او یا په بله طریقه:

$$y'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}} = -\frac{(x^2)'_x - (y^2)'_x - (1)'_x}{(x^2)'_y - (y^2)'_y - (1)'_y} = -\frac{2x - 0 - 0}{0 - 2y - 0} = \frac{x}{y} \Rightarrow y'_{(x)} = \frac{x}{y}$$

اوس د $y' = \frac{x}{y}$ له رابطې څخه دویم ضمني مشتق نیسو:

$$y''_{(x)} = \frac{(x)'y - y'x}{y^2} = \frac{y - y'x}{y^2} = \frac{y - \frac{x}{y}\cdot x}{y^2} = \frac{y^2 - x^2}{y^3} = \frac{-1}{y^3} \Rightarrow y''_{(x)} = \frac{-1}{y^3}$$

دویم مثال: د $x^2+xy+y^2-3=0$ په معادله کې د y مشتق نسبت x ته د $(1,1)$ په ټکي کې پیدا او پر منحني د مماس معادله ولیکي.

حل: څرنګه چې د $(1,1)$ ټکی په معادله کې صدق کوي، نو نوموړی ټکی د منحني پرمخ واقع دی، د $y'_{(x)}$ د پیداکولو لپاره په ورکړ شوي معادلې کې لیکلای شو:

$$f'_{(x)}=2x+y$$

$$f'_{(y)}=x+2y$$

$$y'_{(x)}=-\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}}=-\frac{2x+y}{x+2y}\quad,\qquad x+2y\neq 0$$

$$y'=-\frac{2x+y}{x+2y}=-\frac{2+1}{1+2}=-1$$

$$y-y_1=m(x-x_1)\ \Rightarrow\ y-1=-(x-1)\ \Rightarrow\ y=-x+2$$

او یا په بله طریقه هم کولای شو د تابع ضمني مشتق په لاس راوړو:

$$x^2+xy+y^2-3=0$$

$$2x+y+x\cdot y'+2yy'=0$$

$$2x+y+(x+2y)y'=0$$

$$(x+2y)y'+2x+y=0$$

$$(x+2y)y'=-2x-y$$

$$y'=\frac{-2x-y}{x+2y}$$

دریم مثال: د $x^2y^3=5y^3+x$ غیر صریح تابع ضمني مشتق پیدا کړئ.

حل:

$$x^2y^3-5y^3-x=0$$

$$f'_{(x)}=2xy^3-0-1=2xy^3-1$$

$$f'_{(y)}=3x^2y^2-15y^2-0$$

$$y'_{(x)}=-\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}}=-\frac{2xy^3-1}{3x^2y^2-15y^2}=\frac{1-2xy^3}{3x^2y^2-15y^2}$$

پوښتنې

1- د $x\sin y+y\cos x=5$ د غیر صریح تابع ضمني مشتق پیدا کړئ.

2- د $x^3+xy^2+y=3$ رابطې څخه ضمني مشتق ونیسئ.

3- د $x^2+y^2=4x+4y$ رابطې څخه ضمني مشتق ونیسئ.

لوړ مرتبه يي مشتقات

د مخامخ تابع درې ځلې مشتق ونیسئ؟

د مخامخ تابع پنځه ځلې مشتق ونیسئ؟

$$f(x) = \sin x$$
$$f(x) = \cos x$$

فعالیت

- د $y = 2x^4 - 3x^3 - 2x - 1$ تابع مشتق پیدا کړئ.
- د پورته تابع دویم مشتق پیدا کړئ.
- د پورتني مشتق د تابع دریم ځل مشتق ونیسئ.
- د پورتني تابع نور څو ځلې مشتق نیولی شو؟
- د پورتني تابع څووم مشتق له صفر سره مساوي دی؟

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

که د $y = f(x)$ مشتق منونکی وي، لومړی مرتبه مشتق یې په $y' = f'(x)$ ، دویمه مرتبه مشتق یې په $y'' = f''(x)$ دریمه مرتبه مشتق یې په $y''' = f'''(x)$ … په کلي ډول $n-$ام مرتبه مشتق د $y = f(x)$ تابع په $y^{(n)} = f^{(n)}(x)$ علامې سره ښیو.

لومړی مثال: د $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$ تابع دریم مشتق په لاس راوړئ.

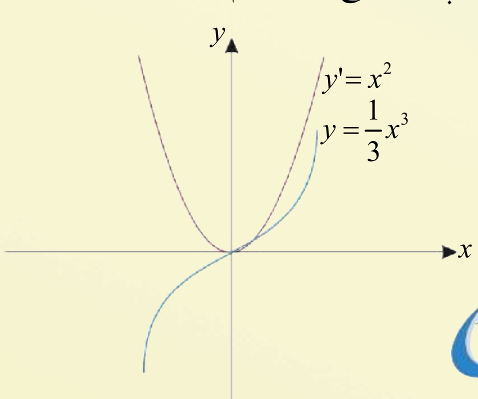
حل:

$$y = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$$
$$y' = 3x^2 - 6x + 4$$
$$y'' = 6x - 6$$
$$y''' = 6$$

دویم مثال: د $y = \frac{1}{3}x^3$ تابع ګراف او د هغې د لومړی مرتبې مشتق تابع ګراف رسم کړئ.

حل:

$$y = \frac{1}{3}x^3$$
$$y' = \frac{3}{3}x^2 = x^2$$
$$y' = x^2$$



دریم مثال: که $y=\sin x+\cos x$ وي، د $(y^{(9)})^2+y^2$ قیمت پیدا کړئ.

حل: لومړی د تابع نهمه مرتبه مشتق یا $(y^{(9)})$ په لاس راوړو:

$$y=\sin x+\cos x$$
$$y'_{(x)}=\cos x+(-\sin x)=\cos x-\sin x$$
$$y''_{(x)}=-\sin x-(\cos x)=-\sin x-\cos x$$
$$y'''_{(x)}=-\cos x-(-\sin x)=\sin x-\cos x$$
$$\vdots$$
$$f'^{(9)}_{(x)}=\cos x-\sin x$$
$$(y^{(9)})^2+y^2=(\cos x-\sin x)^2+(\sin x+\cos x)^2$$
$$=\cos^2 x-2\sin x\cos x+\sin^2 x+\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x$$
$$=2\sin^2 x+2\cos^2 x=2(\sin^2 x+\cos^2 x)=2$$

څلورم مثال: د $y=2x^6-3x^5-2x^3-3x^2-1$ د تابع پنځه ځلي مشتق پیدا کړئ.

$$y=2x^6-3x^5-2x^3-3x^2-1$$
$$y'=12x^5-15x^4-6x^2-6x$$
$$y''=60x^4-60x^3-12x-6$$
$$y'''=240x^3-180x^2-12$$
$$y^{(4)}=720x^2-360x$$
$$y^{(5)}=1440x-360$$

یادونه: که چېرې n – ام درجه‌يي څو جمله‌يي تابع $c_n\neq 0$ $f_{(n)}(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+\ ...+c_nx^n$ راکړی شوی وي n – ام مشتق يې په لاندې ډول په لاس راځي:

$$f_{n(x)}=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+\ ...\ +c_nx^n \qquad c_n\neq 0$$
$$f'_{(x)}=c_1+2c_2x+3c_3x^2+\ ...\ +nc_nx^{n-1}$$
$$f''_{(x)}=2c_2+6c_3x+\ ...\ +n(n-1)c_nx^{n-2}$$
$$f'''_{(x)}=6c_3+12c_4x+\ ...\ +n(n-1)(n-2)c_nx^{n-3}$$
$$f^n(x)=n(n-1)(n-2)\ ...\ c_n=n!c_n$$

په عمومي ډول که $k>n$ وی، نو: $f^k(x)=0$

پوښتنې

د لاندې تابعګانو تر هغې مشتق ونیسئ چې د مشتق تابع له صفر سره مساوي شي.

1) $y=4x^4-3x^3-2x$

2) $y=(5x-2)^3$

3) $y=a+b+c^2-x-ax-bx-cx^3-c^3x$

4) $y=\sin x$

– که چېرې د $P(x, f(x))$ او $Q(x+h, f(x+h))$ ټکی د $f(x)$ تابع دوه اختیاري ټکي وي، نو لاندې اړیکه د Newton خارج قسمت په نامه یادېږي:

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{x+\Delta x-x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

د منحني د مماس میل په یوه اختیاري ټکي کې عبارت دی، له:

$$m_T=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

د یوې تابع مشتق: د تابع او متحول د تزاید، د نسبت لیمیټ کله چې $\Delta x \to 0$ وکړي، د مشتق په نامه یادېږي او په $f'(x)$, $\frac{dy}{dx}$ سره ښودل کېږي.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x)=y'$$

که چېرې د $f(x)$ تابع د (x_0) په یوه ټکي کې د مشتق وړ وي، نو $f'(x)$ د مماس میل د منحني سره د $(x_0, f(x_0))$ په ټکي کې دی.

که د f تابع د $x=x_0$ په ټکي کې د مشتق وړ وي، نو دا تابع په x_0 کې متمادي ده، خو ددې برعکس سمه نه ده، یعنې کېدای شي یوه تابع په یوه ټکي کې متمادي وي، ولې په هغه ټکي کې د مشتق وړ نه وي.

د $f(x)$ د تابع مشتق د C پر منحني $P(x_0, f(x_0))$ په ټکي کې د مماس له میل سره برابر دی.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'=\tan\alpha=\tan\theta=m_\Delta$$

د تماس په ټکي کې له یوې منحني سره د مماس میل د هغې تابع د مشتق په نوم یادېږي.

که د یوې تابع مشتق ونیول شي، نو یوه تابع په لاس راځي چې دا د مشتق تابع بلل کېږي.

که د f تابع د (x_0-r, x_0+r) په فاصله کې(په شاوخوا $x_0=x$) کې تعریف شوې وي او د هغې لیمیټ موجود وي، په دې حالت کې کولای شو چې یو مماس خط د $f(x)$ د تابع په منحني د $x=x_0$ په ټکي کې رسم کړو، د دې مماس میل عبارت دی له: $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

د مشتق قوانین:

$$1)\ \ f(x)=C \quad \Rightarrow \quad f'(x)=0$$

$$2)\ \ f(x)=x^n \quad \Rightarrow \quad f'(x)=n\cdot x^{n-1}$$

$$3)\ \ f(x)=u\pm v \quad \Rightarrow f'(x)=u'\pm v'$$

$$4)\ \ f(x)=u\cdot v \quad \Rightarrow \quad f'(x)=u'v+v'u$$

$$5)\ \ f(x)=\frac{u}{v} \quad , \quad v\neq 0 \ \Rightarrow \ f'(x)=\frac{u'v-v'u}{v^2}$$

$$6)\ \ f(x)=\sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$7)\ \ f(x)=\sqrt{u} \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

$$8)\ \ f(x)=\sqrt[n]{u} \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\frac{u'}{n\cdot\sqrt[n]{u^{n-1}}}$$

د مرکبو توابعو مشتق: $y'_{(x)}=y'_{(u)}\cdot u'_{(x)}$

د مثلثاتي تابع‌گانو مشتق:

$$1)\ \ y=\sin x \quad \Rightarrow \quad y'=\cos x \qquad , \qquad y=\sin u \quad \Rightarrow \quad y'=u'\cos u$$

$$2)\ \ y=\cos x \quad \Rightarrow \quad y'=-\sin x \quad , \qquad y=\cos u \quad \Rightarrow \quad y'=-u'\sin u$$

که د $y=f(x)$ تابع مشتق منونکی وي، په بشپړ ډول n - ام ځلي مشتق يې $y^{(n)}=f^{(n)}(x)$ دی.

د دويم څپرکي پوښتنې

لاندې پوښتنو ته څلور ځوابونه درکړل شوي دي، سم ځواب په نښه کړئ:

1- $f(x)=x^2-x$ منحني ميل د $P(3,0)$ په ټکي کې عبارت دی له:

$a)\ 3$ $b)\ -3$ $c)\ 5$ $d)\ -5$

2- د $f(x)=2x^2$ په تابع کې د f متوسط بدلون د $[3\ ,4]$ په انټروال کې عبارت دی له:

$a)\ 18$ $b)\ 14$ $c)\ -14$ $d)\ 32$

3- د $y=2x^2-3x^{-1}$ تابع مشتق عبارت دی له:

$a)\ y'=4x^2+3$ $b)\ y'=4x+\frac{1}{2}x$ $c)\ y'=4x+\frac{3}{x^2}$ $d)\ y'=4x$

4– د $f(x)=\sqrt{x-1}$ تابع مشتق عبارت دی له:

$a)\ 0$ $b)\ \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$ $c)\ \frac{x-1}{2\sqrt{x}}$ $d)\ \frac{-1}{2\sqrt{x-1}}$

5– د $f(x)=2x^2+x$ تابع د $x=1$ په ټکي کې د مماس خط معادله عبارت ده له:

$a)\ y=5x-2$ $b)\ y=x-3$ $c)\ y=5$ $d)\ y=5x$

6- د $y=\frac{2x}{-x+4}$ تابع مشتق عبارت دی له:

$a)\ y'=-4x+8$ $b)\ y'=-2$ $c)\ y'=\frac{4x+8}{(-x+4)}$ $d)\ y'=\frac{8}{(-x+4)^2}$

7– د $y=(2-x^2)^3$ تابع مشتق عبارت دی له:

$a)\ y'=-6x^5+2x^3-24x$ $b)\ y'=3(2-x^2)^2$ $c)\ y'=3(-2x)^2$ $d)$ هېڅ يو

8– د $y=\sin x$ تابع مشتق عبارت دی له:

$a)\ y'=\sin x$ $b)\ y'=\cos x$ $c)\ y'=-\sin x$ $d)\ y'=-\cos x$

9– د $y=(1+x^4)^{\frac{-1}{5}}$ تابع مشتق عبارت دی له:

$a)\ y'=-\frac{4}{5}x^3(1+x^2)^{\frac{-6}{5}}$ $b)\ y'=-\frac{1}{5}(1+x^2)^{\frac{-6}{5}}$

$c)\ y'=-4x^3$ $d)$ هېڅ يو

10– د $y=\frac{\cos}{1-\cos x}$ تابع مشتق عبارت دی له:

$a)\ y'=\frac{\sin x}{(1-\cos x)^2}$ $b)\ y'=\frac{-\sin x}{(1-\cos x)}$ $c)\ y'=\frac{-\sin x}{(1-\cos x)^2}$ $d)$ هېڅ يو

لاندې پوښتنې حل کړئ.

1. د $f(x)=\dfrac{2\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

2. د $f(x)=\dfrac{x+\sqrt{x-x^2}}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}}$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

3. د $f(x)=(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)$ تابع مشتق پیدا کړئ.

4. د $f(x)=(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x}+4)$ تابع مشتق پیدا کړئ.

5. د $f(x)=\sin x\cdot\cos x$ د تابع مشتق د $\dfrac{\pi}{4}$ په ټکي کې پیدا کړئ.

6. د $f(x)=\dfrac{(\sin x+\cos x)^2}{1+\sin 2x}$ تابع مشتق پیدا کړئ.

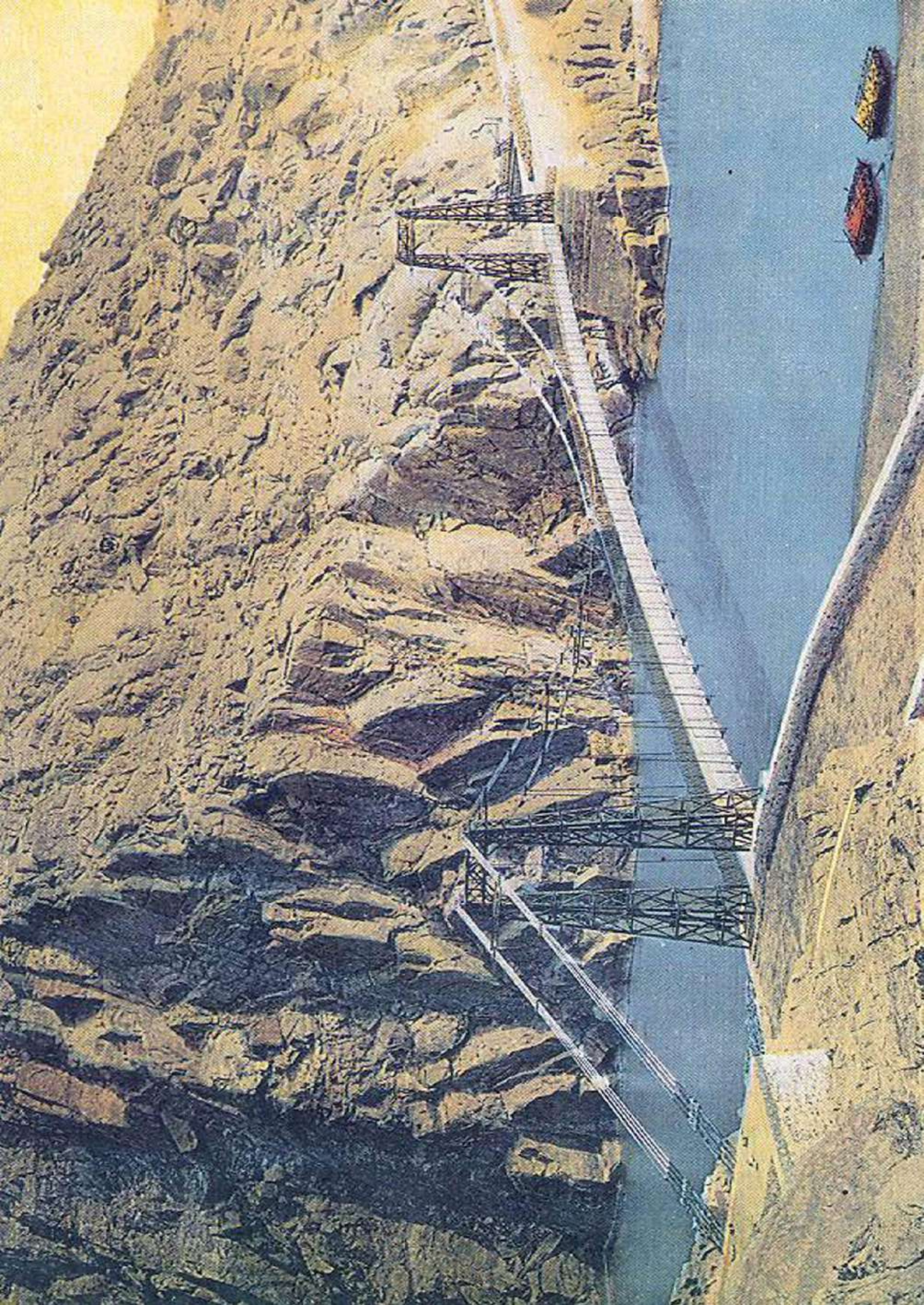
7. د $y=\cos x$ تابع اتمه مرتبه مشتق پیدا کړئ.

8. د $y=\sin^2 x+\cos^2 x$ تابع نهمه مرتبه مشتق پیدا کړئ.

9. د $x^2+xy+y^2=3$ تابع ضمني مشتق پیدا کړئ.

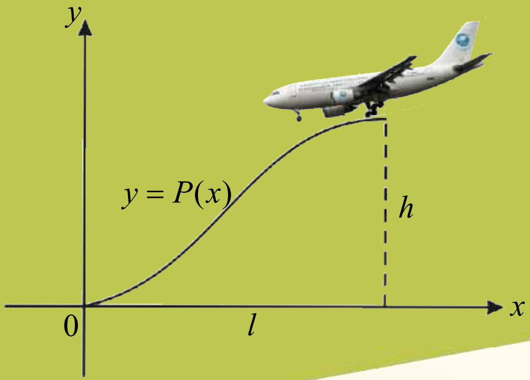
دریم څپرکی

د مشتق د استعمال ځایونه



د مشتق د استعمال ځایونه

د مخامخ شکل د ارتفاع په اړه خپل نظر بیان کړئ.

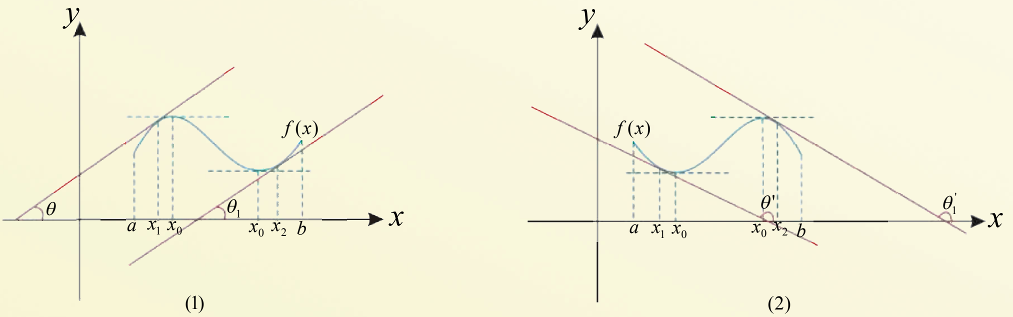


له مشتق څخه په ډېرو ځایونو کې، لکه: (په فزیك کې د حرکت، سرعت او تعجیل اړوند معادلې د مشتق څخه په ګټه اخیستنې سره حلېږي همدارنګه په کیمیا کې هم، د تابع د تحولات، د ځینو لیمیټونو په پیدا کولو کې) کار اخیستل کېږي چې ځینې ځایونه یې دلته تر څېړنې لاندې نیسو.

I- د یوې تابع تحولات:

فعالیت

لاندې شکلونو ته پاملرنه وکړئ:



- متزایدې او متناقصې توابع څه ډول توابع دي؟
- د (1) شکل په (a,b) انتروال کې د x_0، x_1 او x_2 په ټکو کې د رسم شویو مماسونو میلونه د (2) شکل له مماسونو سره پرتله کړئ.
- په (1) او (2) شکلونو کې تر ټولو لوړ ټکی او تر ټولو ټیټ ټکی په ګوته کړئ.

- په پورته شکلونو کې وښيي چې کومه تابع په کومه ساحه کې متزايده او په کومه ساحه کې تابع متناقصه ده؟
- په متزايده، متناقصه او ثابته تابع کې مشتق و څېړئ.

د پورته فعاليت پايله داسې بيانوو:

1- که د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انتروال کې متمادي او په (a,b) انتروال کې د مشتق وړ وي، نو که چېرې په ورکړل شوي انټروال کې $f'(x)>0$ وي، تابع په هغه انتروال کې متزايده بلل کېږي.

2- که چېرې د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انتروال کې متمادي او د (a,b) په انتروال کې د مشتق وړ وي که به ورکړ شوي انټروال کې $f'(x)<0$ وي، نو تابع په هغه فاصله کې متناقصه بلل کېږي.

يادونه: د تابع له تزايد څخه مطلب دا دی چې د x د متحول قيمت په زياتېدو سره د تابع قيمت زيات او د تابع له تناقص څخه مطلب دا دی چې د x د متحول د قيمت په زياتېدو سره د y يا تابع قيمت کم پاتې شي.

لومړی مثال: وښيئ چې د $f(x)=x^3+3x+1$ تابع گراف متزايد ده.

حل: څرنگه چې تابع کسري بڼه نه لري، نو ټول حقيقي عددونه د تعريف ساحه کېدای شي او هم پوهېږو چې د تابع د تزايد شرط $f'(x)>0$ دی، نو لازمه ده چې د تابع مشتق تر مطالعې لاندې ونيسو:

$$f(x)=x^3+3x+1$$

$$f'(x)=3x^2+3$$

ليدل کېږي چې د مشتق لومړی حد تام مربع دی، نو د x د ټولو قيمتونو لپاره همېشه مثبت دی. کله چې (+3) ورسره جمع شي بيا هم قيمت يې مثبت دی، نو د $f'(x)>0$ دی، نو تابع متزايده ده.

دويم مثال: د $f(x)=x^3-3x+5$ تابع په کوم انتروال کې متناقصه ده؟

حل: څرنگه چې د $f(x)$ تابع په هر انتروال کې متمادي او د مشتق وړ ده، نو د متناقص تابع لپاره لرو $f'(x)<0$ دی، يعنې:

$$f'(x)=3x^2-3<0$$

$$f'(x)=0$$

$$3x^2-3=0$$

$$3x^2=3$$

$$x=\pm 1$$

لیدل کېږي چې د تابع مشتق د $-1 < x < 1$ په انتروال کې منفي دی، نو تابع په همدې انتروال کې $(-1,1)$ متناقصه ده.

دريم مثال: د $f(x) = 5x - 4$ تابع تحولات وڅېړئ.

حل: لومړی د تابع د تعریف ساحه پیدا او وروسته د تابع د تزاید شرط په کې څېړو:

$D_f \to IR$

$f(x) = 5x - 4$

$f'(x) = 5 > 0$

څرنګه چې $f'(x) > 0$ نو د ټولو قیمتونو لپاره همېشه مثبت دی. نو تابع متزایده ده.

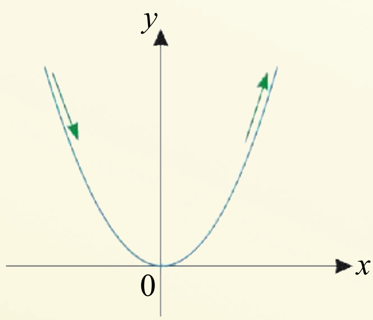
څلورم مثال: د $y = x^2$ د تابع ګراف ته ځیر شئ او وښیئ چې ورکړل شوي تابع په کوم انټروال کې متزایده او په کوم انټروال کې متناقصه ده.

حل: پوهېږو چې که تابع متناقصه وي $y' < 0$ او که تابع متزایده وي $y' > 0$ څخه دی، نو لیکلای شو چې:

$y = x^2 \quad \Rightarrow \quad y' = 2x$

د تناقص شرط $y' < 0 \quad \Rightarrow \quad 2x < 0 \quad \Rightarrow \quad x < 0$

د تزاید شرط $y' > 0 \quad \Rightarrow \quad 2x > 0 \quad \Rightarrow \quad x > 0$



x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
y'		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
y	$+\infty$	↘	4	↘	1	↘	0	↗	1	↗	4	↗	$+\infty$

د تابع له ګراف څخه لیدل کېږي چې تابع د $(-\infty,0)$ په انټروال کې متناقصه او په $(0,+\infty)$ انټروال کې متزایده ده.

پوښتنې

1- د $f(x)=ax+b$ د تابع تحولات وښيئ؟

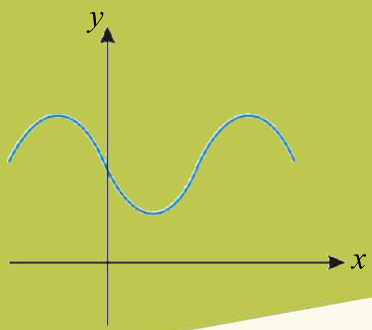
2- د $y=\frac{-3}{4}x-1$ د تابع تحولات وښيئ؟

3- وښياست چې د $f(x)=2x^2+3x+1$ تابع په کوم انټروال کې متزايده ده؟

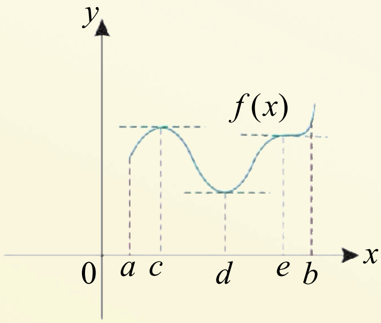
4- د $y=x^2+3x+2$ د تابع د تزايد انټروال و ټاکئ؟

د يوې تابع بحراني $(Critical\ Point)$ ټکي $($ اعظمي $Maximum$ او اصغري $Minimum)$

په مخامخ شکل کې تر ټولو لوړ ټکی او تر ټولو ټیټ ټکی وښيئ او ووايئ چې دا ټکي د څه په نامه یادیږي؟



که په لاندیني شکل کې د $f(x)$ تابع د (a,b) په انټروال کې د مشتق وړ وي.



- د متحول د قیمت په زیاتوالي په کوم انټروال کې د تابع قیمت لوییږي.
- د متحول د قیمت په کموالي په کوم انټروال کې د تابع قیمت کمیږي.
- د تابع تحولات په (c,d) او (d,e) انټروال کې وڅیړئ.
- د $f(x)$ تابع مشتق په کومو ټکو کې له صفر سره مساوي دی.

د پورته فعالیت پایله داسې بیانوو:

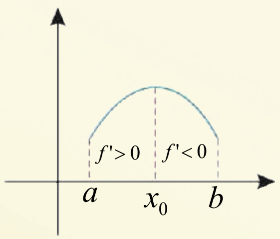
د يوې تابع په ګراف کې د y پر محور تر ټولو لوړې نقطې ته اعظمي(maximum) او تر ټولو ټيټې نقطې ته د تابع اصغري(minimum) نقطه وايي، د x د هغو قيمتونو لپاره چې تابع اعظمي او يا اصغري قيمتونه اخلي د بحراني(*Critical Point*) نقطو په نامه يادېږي.

تعريف:

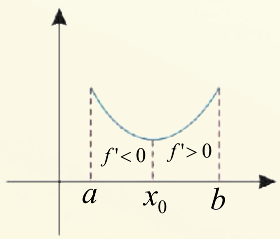
1- **ثابته تابع**: که چېرې د يوې تابع لومړی مشتق هميشه له صفر سره مساوي وي تابع ته ثابته تابع وايي.

2- **متزايده تابع**: که چېرې د يوې تابع لومړی مشتق د (a,b) په فاصله کې مثبت وي تابع په هغه فاصله کې متزايده بلل کېږي، يعنې $y'>0$ چې په لاندې شکلونو کې ليدل کېږي.

3- **متناقصه تابع**: که چېرې د يوې تابع لومړی مشتق د (a,b) په فاصله کې منفي وي يعنې $y'<0$ وي، تابع په هغه فاصله کې متناقصه بلل کېږي چې په لاندې شکلونو کې ليدل کېږي.



(1)



(2)

1- **اعظمي ټکی**: که چېرې د $y=f(x)$ تابع د x_0 په معين ټکي کې د تزايد له حالت څخه د تناقص حالت ته بدل شي يا په بل عبارت د x_0 په دې معين ټکي کې د مشتق اشاره له مثبت څخه منفي ته بدله شي د x_0 په نقطه کې د تابع قيمت د اعظمي(maximum) په نامه يادېږي.

2- **اصغري ټکی**: که چېرې د $y=f(x)$ تابع د x_0 په معين ټکي کې د تناقص له حالت څخه تزايد حالت ته بدل شي يا په بل عبارت د x_0 په دې معين ټکي کې د مشتق اشاره له منفي څخه مثبت ته بدله شي د x_0 په نقطه کې د تابع قيمت د اصغري (minimum) په نامه يادېږي.

3- **د انعطاف ټکی**: که چېرې مشتق خپله اشاره د x_0 په يوه معين ټکي کې له مثبت څخه صفر ته او بيا مثبت ته يا له منفي څخه صفر او بيا منفي ته بدله کړي x_0 د انعطاف د نقطې *Inflection Point* په نامه يادېږي.

لومړی مثال: د $f(x) = x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 2x$ تابع راکړل شوی ده دا تابع څو د (Extreme) ټکي لري.

حل: د تابع لومړی مشتق پیداکوو بیا هغه مساوي په صفر وضع کوو او د x قیمتونه په لاس راوړو.

$$f'_{(x)} = 3x^2 - 7x + 2$$

$$f'(x) = 0$$

$$3x - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{3}$$

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x_2 = 2$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$		1		2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow$	$\frac{17}{54}$	$\searrow$	-2	$\searrow$	-2	$\nearrow +\infty$
		Max				Min	

په پایله کې ویلای شو چې اصلي تابع دریمه درجه ده، نو د $f(x)$ د تابع مشتق د $(\frac{1}{3})$ او (2) په دوو نقطو کې خپله علامه بدلوي، نو دوه بحراني(Extreme) ټکي لري.

دويم مثال: د $f(x) = \frac{x+1}{x^2 - 2x}$ تابع موضعي Extreme ټکي یا نسبتي ټکي مشخص کړئ.

حل: لومړی د تابع مشتق په لاس راوړو، وروسته یې علامې ټاکو:

لیدل کیږي چې تابع د $y = \frac{u}{v}$ شکل لري، نو $y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2 - 2x}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x - (2x-2)(x+1)}{(x^2 - 2x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-x^2 - 2x + 2}{(x^2 - 2x)^2}$$

دیوه کسر قیمت هغه وخت له صفر سره مساوي دی چې د تابع صورت مساوي له صفر سره وي.

$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow -x^2 - 2x + 2 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 12$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 + \sqrt{12}}{-2} = -2.73$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 - \sqrt{12}}{-2} = 0.73$$

x		-3		-2.73		-1		0.73		1	
$f'(x)$	$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$
$f(x)$	$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$
		$-\frac{2}{15}$		Min		0		Max		-2	

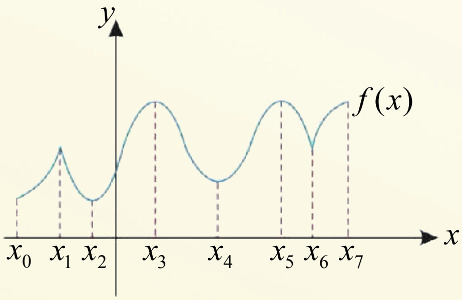
په جدول کې ښکاري چې د f' دواړو خواوو ته x_1 او x_2 خپله علامه بدلوي، نو تابع دوه بحراني Extreme ټکي لري، یعنې تابع اعظمي او اصغري ټکي لري.

مطلق اعظمي او مطلق اصغري ټکي Absolute Maximum & Absolute Minimum

کېدای شي یوه تابع په یوه انټروال کې څو موضعي بحراني ټکي ولري، خو په یوه ټاکلي انټروال کې تابع یوازې یوه مطلقه اعظمي او یوه مطلقه اصغري نقطه لري. په شکل کې یې وښيئ؟

فعالیت

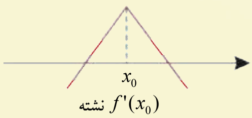
لاندینی شکل ته ځیر شي:

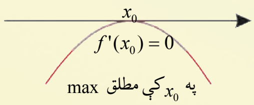


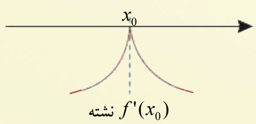
- د $f(x)$ په تابع کې اعظمي او اصغري ټکي وښيئ.
- د $f(x)$ تابع بحراني ټکي په ګوته کړئ.
- پورتنی تابع په ورکړل شوي انټروال کې څو موضعي بحراني ټکي لري.
- پورتنی تابع په ورکړل شوي انټروال کې څو اصغري او اعظمي لري.

د پورته فعالیت پایله داسې بیانوو:

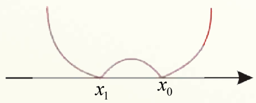
مطلق اعظمي Absolute Maximum: په عمومي ډول د $(x_0, f(x_0))$ ټکی مطلق اعظمي بلل کېږي، که چېرې د $f(x)$ د تعریف په ساحه کې د هر x لپاره $f(x) \le f(x_0)$ وي، نو $f(x_0)$ ته مطلق اعظمي وايي لاندې شکلونه وګورئ.



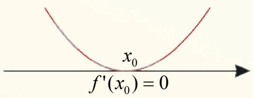




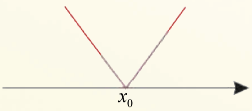
مطلق اصغري Absolute Minimum: په عمومي ډول د $(x_0, f(x_0))$ نقطه مطلقه اصغري بلل کېږي، که چېرې د f د تعريف په ساحه کې د هر x لپاره $f(x) \geq f(x_0)$ وي، نو په دې حالت کې $f(x_0)$ ته مطلقه اصغري وايي، د x هغه قيمتونه چې د هغوی لپاره تابع يا اعظمي او يا اصغري قيمتونه اخلي د x دغه قيمتونه د Extreme په نامه يادېږي.



$f'(x_0)$ او $f'(x_1)$ نشته



په x_0 کې مطلق min



$f'(x_0)$ نشته

لومړی مثال: د $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + 3x - \dfrac{1}{2}$ د تابع مطلق اصغري پيداکړئ.

حل: د $f(x)$ د تابع مشتق نيسو او د مشتق د تابع حلونه په لاس راوړو:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{1}{2}$$

$$f'(x) = x + 3$$

$$f'(x) = 0$$

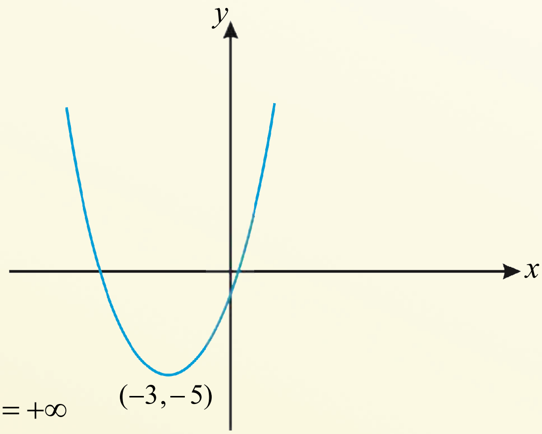
$$x + 3 = 0$$

$$x = -3$$

$$f(-3) = -5$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{1}{2}\right) = +\infty$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to\infty} x^2 + 3\lim_{x\to\infty} x - 1\lim_{x\to\infty} - \frac{1}{2} = +\infty$$



x	$-\infty$		-4		-3		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-\frac{9}{2}$	↘	-5 *Min*	↗	3	↗	$\frac{15}{2}$	↗	$+\infty$

په پايله کې د $x = -3$ په ټکي کې چې د تابع قيمت (-5) دی او تابع په $(-3, -5)$ ټکي کې مطلق اصغري لري.

دويم مثال: د $f(x)=x^3-3x+2$ د تابع اعظمي او اصغري ټکي پيدا او رسم يې کړئ.

حل: د اعظمي او اصغري ټکو د پيدا کولو لپاره لومړی د تابع لومړی مشتق پيدا او بيا د مشتق د تابع صفري ټکي په لاس راوړو.

$f(x)=x^3-3x+2$

$f'(x)=3x^2-3$

$f'(x)=0$

$3x^2-3=0$

$3x^2=3$

$x^2=1$

$x_1=1 \quad , \quad x_2=-1$

$f(-1)=(-1)^3-3(-1)+2$

$=-1+3+2$

$=4$

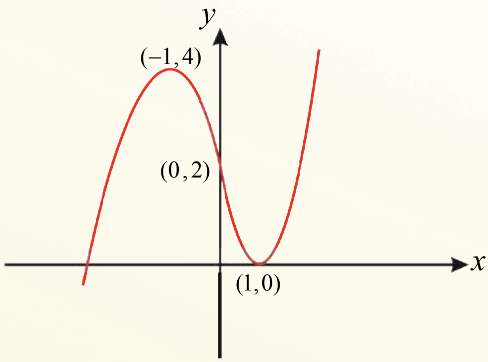
$f(1)=1^3-3\cdot1+2=1-3+2=0$

$f(0)=0-3\cdot0+2=2$

$f(2)=2^3-3\cdot2+2=4$

$f(1)=0 \quad , \quad f(0)=2 \quad , \quad f(-1)=4$

$Max\ f(-1)=4 \qquad Min\ f(1)=0$



x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$-\frac{5}{6}$	↗	4	↘	2	↘	0	↗	4	↗	$+\infty$
					Max				Min				

له جدول څخه ليدل کېږي چې تابع د $(-\infty,-1)$ او $(1,+\infty)$ په انټروالونو کې متزايده او $(-1,1)$ په انټروال کې متناقصه ده، نو د $(1,0)$ نقطه اصغري او د $(-1,4)$ نقطه اعظمي ده.

د يوې تابع د ګراف رسمولو لپاره لاندې ټکي بايد په پام کې ونيسو:

1. د تابع متماديت او نامتماديت مطالعه کړو.
2. د قايمو محورونو سره د ګراف تقاطع.
3. د لومړي مشتق د اشارې مطالعه د تابع د تزايد او تناقص لپاره.
4. د تابع د اعظمي او اصغري ټکو لپاره د مشتق صفري ټکي پيدا کول.
5. د مجانبونو ټاکل.
6. د جدول ترتيبول او د هغوی په مرسته د ګراف رسمول.

دریم مثال: د $y = 2 + x - x^2$ تابع گراف رسم کړئ؟

حل: لیدل کېږي چې تابع د متحول د ټولو قیمتونو لپاره تعریف شوي ده.

1- ددې تابع د تقاطع ټکی د x او y له محورونو سره پیداکوو:

د y له محور سره د گراف تقاطع د ټکو د پیداکولو لپاره په ورکړشوي تابع کې $x = 0$ وضع کوو:

$$x = 0 \qquad y = 2 + 0 - 0 = 2$$

نو پورتنی گراف د y محور په $(0, 2)$ نقطه کې قطع کوي.

د x د محور سره دگراف د تقاطع د ټکو دپیدا کولو لپاره y مساوي په صفر وضع کوو او د x قیمت پیداکوو:

$$y = 0 \ , \ 2 + x - x^2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 2}}{-2} = -\frac{-1 \pm 3}{2}$$

$$x_1 = -1 \ , \ x_2 = 2$$

نو پورتنی گراف د x محور په $(-1, 0)$ او $(2, 0)$ نقطو کې قطع کوي.

2- د تابع اعظمي او اصغري ټکي پیداکوو، ددې کار لپاره دتابع اول او دویم مشتق څېړو.

$$y = 2 + x - x^2$$

څرنگه چې د تابع په اعظمي او اصغري نقطو کې د تابع لومړی مشتق صفر دی نو $y' = 0$ سره وضع کوو:

$$y' = 1 - 2x$$

$$y' = 0 \text{،} \quad 1 - 2x = 0$$

$$-2x = -1 \ \Rightarrow \ 2x = 1$$

$$x = \frac{1}{2}$$

تابع په $x = \frac{1}{2}$ نقطه کې یو اعظمي یو یا اصغري قیمت لري، دهغې دپیژندنې له پاره دتابع دویم مشتق په $x = \frac{1}{2}$ ټکو کې څېړو:

$$y'' = -2 < 0$$

څرنګه چې y'' تل منفي دی، نو په $x=\frac{1}{2}$ کې هم منفي دی، څکه نو تابع په $x=\frac{1}{2}$ ټکی کې یو اعظمي قیمت لري څرنګه چې د $x=\frac{1}{2}$ لپاره $y=2+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=2\frac{1}{4}$ کېږي، نو د تابع اعظمي نقطه داده:

$(\frac{1}{2}، 2\frac{1}{4})$

دامنحني دانعطاف نقطه نه لري، څکه چې دهر x لپاره $y''<0$ دی.

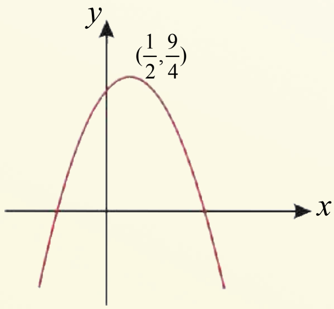
3- په $\pm\infty$ کې دګراف څېړل:

$$\lim_{x\to\infty} y=\lim_{x\to\infty}(2+x-x^2)=\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} y=\lim_{x\to-\infty}(2+x-x^2)=-\infty$$

د زیاتي روښانتیا لپاره لاندې جدول ترتیب شوی، او د تابع ټول بدلونو نه په هغو کې په ګوته کوو او وروسته نوموړی ګراف رسموو.

x		-1		$\frac{1}{2}$		2	
y'	+		+	0	−		−
y	↗	0	↗	$2\frac{1}{4}$	↘	0	↘



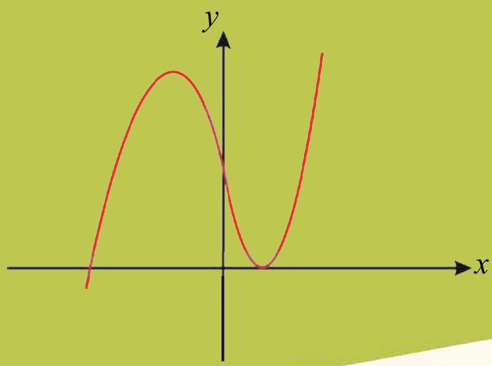
پوښتنې

1- د لاندې توابعو موضعي Extreme ټکی و ټاکئ.

$a)\ \ f(x)=x^2-3x+2$ $\qquad b)\ \ f(x)=\frac{x+1}{x^2}$ $\qquad c)\ y=3x^2-4x+1$

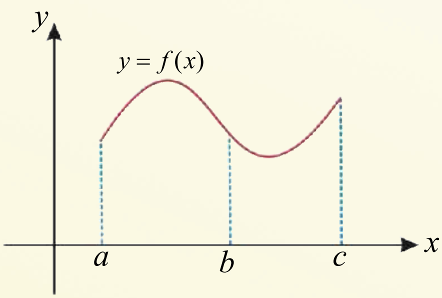
2- د $f(x)=3x^3-4x^2$ د تابع مطلقه min پیدا کړئ.

د انعطاف د نقطې ټاکل



هغه ټکي چې د يوې تـابع ګـراف پـه هغې کـې خپـل محدبيت، مقعريت ته او يا ددې پـر عکـس بـدلوي د څه په نامه يادېږي؟ آيا په دې ټکي کې د دويـم مـشتق علامه او قيمت څېړلای شئ؟

لاندينی شکل په پام کې ونيسئ.

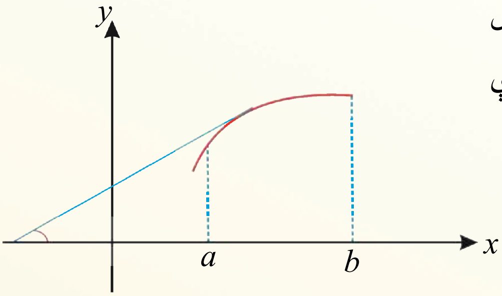


- د $y = f(x)$ د تابع منحني د (a,b) په انټروال کې څه ډول منحني بلل کېږي؟
- د $y = f(x)$ د تابع منحني د (b,c) په انټروال کې څه ډول منحني بلل کېږي؟
- د (a,b) په انټروال کې په منحني يو مماس رسم کړئ او لـه هغـه ممـاس سـره يـې پرتلـه کـړئ چـې د (b,c) په انټروال کې په منحني رسمېږي.

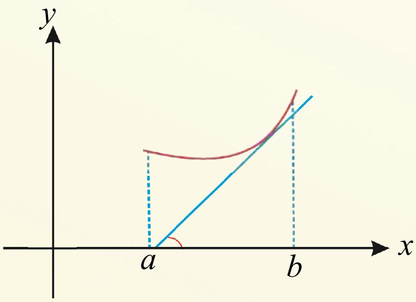
د پورتني فعاليت پايله داسې بيانوو:

1. د $y = f(x)$ تابع منحني په يوه انټروال کې پرسيدلی يا محدب بلل کېږي، کـه چېـرې پـه دې انتـروال کې په منحني مماس رسم شي، نو مماس د منحني له پاسه يا پورته خواتـه پـروت وي، پـه دې صـورت کې د تابع دويم مشتق منفي $y''<0$ په لاس راځي.

په دې ډول که د $y = f(x)$ د تابع دویم مشتق د انټروال په ټولو ټکوکې منفي وي، نو د تابع ګراف یا منحني په دې انټروال کې محدب پاتې کیږي.



2. د $y = f(x)$ د تابع منحني په یوه انټروال کې ننوتي یا مقعره بلل کیږي، که چېرې په نوموړي انټروال کې په منحني مماس رسم شي، نو مماس له منحني څخه لاندې یا ښکته خوا پروت وي، که د $y = f(x)$ د تابع دویم مشتق د انټروال په ټولو ټکو کې مثبت وي $y''>0$ وي، منحني په دې انټروال کې مقعره بلل کیږي.



تعریف: هغه نقطه چې تابع له مقعریت څخه محدبیت ته او یا ددې پر عکس جهت بدلوي، او لومړی مشتق یې موجود او دویم مشتق یې صفر شي د انعطاف (Inflection) نقطه بلل کیږي.
که د $y = f(x)$ تابع د $x = x_0$ په ټکي کې چې د تابع دویم مشتق صفر شي ($f''(x_0)=0$) وي تابع د $x = x_0$ په ټکي کې د انعطاف نقطه لري او ددې برعکس تابع د انعطاف نقطه نه لري.

لومړی مثال: د $f(x) = x^2 - 5x + 4$ د تابع ګراف رسم محدبیت او مقعریت یې وڅیړئ.

حل: تابع د متحول د ټولو قیمتونو لپاره تعریف شوې ده.

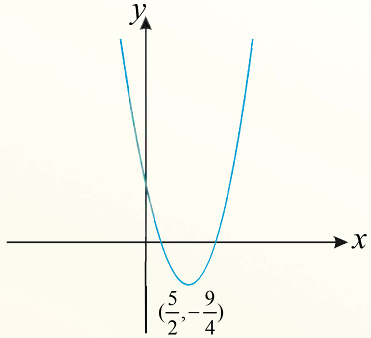
1- د y له محورسره تقاطع

$$\left.\begin{array}{l} x=0 \\ y=4 \end{array}\right\} \Rightarrow (0,4)$$

2- د x له محورسره تقاطع

$$\left.\begin{array}{l} y=0 \\ x^2-5x+4=0 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2-5x+4=(x-4)(x-1) \Rightarrow x_1=4 \quad , \quad x_2=1$$

د x له محور سره د تقاطع ټکي $(4,0)$ او $(1,0)$ دي.



x	$-\infty$	0	1	$\frac{5}{2}$	4	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	
$f(x)$	$+\infty \searrow$ 4	$\searrow$ 0	$\searrow -\frac{9}{4}$ min	$\nearrow$ 0	$\nearrow +\infty$	

د ګراف، مقعریت او محدبیت د څېړلو لپاره د تابع دویم مشتق په لاس راوړو:

$$f(x)=x^2-5x+4 \quad \Rightarrow \quad y'=2x-5$$
$$f''(x)=2>0$$

څرنګه چې $y''>0$ دی، نو په پایله کې ویلای شو چې منحني نونتې یا مقعره ده.

دویم مثال: هغه انټروالونه وټاکئ چې په هغې کې د $y=x^3+9x^2-6x+1$ تابع ګراف محدب یا مقعر وي.

حل:

$$y=x^3+9x^2-6x+1$$
$$y'=3x^2+18x-6 \quad \Rightarrow \quad y''=6x+18$$
$$y''<0 \quad \Rightarrow \quad 6x+18<0$$
$$6x<-18 \quad \Rightarrow \quad x<-3$$
$$y''>0 \quad \Rightarrow \quad 6x+18>0$$
$$6x>-18$$
$$x>-3$$

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
y''	$-$	0	$+$
y	$\cap$		$\cup$

محدب انعطاف مقعر

څرنګه چې لیدل کېږي د تابع دویم مشتق په $(-\infty,-3)$ انټروال کې منفي او د $(-3,+\infty)$ انټروال کې مثبت دي، نو دا ډول ګراف په لومړي انټروال کې محدب او په دویم کې مقعر دی.

دریم مثال: د $f(x)=x^5-5x^3$ د تابع د انعطاف ټکی و ټاکئ؟

حل:

$$f(x)=x^5-5x^3 \quad \Rightarrow \quad f'(x)=5x^4-15x^2$$

$$f''(x)=20x^3-30x$$

$$f''(x)=0$$

$$20x^3-30x=0$$

$$x(20x^2-30)=0$$

$$x_1=0$$

$$20x^2-30=0$$

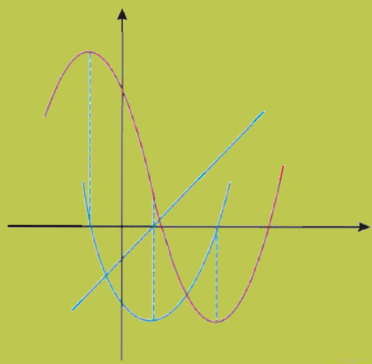
$$x^2=\frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad x_2=\sqrt{\frac{3}{2}} \quad , \quad x_3=-\sqrt{\frac{3}{2}}$$

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{3}{2}}$		0		$\sqrt{\frac{3}{2}}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\cap$	-13.65	$\cup$		$\cap$	$-6\sqrt{\frac{3}{2}}$	$\cup$	

لیدل کېږي چې په $x=\sqrt{\frac{3}{2}}$ او $x=0$, $x=-\sqrt{\frac{3}{2}}$ کې د تابع دویم مشتق صفر دی یا $f''(x)=0$ علامه بدلوي او په دې ټکو کې مماس رسمیدلی شي چې هغه ټکی د انعطاف ټکی دی.

پوښتني

1. د $f(x)=x^2-4$ د تابع محدبیت او مقعریت وټاکئ.
2. د $f(x)=-2x^2-1$ د تابع د انعطاف نقطه وټاکئ.



د منحنيګانو رسمول

د دويمې درجې تابعګانو ګراف

د مخامخ شکل په اړه خپل نظر بيان کړئ.

- د $f(x) = x + 1$ د تابع ګراف د $f(x) = -x + 1$ د تابع له ګراف سره پرتله کړئ.
- د $y = ax^2 + bx + c$ د تابع د تعريف ساحه و ټاکئ آيا دا تابع متمادي ده؟
- د نوموړې تابع لومړی مشتق پيدا او د Maximum او Minimum ټکي او د تناظر محور يې وټاکئ.
- د تابع ليميټ په هغه صورت کې پيدا کړئ چې $x \to \pm\infty$ وکړي.
- له محورونو سره د تقاطع ټکي و ټاکئ.
- د تحولاتو جدول ترتيب او نوموړی منحني رسم کړئ.

د پورته فعاليت پايله داسې بيانوو:

1- د تابع د تعريف ساحه: ليدل کېږي چې تابع د متحول د ټولو قيمتونو لپاره تعريف شوې ده، يعنې:

$$D_f \to (-\infty, +\infty)$$

نو تابع د خپل تعريف په ساحه کې متمادي ده.

2- د تابع د بحراني ټکو او د تناظر محور ټاکل:

$$f'(x) = 2ax + b = 0$$
$$f'(x) = 0$$
$$2ax + b = 0$$
$$2ax = -b$$
$$x = \frac{-b}{2a}$$

د $x=\frac{-b}{2a}$ قیمت په اصل تابع کې وضع کوو:

$$y=a(-\frac{b}{2a})^2+b(-\frac{b}{2a})+c \quad \Rightarrow \quad a\cdot\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{2a}+c=0$$

$$y=\frac{b^2-2b^2+4ac}{4a}=\frac{-b^2+4ac}{4a} \quad \Rightarrow \quad \frac{4ac-b^2}{4a}$$

د $(-\frac{b}{2a}\ ,\ \frac{4ac-b^2}{4a})$ ټکی بحراني یعني اعظمي یا اصغري دی.

الف: که $a>0$ وي، نو: $a>0 \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

تابع په $(\frac{-b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a})$ ټکي کې Min لري.

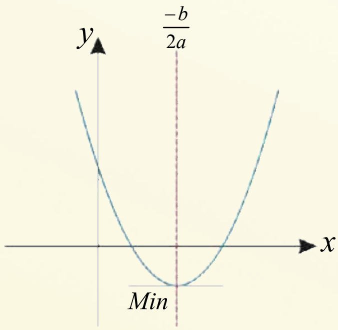
ب: که $a<0$ وي، نو: $a<0 \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

تابع په $(\frac{-b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a})$ ټکي کې Max لري.

3- د ګراف د رسمولو لپاره جدول ترتیب او ګراف یې رسموو:

$a>0$

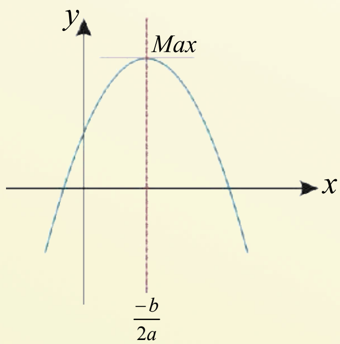
x	$-\infty$		$\frac{-b}{2a}$		$+\infty$
y'		$-$		$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{4ac-b^2}{4a}$	$\nearrow$	$+\infty$



څرنګه چې $a>0$ د منحني خوله(جهت) پورته خواته او د $(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4})$ اصغري نقطه ده.

$a<0$

x	$-\infty$		$\frac{-b}{2a}$		$+\infty$
y'		$+$		$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{4ac-b^2}{4a}$	$\searrow$	$-\infty$



څرنګه چې $a<0$ د منحني خوله(جهت) ښکته خواته او د $(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4})$ اعظمي نقطه ده.

لومړی مثال: د $f(x)=x^2-4x+3$ د تابع تحولات مطالعه او ګراف يې رسم کړئ.

حل:

1- د تابع د تعريف ساحه $(-\infty,+\infty)$ تا بع د ټولو حقيقي قيمتونو لپاره تعريف شوي ده، نو تـابع پـه دې انتـروال کې متمادي ده.

2- د تابع د منحني تقاطع د x له محور سره:

$$\left.\begin{array}{l} y=0 \\ x^2-4x+3=0 \\ (x-1)(x-3)=0 \\ x-1=0 \Rightarrow x=1 \\ x-3=0 \Rightarrow x=3 \end{array}\right\} (1,0) \quad , \quad (3,0)$$

3- د تابع د منحني تقاطع د y له محور سره:

$$\left.\begin{array}{l} x=0 \\ y=0-4\cdot 0+3 \\ y=3 \end{array}\right\} (0,3)$$

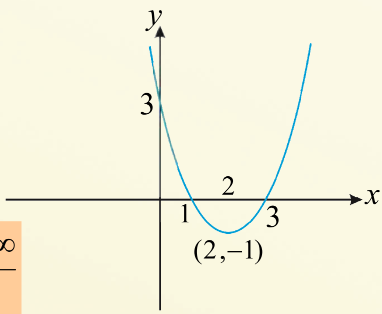
4- د تابع د extreme ټکو د پيداکولولپاره د لومړي مشتق صفري ټکي پيدا او جدول يې ترتيبوو:

$$f'(x)=2x-4=0 \Rightarrow 2x=4 \Rightarrow x=2$$

$$f(2)=2^2-4\cdot 2+3=-1 \ \} \Rightarrow V(2,-1)\min$$

$$x\to\pm\infty \Rightarrow f(x)\to\pm\infty$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\left[x^2-4x+3\right]=+\infty$$



x	$-\infty$		0		1		2		3		$+\infty$
y'		$-$		$-$		$-$		$+$		$+$	
y	$-\infty$	↘	3	↘	0	↘	-1 Min	↗	0	↗	$+\infty$

دويم مثال: د $f(x)=-x^2+2x$ د تابع تحولات مطالعه او ګراف يې رسم کړئ.

حل: ليدل کېږي چې تابع د ټولو قيمتونو لپاره تعريف شوې ده، نو:

1- د تابع د تعريف ساحه عبارت ده له: $(-\infty,+\infty)$ چې په دې ساحه کې تابع متمادي ده.

2- د تابع د منحني د تقاطع ټکی د x له محور سره:

$$f(x)=0$$
$$-x^2+2x=0$$
$$x(-x+2)=0$$
$$x_1=0 \qquad (0,0)$$
$$-x+2=0$$
$$x_2=2 \qquad (2,0)$$

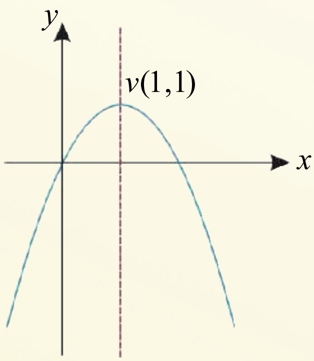
د تقاطع ټکی

3- د تابع د منحني تقاطع د y له محور سره:

$$x=0$$
$$f(x)=-x^2+2x$$
$$f(x)=0+2\cdot 0$$
$$f(x)=0 \qquad (0,0)$$

4- د تابع د extreme نقطو د پیدا کولو لپاره د تابع لومړی مشتق پیدا کوو او جدول یې ترتیب او ګراف یې رسموو:

$$D_f \to (-\infty,+\infty)$$
$$f(x)=-x^2+2x$$
$$f'(x)=-2x+2=0$$
$$-2x+2=0$$
$$-2x=-2$$
$$\left.\begin{array}{l} x=1 \\ f(1)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow V(1,1)Max$$



x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		+		+		−		−	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	1 (Max)	↘	0	↘	$-\infty$

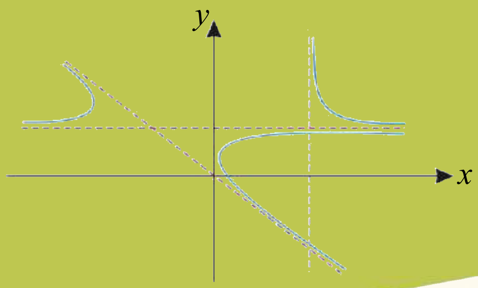
په جدول کې لیدل کېږي چې د مشتق علامه د مثبت څخه منفي ته او یا د تزاید حالت څخه تناقص ته شکل بدلوي، نو تابع د $(1,1)$ په ټکي کې اعظمي ده.

پوښتني

1. د $f(x)=2x^2-x-1$ د تابع ګراف رسم کړئ.
2. د $f(x)=x^2-x-2$ د تابع د ګراف بدلونونه وڅېړئ او ګراف یې رسم کړئ.

د توابعو د ګرافونو مجانبونه

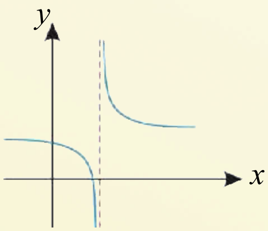
شکل ته پام وکړئ ټکي ټکي کرښې د څه په نامه یادیږي، نومونه یې واخلئ.



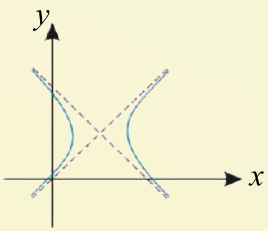
- مجانبونه څه ډول کرښې دي؟
- مجانبونه، منحنيګانې په کومو ټکو کې قطع کوي؟

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

مجانبونه: هغه مستقیمې کرښې دي چې د منحني د ګراف لپاره د لارښود حیثیت لري او د منحني کرښه قطع کړي، هغه تابع ګانې چې د متحول د ځینو قیمتونو لپاره غیر متمادي وي، مجانبونه لري او په درې ډوله دي.

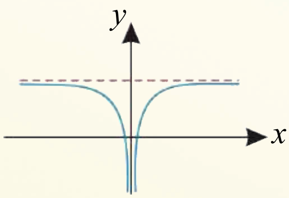


1- **عمودي مجانب**: د $y=f(x)$ تابع عمودي مجانب لري چې $x\to a$ او $y\to\infty$ وکړي، یعنې $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty$ شي یا په بل عبارت په کسري تابع ګانو کې که چیرې د کسر مخرج مساوي په صفر شي، نوموړی تابع بې‌نهایت خوا ته تقرب کوي، نو ددې ډول مجانب د پیداکولو لپاره د کسر مخرج له صفر سره مساوي وضع کوو.



2- **مایل مجانب**: د $y=f(x)$ کسري تابع کله چې د صورت او مخرج د تقسیم حاصل د یوه مستقیم خط په شکل ($y=ax+b$) لاسته راشي داسې چې $a\neq 0$ وي په لاس راځي او دا هغه وخت امکان لري چې تابع د مایل مجانب لرونکی وي، یعنې د متحول د صورت درجه د متحول د مخرج له درجې څخه د یو واحد په اندازه لوړه وي.

په یاد ولرئ چې که یوه تابع د افقي مجانب لرونکي وي، مایل مجانب نه لري او بر عکس که چېرې مایل مجانب ولري افقي مجانب نه لري.



3- **افقي مجانب**: یوه تابع هغه وخت د افقي مجانب لرونکې ده چې که $x \to \pm\infty$ وکړي د تابع قیمت یو ثابت مقدار شي او یا په بل عبارت یوه تابع هغه وخت د افقي مجانب لرونکې ده چې که $x \to \pm\infty$ وکړي، نو $y \to c$ ته تقرب کوي، یعني $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = c$ شي.

لومړی مثال: د $f(x) = \dfrac{x+1}{2x-4}$ تابع عمودي او افقي مجانب پیدا کړئ.

حل: د عمودي مجانب د پیدا کولو لپاره د کسر مخرج مساوي په صفر وضع کوو، لرو چې:

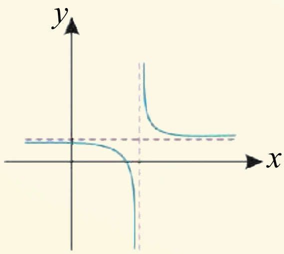
$$2x-4=0 \Rightarrow 2x=4 \Rightarrow x=2$$

نو $x=2$ د تابع عمودي مجانب دی.

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x+1}{2x-4}\right) = \frac{1}{2}$$

افقي مجانب عبارت دی له: $y = \dfrac{1}{2}$

x	-1	0	$+1$
y	0	$-\dfrac{1}{4}$	-1



دویم مثال: د $y = \dfrac{x^2+2x-1}{x}$ تابع د منحني مجانبونه وټاکئ.

حل:

1- مایل مجانب: ددې مجانب د پیدا کولو لپاره د تابع صورت د تابع پر مخرج وېشو:

$$y = \frac{x^2+2x-1}{x} = x+2-\frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad y = x+2$$

2- عمودي مجانب: د دې مجانب د پیدا کولو لپاره د تابع مخرج مساوي په صفر وضع کوو:

$$y = \frac{x^2+2x-1}{x} \quad \Rightarrow \quad x=0$$

3- افقي مجانب: څرنګه چې تابع مایل مجانب لري، نو افقي مجانب نه لري.

دریم مثال: د $f(x)=\dfrac{(x-3)(x+2)}{(x+1)(x-2)}$ تابع مجانبونه وټاکئ.

حل:

1- عمودي مجانب: د تابع مخرج مساوي په صفر وضع کوو:

$$(x+1)(x-2)=0$$

$$\left.\begin{array}{l} x+1=0 \\ x_1=-1 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x-2=0 \\ x_2=2 \end{array}$$

نو $x=2$ او $x=-1$ د تابع عمودي مجانبونه دي.

2- افقي مجانب: د افقي مجانب د پیداکولو لپاره د تابع لېمیټ په لاس راوړو:

$$y=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-3)(x+2)}{(x+1)(x-2)}=1$$

نو $y=1$ د تابع افقي مجانب دی.

3- څرنگه چې تابع افقي مجانب لري، نو مایل مجانب نه لري.

د مجانبونو د ټاکلو عمومي طریقه:

که چېرې د $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ په ناطقه تابع کې m او n په ترتیب سره د صورت او مخرج درجې وي، نو:

الف: که $m<n$ وي، نو د x محور افقي مجانب دی.

ب: که $m=n$ وي، نو $y=b$ افقي مجانب دی، داسې چې b د m او n د درجو د حدودو د ضریبونو نسبت دی.

ج: که چېرې $m>n$ وي، نو افقي مجانب نه لري، ولې د مایل مجانب احتمال یې شته.

د: که چېرې $m=n+1$ وي(که د صورت درجه د یوه واحد په اندازه له مخرج څخه لویه وي) تابع هرو مرو مایل مجانب لري، په دې حالت کې افقي مجانب نه لري.

پوښتنې

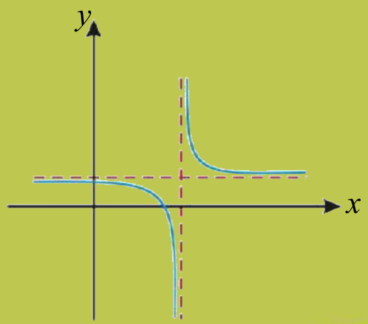
د لاندې توابعو مجانبونه وټاکئ.

1) $f(x)=\dfrac{3x-6}{x^2-x-2}$ 2) $f(x)=\dfrac{-2x^2}{x^2+1}$

3) $f(x)=\dfrac{8}{x^2-4}$

د هوموګرافيک تابع ګانو ګراف

شکل ته پاملرنه وکړئ دا شکل د څه ډول تابع ګراف دی؟ افقي او عمودي مجانبونه يې وښيئ.



- هوموګرافيک تابع څه ډول تابع ده، په يوه مثال کې يې واضح کړئ.
- د $y=\frac{1}{x}$ د تابع ګراف رسم کړئ.
- د نوموړي تابع مجانبونه لومړی پيدا او بيا يې رسم کړئ.
- د تابع د ګراف تقاطع د x او y له محورونو سره پيدا کړئ.

د پورتني فعاليت پايله داسې بيانوو:

هغه تابعګانې چې د $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ شکل ولري، هوموګرافيک تابع ګانې بلل کېږي، داسې چې $c\neq 0$ وي. دا ډول توابع دوه مجانبونه لري چې:

1- افقي مجانب يې: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{ax}{x}+\frac{b}{x}}{\frac{cx}{x}+\frac{d}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{a+\frac{b}{x}}{c+\frac{d}{x}}\Rightarrow y=\frac{a}{c}$

2- عمودي(قايم) مجانب يې: $cx+d=0 \Rightarrow cx=-d \Rightarrow x=-\frac{d}{c}$

لومړی مثال: د $f(x)=\frac{2x-1}{x-3}$ د تابع بدلونونه وڅېړئ او ګراف يې رسم کړئ.

حل:

$$x-3=0$$
$$x=3$$

1. ځرنګه چې د تابع مخرج د $x=3$ په قيمت کې صفر کېږي، نو تابع پرته له $x=3$ څخه د متحول په ټولو قيمتونو کې معينه ده، يعنې د تابع د تعريف ساحه ټاکو: $Domain=IR\setminus\{3\}$

.2 د تابع د منحني تقاطع د x له محور سره:

$$\left.\begin{aligned} &f(x)=0\\ &2x-1=0\\ &2x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{2}\end{aligned}\right\}\ (\frac{1}{2},0)$$

.3 د تابع د منحني تقاطع د y له محور سره:

$$\left. x=0 \Rightarrow f(0)=\frac{2\cdot 0-1}{0-3}=\frac{1}{3} \right\}\ (0,\frac{1}{3})$$

.4 د مجانبونو ټاکل:

الف- افقي مجانب: $y=2$, $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x-1}{x-3}=2$ یا $f(x)=\frac{a}{c}=\frac{2}{1}=2$

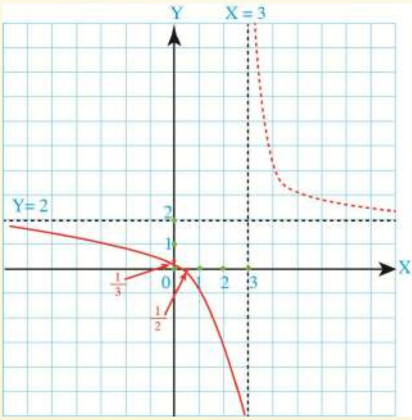
ب- عمودي مجانب: $x=3 \Rightarrow x-3=0$ یا $x=-\frac{d}{c}=-\frac{-3}{1}=3$

.5 د تابع د extreme ټکي پیدا کوو او جدول یې ترتیب او ګراف یې رسموو:

$$f'(x)=\frac{2(x-3)-(2x-1)}{(x-3)^2}=\frac{-5}{(x-3)^2}<0$$

$$f''(x)=\frac{0\cdot(x-3)^2-(-5)\cdot 2(x-3)}{(x-3)^4}=\frac{10(x-3)}{(x-3)^4}=\frac{10}{(x-3)^3}$$

x	$-\infty$ 3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	$2 \searrow -\infty$	نه دی تعریف شوی $+\infty \searrow 2$



دویم مثال: د $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$ د تابع د ګراف بدلونونه و څېړئ او ګراف یې رسم کړئ.

حل: $x+1=0 \Rightarrow x=-1$

-1 د تابع د تعریف ساحه $D_f \to IR\setminus\{-1\}$ یعني تابع په $x=-1$ ټکي کې تعریف شوې نه ده.

2- د تابع د منحني تقاطع د x له محور سره: $y=0 \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow (1,0)$

3- د تابع د منحني تقاطع د y له محور سره: $x=0 \Rightarrow y=\frac{0-1}{0+1}=-1 \Rightarrow y=-1 \Rightarrow (0,-1)$

4- د مجانبونو ټاکل:

الف- عمودي مجانب: $x+1=0 \Rightarrow x=-1$

ب- افقي مجانب: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-1}{x+1} \Rightarrow f(x)=y=1$

5- د تابع extreme نقطې پيدا کوو، جدول يې ترتيب او ګراف يې رسموو:

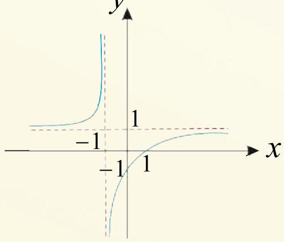
$$f(x)=\frac{x-1}{x+1}$$

$$f'(x)=\frac{1\cdot(x+1)-1\cdot(x-1)}{(x+1)^2}=\frac{x+1-x+1}{(x+1)^2}=\frac{2}{(x+1)^2}>0$$

$$f''(x)=\frac{0\cdot(x+1)^2-2\cdot 2(x+1)}{(x+1)^4}=\frac{-4(x+1)}{(x+1)^4}=\frac{-4}{(x+1)^3}$$

x	$-\infty$	
$f'(x)$	$+$	$+$
$f''(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	$1 \nearrow +\infty$	$-\infty \nearrow 1$

نه دی تعريف شوی



دريم مثال: غواړو د $f(x)=\frac{2x-5}{x}$ تابع ګراف رسم کړو.

حل:

1- د تابع د تعريف ساحه تر څېړنې لاندې نيسو ليدل کېږي چې تابع پرته له $x=0$ څخه نور د متحول د ټولو قيمتونو لپاره معينه ده، يعني: $D_f \to IR\setminus\{0\}$

2- د محورونو سره د تقاطع ټکي

الف- د x له محور سره تقاطع:

$$f(x)=0 \Rightarrow \frac{2x-5}{x}=0$$

$$\left.\begin{array}{l} 2x-5=0 \\ 2x=5 \Rightarrow x=\frac{5}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow (2.5,0)$$

ب- د y له محور سره تقاطع: د $x=0$ لپاره د $f(x)$ تابع تعریف شوې نه ده، نو له y محور سره تقاطع نه لري.

3- **مجانبونه**:

الف- عمودي مجانب: څرنګه چې په مخرج کې یوازې x موجود دی، نو $x=0$ یې عمودي مجانب دی چې د y محور کېږي.

ب- افقي مجانب: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[\dfrac{2x-5}{x}\right]=2$ نو $y=2$ د تابع افقي مجانب دی.

4- د بحراني ټکو پیداکول: د بحراني ټکو د پیداکولو لپاره د تابع لومړی مشتق پیداکوو

$$f(x)=\frac{2x-5}{x}$$

$$f'(x)=\frac{2\cdot x-(2x-5)}{x^2}=\frac{2x-2x+5}{x^2}$$

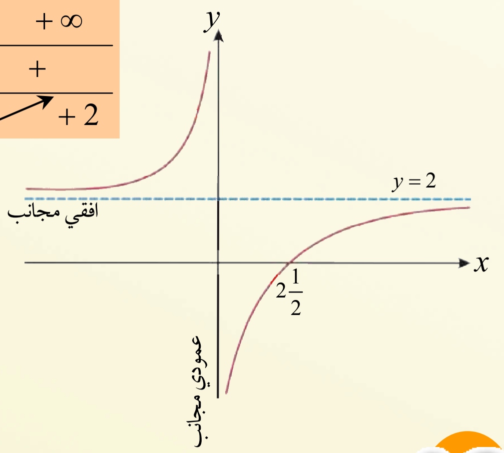
$$f'(x)=\frac{5}{x^2}>0$$

څرنګه چې $f'(x)>0$ دی، نو تابع متزایده ده.

دګراف د رسمولو لپاره د تابع تحولات په جدول کې ترتیبوو:

x	$-\infty$		0		2.5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$		$+$	
$f(x)$	2	↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	0	↗	$+2$

نه دی تعریف شوی



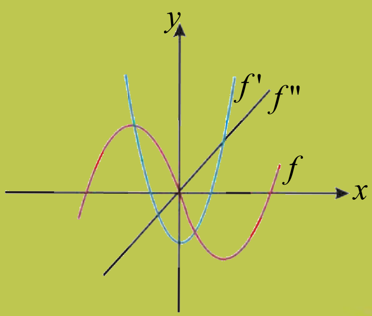
پوښتنې

1. د $f(x)=\dfrac{x-1}{x+3}$ تابع بدلونونه وڅېړئ او رسم يې کړئ.

2. د $f(x)=\dfrac{x}{x-4}$ تابع بدلونونه وڅېړئ او رسم يې کړئ.

د دريمې درجې يو مجهوله تابع ګراف $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ، $a \neq 0$

مخامخ شکل د ځينو توابعو ګرافونه راښيي تاسې د هرې تابع د ګراف په هکله خپل نظر بيان کړئ.



فعاليت

- د $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ تابع په اړه فکر وکړئ او ووايئ چې تابع څومره درجه تابع ده؟
- د نوموړې تابع ضريبونه او ثابت حد وليکئ.
- د نوموړې تابع دويم مشتق پيدا کړئ.

د پورته فعاليت پايله داسې بيانوو:

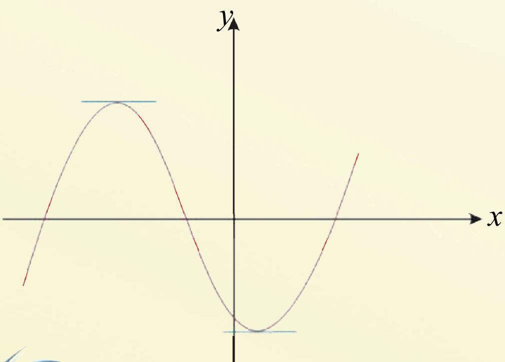
1. د $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ، په دريمه درجه تابع کې چې $a > 0$ وي داسې په پام کې نيسو. که چېرې د تابع لومړی مشتق پيدا کړو دويمه درجه تابع په لاس راځي، نو د $f'(x) = 0$ لپاره د دويمې درجې د معادلې حل په پام کې نيسو او Δ يې مطالعه کوو که چېرې د معادلې Δ له صفر څخه لوی $(\Delta f' > 0)$ وي، نو معادله(د تابع مشتق) دوه حله لري، که چېرې $a > 0$ وي منحنی له کين لوري څخه ښي لوري ته يوه نسبي اعظمي نقطه (Local Maximum) او يوه نسبي اصغـــــــري (Local Minimum) لري.

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$a > 0 \Rightarrow \Delta f' > 0$

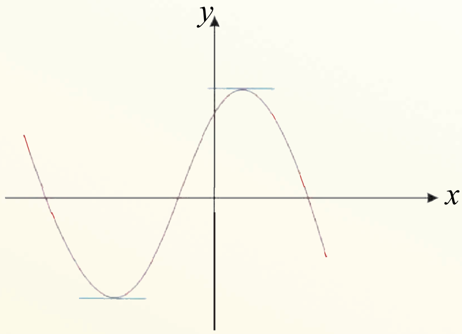
x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow$		$\searrow$		$\nearrow +\infty$



2. د $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ ، په تابع کې که $a<0$ ، $f'(x)=0$ او $\Delta f'(x)>0$ معادله دوه جذرونه لري، که چېرې $\Delta f'>0$ نو منحني له کین لوري څخه ښی لوري ته یوه نسبي اصغری(Local Minimum) او یوه نسبي اعظمي(Local Minimum) نقطه لري.

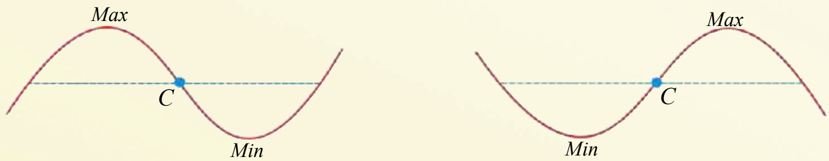
$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$$
$$f'(x)=3ax^2+2bx+c$$
$$a<0 \quad \Rightarrow \quad \Delta f'>0$$

x		x_1		x_2	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$ ↘		↗		↘ $-\infty$



3. که د دریمې درجې تابع منحني نسبي بحراني Extreme ولري، د Extreme دټکو د منځني ټکي یا د انعطاف د نقطې مختصات یې:

$$I(x_c, y_c)=\left(\frac{x_{max}+x_{min}}{2}, \frac{y_{max}+y_{min}}{2}\right)$$

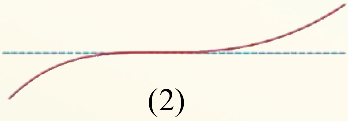


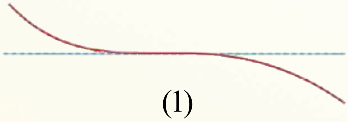
4. د دریمې درجې تابع د تناظر ټکی د تابع د انعطاف ټکی:

$$f'(x)=0$$
$$3ax^2+2bx+c=0$$

چې د تناظر ټکي یې وروسته د نوموړي معادلې له حل څخه د تناظر مرکز $x=-\dfrac{b}{3a}$ په لاس راځي.

5. د $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ په تابع کې که $a<0$ وي او له $f'(x)=0$ سره وضع شي او $\Delta f'(x)=0$ نو معادله یو یا دوه مساوي جذرونه لري په هغه صورت کې چې $f'(x)\leq 0$ وي، نو په دې صورت تابع، متناقصه ده او که چېرې $f'(x)\geq 0$ وي، نو په دې صورت کې تابع متزایده ده.


(2)


(1)

لومړی مثال: د $f(x)=(x-1)(x+2)^2$ تابع تحولات وڅېړئ او گراف یې رسم کړئ.

حل: لومړی د تابع Extreme ټکو مختصات په لاس راوړو، وروسته د لومړي مشتق په مرسته گورو چې تابع په کومه برخه کې متزایده او په کومه برخه کې متناقصه ده. له محورونو سره د تقاطع ټکي پیدا کوو او د اعظمي او اصغري نقطو د تشخیص او د انعطاف نقطو د پیدا کولو لپاره د تابع دویم مشتق په کار وړو د تحولاتو جدول یې ترتیبوو او بیا یې گراف رسموو: $f(x)=x^3+3x^2-4$

$$f'(x)=3x^2+6x$$
$$3x^2+6x=0$$
$$x(3x+6)=0$$
$$x_1=0 \quad , \quad 3x+6=0 \quad \Rightarrow \quad x_2=-2$$
$$f'(x)=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=0 \quad , \quad x_2=-2$$
$$f(0)=0^3+3\cdot 0^2-4=-4$$
$$f(-2)=(-2)^3+3(-2)^2-4$$
$$=-8+12-4=0$$
$$f''(x)=0 \quad \Rightarrow \quad 6x+6=0$$
$$6x=-6$$
$$x=-1$$

د انعطاف د نقطې د لاسته راوړلو لپاره $x=-1$ په اصلي تابع کې وضع کوو چې د $f(x)$ قیمت لاسته راځي:

$$f(-1)=(-1-1)(-1+2)^2=-2$$

د انعطاف ټکی: $I(-1,-2)$

له محورونو سره تقاطع:

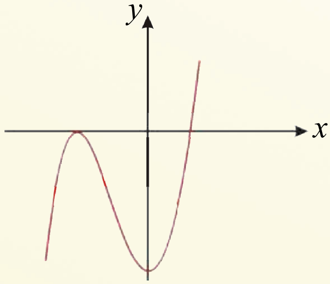
الف- د x له محور سره تقاطع:

$$y=0$$
$$(x-1)(x+2)^2=0$$
$$\left.\begin{matrix}x-1=0\\ x=1\\ \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix}(x+2)^2=0\\ x+2=0\\ x_2=-2\end{matrix}\right\} \Rightarrow (1,0)\ ,\ \ (-2,0)$$

ب- د y له محور سره تقاطع:

$$x=0$$
$$y=0^3+3\cdot 0^2-4=-4 \ \ \Rightarrow (0,-4)$$

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$		$-$		$+$	
$f''(x)$		$-$		$-$		$+$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	-2	↘	-4	↗	$+\infty$
			max				min		



دویم مثال: د $f(x)=-x^3+3x^2$ د تابع تحولات وڅېړئ او ګراف یې رسم کړئ.

حل: د تابع لومړی مشتق پیداکوو او وروسته یې صفري نقطې ټاکو او د تابع اعظمي او اصغري نقطې په لاس راوړو.

-1

$$f(x)=-x^3+3x^2$$
$$f'(x)=-3x^2+6x$$
$$f'(x)=0 \ \ \Rightarrow \ -3x^2+6x=0 \ \ \Rightarrow \ x(-3x+6)=0$$
$$x_1=0 \ \ , \ \ -3x+6=0 \ \Rightarrow \ -3x=-6 \ \Rightarrow \ x_2=2$$

اعظمي او اصغري ټکي عبارت دي له:

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = -0^3 + 3\cdot 0^2 = 0 \\ f(2) = -2^3 + 3\cdot 2^2 = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow (0,0)\ ,\quad (2,4)$$

2- محورونو سره تقاطع:

الف- د x له محور سره تقاطع:

$$\left.\begin{array}{l} y = 0 \\ -x^3 + 3x^2 = 0 \\ x^2(-x+3) = 0 \\ x_1 = 0 \quad , \quad -x+3 = 0 \\ \qquad\qquad x_2 = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow (0,0) \quad , \quad (3,0)$$

ب- د y له محور سره تقاطع:

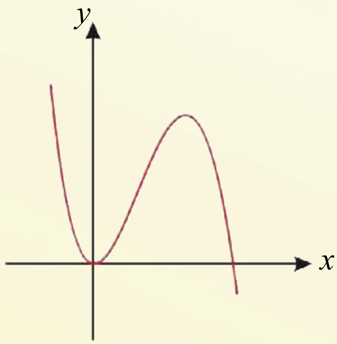
$$\left.\begin{array}{l} x = 0 \\ f(x) = -0^3 + 3\cdot 0^2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (0,0)$$

3- د انعطاف د نقطې د پیداکولو لپاره $f''(x)$ مطالعه کوو:

$$f''(x) = -6x + 6 = 0$$
$$x = 1$$
$$f(x) = -x^3 + 3x^2$$
$$f(1) = 2 \quad \Rightarrow \quad I(1,\ 2)$$

4- اوس یې جدول ترتیبوو او ګراف یې رسموو:

x	$-\infty$	0		1		2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$		$+$		$-$
$f''(x)$	$+$		$+$	0	$-$		$-$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	0	↗		↗	4	↘ $-\infty$
$f(x)$	∪		∪		∩		∩
		نسبي *Min*				نسبي *Max*	



دریم مثال: د $f(x)=x^3-3x^2+x+1$ د تابع د تناظر د مرکز مختصات پیدا کړئ.

حل: پوهېږو چې د تناظر مرکز د $x=\frac{-b}{3a}$ له رابطې څخه لاسته راځي، نو:

$$x=\frac{-b}{3a}=\frac{-(-3)}{3\cdot 1}=1 \quad \Rightarrow \quad f(1)=1^3-3(1)^2+1+1=0$$

$C(1,0)$ د تناظر د مرکز مختصات

پوښتنې

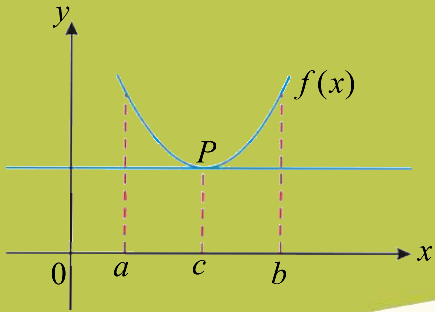
1. د لاندې تابع ګانو د تحولاتو جدول ترتیب او ګرافونه یې رسم کړئ.

$$a)\ \ f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+x+1 \qquad , \qquad b)\ \ f(x)=-(x-1)^3$$

2- د $f(x)=-2x^2+6x-3$ د تناظر د مرکز مختصات پیدا کړئ.

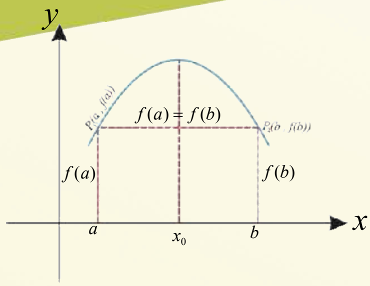
د رول قضیه

Rolle Theorem



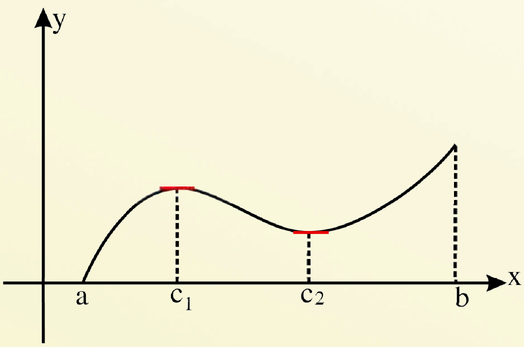
په مخامخ شکل کې د $f(x)$ تابع او د Δ مستقیم خط یو له بل سره څه اړیکې لري او $f'(c)$ له څه سره مساوي دی.

فعالیت



- په مخامخ شکل کې د (a,b) په انټروال کې د $f(x)$ په منحني باندې داسې ټکئ یا ټکي شته چې له هغو څخه په منحني داسې مماس رسم شي چې د x له محور سره موازي وي.
- د $f(x)$ تابع په کوم انټروال کې متمادي او په کومه فاصله کې د مشتق وړده.
- که چیرې $f(a)=f(b)$ وي، نو د x_0 ټکي په (a,b) انټروال کې وڅیرئ.

له پورتني فعالیت څخه لاندې قضیه بیانولای شو:



قضیه: که چیرې د $f(x)$ تابع د $a \le x \le b$ په انټروال کې متمادي او د $a < x < b$ په انټروال کې د مشتق وړ وي او $f(a)=f(b)$ وي، نو لږ تر لږه د x_0 یو ټکی په $a < x_0 < b$ انټروال کې شته چې د $f'(x_0)=0$ شي.

ثبوت: خرنگه چې د $f(x)$ تابع په ورکړل شوی انټروال کې متمادي او د مشتق وړ ده، نو بحراني Extreme ټکی لري.

1- که $f(x)=c$ ثابته تابع وي، نو واضح ده چې $f'(x)=0$ ده.

2- که د $f(x)$ تابع ثابته نه وي، او $x_2, x_1 \in (a,b)$ او $f(x_1)>0$ وي، نو تابع په $[a,b]$ $x_0 \in$ کې یو Maximum قیمت لري چې $f(x_0) \geq f(x_1) > 0$ شي او همدا راز که $f(x_2)<0$ وي، نو تابع یو اصغري Minimum قیمت لري.

خرنگه چې په Extreme نقطو کې د تابع مشتق صفر دی، نو $f'(x_0)=0$ کېږي.

لومړی مثال: د رول قضیه د $f(x)=\cos x$ د تابع لپاره په $[a,b]=[\pi, 5\pi]$ فاصله کې تطبیق کړئ.

حل: خرنگه چې $f(\pi)=f(5\pi)=-1$ سره دی، نو د $f(x)$ تابع د هره x لپاره د مشتق وړ ده، نو د $(\pi, 5\pi)$ په انټروال کې متمادي او په $(\pi, 5\pi)$ په انټروال کې مشتق منونکی ده چې د Rolle د قضیې مطابق په $(\pi, 5\pi)$ کې لږ تر لږه یو x_0 موجود دی چې د هغه قیمت لپاره $(\cos x)'=0$ شي. خرنگه چې $(\cos x)'=-\sin x$ دی، نو باید $-\sin x=0$ معادلې لږ تر لږه یو حل په $(\pi, 5\pi)$ کې موجود وي.

$-\sin x=0 \Rightarrow \sin x=0$ دا معادله په $(\pi, 5\pi)$ کې درې ځله $4\pi, 3\pi, 2\pi$ قیمتونه اخېستلای شي.

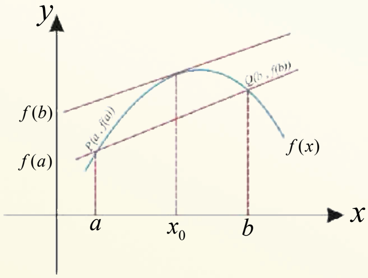
دویم مثال: د رول قضیه د $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ تابع په $[a,b]=[-1,1]$ فاصله کې تطبیق کړئ.

حل: لیدل کېږي چې تابع د پیل او پای په ټکو کې د مشتق وړ نه ده، ولې د رول د قضیې د تطبیق وړ ده ځکه $f(-1)=f(1)=0$ دی $f(0)$ تابع په $[-1,1]$ کې متمادي ده او په $[-1,1]$ کې د x_0 یو عدد شته چې $f'(x_0)=0$ شي او هغه $x_0=0$ دی.

د $y'(x)=\dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u}}$ فورمول څخه په ګټه اخېستنې سره مشتق په لاس راوړو:

$$f'(x)=\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \quad \Rightarrow \quad f'(0)=\frac{0}{\sqrt{1-0^2}}=0$$

د متوسط قیمت قضیه(لاګرانژقضیه):



مخامخ شکل په پام کې و نیسئ:

- د یوې مستقیمې کرښې میل له کومې رابطې څخه په لاس راځي؟
- د $\overline{PQ}$ د مستقیمې کرښې میل پیدا کړئ.
- د $\overline{PQ}$ د کرښې میل د $f(x)$ د تابع له مشتق سره څه اړیکه لري؟

له پورتني فعالیت څخه قضیه داسې بیانوو:

قضیه: که چېرې $f(x)$ د$[a,b]$ په فاصله کې متمادي او د (a,b) په فاصله کې د مشتق وړ وي د (a,b) له انټروال څخه د c یو عدد شته دی داسې چې: $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$

یعنې: $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ دی.

ثبوت: یوه مرستندویه تابع په پام کې نیسو، لیدل کېږي چې: $g(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot x$

$$g(a)=f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot a=\frac{f(a)b-f(b)a}{b-a} \quad .... \text{ I}$$

$$g(b)=f(b)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot b=\frac{f(a)b-f(b)a}{b-a} \quad .... \text{ II}$$

نو $g(a)=g(b)$ سره دی د رول د قضیې پر بنسټ سره د c عدد د (a,b) انټروال کې شته دی چې $g'(c)=0$ دی، نو:

$$g'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow g'(x)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0 \Rightarrow f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$\Rightarrow f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$$

مثال: د $f(x)=2x^3-8x+1$ په تابع کې د متوسط قیمت قضیه په $[a,b]=[1,3]$ کې وڅیړئ.

حل: لیدل کېږي چې د $f(x)$ تابع په $[1,3]$ کې متمادي او په $(1,3)$ کې د مشتق وړ ده، نو د متوسط قیمت له قضیې سره سم په $(1,3)$ کې یو x_0 شته داسې چې:

$$f'(x_0)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{36}{2}=18$$

د c د پیداکولو لپاره لرو:

$$f'(x_0)=6x^2-8=18 \Rightarrow x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{26}{6}}$$

څرنګه چې $x=\sqrt{\frac{26}{6}}$ په $(1,3)$ کې ګډون لري، نو $x_0=\sqrt{\frac{13}{3}}$ دی.

او $x=-\sqrt{\frac{26}{6}}$ په $(1,3)$ فاصله کې واقع نه ده، نو د قبول وړ نه ده.

پوښتنې

1- که چېرې د $f(x)=\sqrt{x(4-1)}$ تابع د $[0,4]$ په انټروال کې راکړل شوې وي د x_0 قیمت داسې پیدا کړئ چې د رول قضیه په پورتنې تابع کې صدق وکړي.

2- که د $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x$ تابع راکړل شوې وي د x_0 قیمت د $[0,3]$ په فاصله کې داسې وټاکئ چې د رول قضیه په هغې کې صدق وکړي.

3- د هوپيتال قاعده (L' Hopitall)

مخامخ مساوات څه بيانوي؟

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

فعاليت

- د $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$ د تابع لېمیټ په هغه صورت کی پیدا کړئ چې $x\to 1$ ته تقرب وکړي.
- د پورتني تابع د صورت او مخرج مشتق پیدا او د تابع له لېمیټ سره یې پرتله کړئ.
- د $f(x)=\dfrac{3x^4-3x^2-4x-1}{2x^2-4x^3+2x^4}$ د تابع لېمیټ په هغه صورت کې پیدا کړئ چې $x\to\infty$ تقرب وکړي.
- د پورتني تابع د صورت او مخرج مشتق پیدا او د تابع له لېمیټ سره یې پرتله کړئ.

له پورتني فعالیت څخه دا قاعده بیانوو:

د هوپیتال قاعده:

که د $f(x)$ او $g(x)$ تابع گانې د (a,b) په انټروال کې تعریف او د مشتق وړ وي.

که چېرې $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ د لېمیټ نسبت $x\to a$ قیمت کې د $\dfrac{0}{0}$ مبهم شکل او په $x\to\infty$ کې د $\dfrac{\infty}{\infty}$ شکل ونیسي. په دې حالت کې د تابع د لېمیټ د پیداکولو لپاره د $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ مشتق پیداکوو او په هغه کې قیمتونه وضع کوو که بیاهم د تابع شکل مبهم وي، مشتق نیولو ته ادامه ورکوو تر څو د ابهام شکل ختم شي د مثال په ډول:

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^2+x-10}{x^2-4}=\frac{2\cdot 2^2+2-10}{2^2-4}=\frac{0}{0}$$

$$\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{4x+1}{2x}=\frac{4\cdot 2+1}{2\cdot 2}=\frac{9}{4}$$

یا

$$\lim_{x\to 2}\frac{(2x+5)(x-2)}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{2x+5}{x+2}=\frac{2\cdot 2+5}{2+2}=\frac{9}{4}$$

مثال: د لوپیټال له قاعدې څخه په ګټه اخیستنې سره د لاندې توابعو لیمیټونه پیدا کړئ.

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\sin 2x}{x-\sin 2x}$ 2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^4-81}{x-3}$ 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-4x+6}{7x^2-2x+1}$

لومړی ځواب:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+\sin 2x}{x-\sin 2x}=\frac{0+\sin 2\cdot 0}{0-\sin 2\cdot 0}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+\sin 2x)'}{(x-\sin 2x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1+2\cos 2x}{1-2\cos 2x}=\frac{1+2}{1-2}=-3$$

دویم ځواب:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^4-81}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{3^4-81}{3-3}=\frac{81-81}{3-3}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{(x^4-81)'}{(x-3)'}=\lim_{x\to 3}\frac{4x^3}{1}=\frac{4\cdot 3^3}{1}=108$$

درېیم ځواب:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-4x+6}{7x^2-2x+1}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(3x^2-4x+6)'}{(7x^2-2x+1)'}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{6x-4}{14x-2}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(6x-4)'}{(14x-2)'}=\frac{6}{14}=\frac{3}{7}$$

پوښتنې

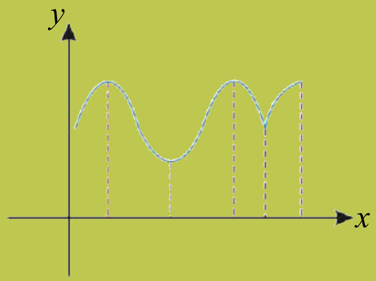
د لوپیټال له قاعدې څخه په ګټه اخیستنې سره لاندې لیمیټونه پیدا کړئ.

$a)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$, $b)\ \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^5-1}{x^3-1}$

$c)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x^3}$, $d)\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5}{3x^3}$

د بحراني ټکو تطبيق

په مخامخ شکل کې تر ټولو لوړ ټکی او تر ټولو ټيټ ټکی وښيئ او دا ټکی د څه په نامه يادېږي.



مثالونه:

1مثال- دوه عددونه پيدا کړئ چې مجموعه يې 20 او د ضرب حاصل يې لوی ممکن قيمت ولري.

حل: که لومړی عدد ته x ووېل شي، نو دويم عدد $20-x$ دی او د ضرب حاصل يې د تابع په شکل داسې: $f(x)=x(20-x)$ ليکو، څرنګه چې د x عدد په $[0,20]$ انټروال کې تحول کوي، نو د تابع مطلق اعظمي قيمت په $[0,20]$ کې لټوو:

$$f(x)=20x-x^2$$
$$f'(x)=0$$
$$20-2x=0$$
$$-2x=-20$$
$$x=10$$
$$f(10)=20\cdot10-10^2=200-100=100$$
$$f(0)=20\cdot0-0^2=0$$
$$f(20)=20\cdot20-20^2=400-400=0$$

ليدل کېږي چې (100 ، 10) د تابع اعظمي نقطه ده، نو مطلوب عددونه $x_1=10$ او $x_2=10$ چې د ضرب حاصل يې 100 دی.

2 مثال- د يوه خوځنده جسم د حرکت معادله د $x=(t-2)(t-3)$ په بڼه راکړل شوې ده، د جسم متوسط سرعت د $t_1=3$ او $t_2=4$ د وخت په واټنو کې پيدا کړئ.

حل: د منځني سرعت د تعريف په مرسته ليکلای شو چې:

$$\text{منځنی سرعت}=\frac{x_{(t_2)}-x_{(t_1)}}{t_2-t_1}=\frac{x_{(4)}-x_{(3)}}{4-3}=\frac{2-0}{4-3}=2$$

3مثال- د کرې د حجم او سطحې د مشتقونو تر منځ منځنۍ نسبت پیدا کړئ.

حل:

$$\text{د کرې حجم} = v_{(x)} = \frac{4}{3}\pi x^3 \Rightarrow \frac{dv}{dx} = \frac{4}{3}\pi \cdot 3x^2 = 4\pi x^2$$

$$\text{د کرې مساحت} = S_{(x)} = 4\pi x^2 \Rightarrow \frac{ds}{dx} = 4\pi \cdot 2x = 8\pi x$$

$$\frac{dv}{ds} = \frac{4\pi x^2}{8\pi x} \Rightarrow \frac{dv}{ds} = \frac{1}{2}x$$

4مثال- د سانتي ګراد(C) او فارنهایت (F) د حرارت تر منځ $C = \frac{5}{9}(F-32)$ اړیکه شته، تاسې د (C) او (F) تر منځ منځنۍ نسبت وټاکئ.

حل: د منځنۍ سرعت د تعریف $(V_m = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x})$ په مرسته لیکلای شو:

$$\frac{\Delta C}{\Delta F} = \frac{C(F+\Delta F)-C(F)}{\Delta F} = \frac{\frac{5}{9}(F+\Delta F-32)-\frac{5}{9}(F-32)}{\Delta F} = \frac{5}{9}$$

5مثال- یوه ځمکه چې مستطیلي شکل لري، محیط یې $200m$ دی، کېدای شي اعظمي Maximum مساحت یې پیدا کړئ.

حل: په ورکړل شوي محیط سره کولای شو، ډېر مستطیلونه رسم کړو، ولې شرط دا دی چې هغه مستطیل زموږ مطلوب دی چې مساحت یې تر ټولو زیات وي، نو که د مستطیل اوږدوالی په x او سور یې په y وښیو، نو لیکلای شو:

$\text{میحط} = 2x + 2y = 200$

$\text{میحط} = x + y = 100 \quad \Rightarrow y = 100 - x$

$\text{مساحت} = x \cdot y$

$S = x(100-x) = 100x - x^2 \quad , \quad D_s = IR$

$x > 0 \quad , \quad y > 0 \Rightarrow 100 - x > 0 \quad \Rightarrow x < 100$

اوس د $S = 100x - x^2$ په تابع کې $0 < x < 100$ انټروال کې د تابع اعظمي مساحت داسې پیدا کوو:

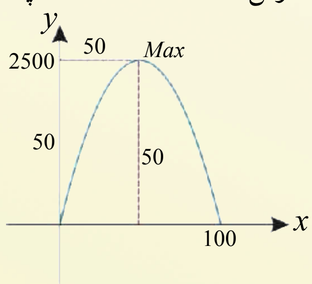
$S' = 100 - 2x$

$S' = 0 \Rightarrow 100 - 2x = 0 \quad \Rightarrow x = 50 \quad \Rightarrow S_{(50)} = 2500$

$\lim_{x\to 0^+} S(x) = 0$

$\lim_{x\to 0^-} S(x) = 0$

x	0	50	100
S'	+	0	−
S	0 ↗	2500	↘ 0



په پایله کې له شکل څخه هم لیدل کېږي چې تر ټولو لوی مساحت هغه وخت لاسته راځي چې د مستطیل طول 50 واحده وي، نو مساحت 2500 واحد مربع کېږي.

6مثال- که د دوو عددونو مجموعه 200 وي، هغه عددونه داسې وټاکئ چې د مربعاتو مجموعه یې اصغري شي.

حل: که چېرې دا عددونه x او y وي، نو $x+y=200$ او که x ، $x^2+y^2=T_{(x)}$ فرض کړو، نو:

$$T_{(x)} = x^2 + y^2$$
$$= x^2 + (200-x)^2$$
$$= x^2 + x^2 - 400x + (200)^2$$
$$= 2x^2 - 400x + 40000$$
$$T'_{(x)} = 4x - 400$$
$$T'_{(x)} = 0$$
$$4x - 400 = 0$$
$$x = 100$$

په پایله کې ویلای شو چې د مربعاتو تر ټولو کوچنۍ مجموعه عبارت ده له: $T_{(100)} = 20000$

7مثال- د A ټکی د $y=\frac{2}{x}$ د منحني له پاسه حرکت کوي، تر ټولو کوچنی انتروال د A د نقطې او د مختصاتو د مبدې ترمنځ لاسته راوړو.

حل: د $y=\frac{2}{x}$ د تابع منحني پر مخ د A د نقطې مختصات $A(x,\frac{2}{x})$ دي، نو:

$$\overline{OA} = \sqrt{x^2{}_{(A)} + y^2{}_{(A)}} = \sqrt{x^2 + \frac{4}{x^2}}$$
$$\overline{OA}^2 = x^2 + \frac{4}{x^2} = d^2 \Rightarrow d'_{(x)} = (x^2)' + (\frac{4}{x^2})' = 2x - \frac{8x}{x^4} = 2x - \frac{8}{x^3}$$
$$d'_{(x)} = \frac{2x^4 - 8}{x^3}$$
$$d'_{(x)} = 0$$
$$2x^4 = 8$$
$$x_1 = \sqrt{2} \quad , \quad x_2 = -\sqrt{2}$$
$$d_{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^2 + \frac{4}{(\sqrt{2})^2} = 2 + \frac{4}{2} = \frac{8}{2} = 4$$
$$d_{-\sqrt{2}} = 4$$

په پایله کې تر ټولو کوچنی فاصله له مبدا څخه 2 واحده ده.

8مثال- يو مكعب مستطيل چې قاعده يې مربع ده، په پام کې نيسو، که د دريو واړو بعدونو مجموعه 24 وي، د مكعب تر ټولو لوی حجم پيدا کړئ.

حل: که د مکعب مستطيل د قاعدې ضلعې ته x او جګوالي ته يې y وويل شي، نو:

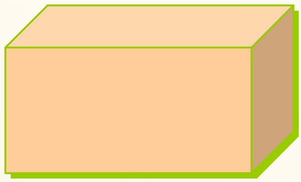
$$x + x + y = 24 \Rightarrow y = 24 - 2x$$

څرنګه چې $y \geq 0$ دی، نو $0 \leq x \leq 12$ کېږي او د مکعب مستطيل حجم عبارت دی له:

$$V = x^2 \cdot y \Rightarrow V = x^2(24 - 2x) = 24x^2 - 2x^3$$

$$V = 24x^2 - 2x^3$$
$$V'(x) = 48x - 6x^2$$
$$V'(x) = 0$$
$$48x - 6x^2 = 0$$
$$x(48 - 6x) = 0$$
$$x_1 = 0$$
$$48 - 6x = 0$$
$$-6x = -48$$
$$x = 8$$

$$V(0) = 24 \cdot 0^2 - 2 \cdot 0^3 = 0 - 0 = 0$$
$$V'(0) = 0$$
$$V(8) = 24 \cdot (8)^2 - 2 \cdot (8)^3 = 1536 - 1024 = 512$$
$$V(8) = 512$$
$$V(12) = 24 \cdot (12)^2 - 2 \cdot (12)^3 = 3456 - 3456 = 0$$
$$V(12) = 0$$



نو د مكعب مستطيل تر ټولو لوی حجم $512cm^3$ دی.

پوښتنې

1- د $y = x^3 + x^2 + x + 1$ د تابع تحولات پيدا او منحني يې رسم کړئ.

2- که د اوسپنې له يوې تختې څخه چې هره ضلع يې $1m$ طول لري يو سر خلاص بکس جوړېږي. د هغه له څلورو کنجونو څخه څلور مساوي مربع ګانې پرې کړئ او بيا هغه قات کړئ کوچنی مربع ګانې په کومه اندازه پرې شي چې نوموړی بکس ممکن اعظمي حجم ولري.

3- د $y = x^2$ ګراف ته ډېره نژدې نقطه له $A(3,0)$ نقطې سره پيدا کړئ.

د څپرکي مهم ټکي

- د $f(x)$ يوه تابع هغه وخت متزايده بلل کېږي چې د $[a,b]$ په انټروال کې متمادی او په (a,b) خلاص انټروال کې د مشتق وړ او $f'(x)>0$.
- د $f(x)$ يوه تابع هغه وخت متناقصه بلل کېږي چې د $[a,b]$ په انټروال کې متمادي او په (a,b) خلاص انټروال کې د مشتق وړ او $f'(x)<0$.
- د تابع له تزايد څخه مطلب دا دی چې د x د متحول په زياتېدو سره د تابع قيمت زيات او د تابع له تناقص څخه مطلب دا دی چې د x متحول په زياتېدو سره د تابع قيمت کم شي.
- په يوه تابع کې تر ټولو لوړې نقطې ته مطلق اعظمي(Absolute Maximum) او تر ټولو ټيټې نقطې ته مطلق اصغري(Absolute Minimum) وايي، د x هغه قيمتونه چې د هغوی لپاره تابع يا اعظمي او يا اصغري قيمتونه اخلي د Extreme په نامه يادېږي.
- مطلق Maximum: د $(x_0, f(x_0))$ نقطه مطلقه اعظمي بلل کېږي، که چېرې د $f(x)$ د تعريف په ساحه کې د هر x لپاره $f(x)\le f(x_0)$ وي، نو $f(x_0)$ ته مطلقه اعظمي وايي.
- مطلق Minimum:د $(x_0, f(x_0))$ نقطه مطلقه اصغري بلل کېږي، که چېرې $f(x)$ د تعريف په ساحه کې د هر x لپاره $f(x)\ge f(x_0)$ وي، نو $f(x_0)$ ته مطلقه اصغري وايي.
- د $y=f(x)$ د تابع منحني په يوه انټروال کې محدب بلل کېږي، که چېرې په دې انټروال کې په منحني مماس رسم شي، نو مماس د منحني پورته خواته پروت وي او د تابع دويم مشتق منفي په لاس راځي.
- د $y=f(x)$ د تابع منحني په يوه انټروال کې مقعر بلل کېږي، که چېرې په نوموړي انټروال کې په منحني مماس رسم شي، نو مماس د منحني ښکته خوا پروت وي، او د تابع دويم مشتق مثبت په لاس راځي.
- هغه ټکی چې د تابع له مقعريت څخه محدبيت ته او يا برعکس خپل لوری بدلوي، د انعطاف(Inflection) ټکی بلل کېږي.
- هغه تابع ګانې چې د $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ بڼه ولري، د هوموګرافيک تابع ګانو په نامه يادېږي، په دې شرط چې $c\neq 0$ وي.

- که چېرې د $f(x)$ تابع د $a \le x \le b$ په انټروال کې متمادي او د $a < x < b$ په انټروال کې د مشتق وړ او $f(a) = f(b)$ وي، نو لږ ترلږه د x_0 یو ټکی په $a < x0 < b$ په انټروال کې شته چې $f'(x_0) = 0$ دی، دا قضیه د رول د قضیې په نامه یادېږي.
- که چېرې $f(x)$ په $[a,b]$ فاصله کې متمادي او د (a,b) په خلاصه فاصله کې د مشتق وړ وي د x_0 یو عدد د a او b ترمنځ شته چې $f'(x_0) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ دی دا د متوسط قیمت قضیه بلل کېږي.

د هوپیتال قاعده:

که د $f(x)$ او $g(x)$ تابع ګانې د (a,b) په انټروال کې تعریف او د مشتق وړ وي.

که چېرې $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ د لیمیټ نسبت کله چې $x \to a$ د $\dfrac{0}{0}$ مبهم شکل او په هغه صورت کې چې $x \to \infty$ کې د $\dfrac{\infty}{\infty}$ شکل ونیسي په دې حالت کې د تابع د لیمیټ د پیداکولو لپاره د $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ لیمیت پیداکوو او په هغه کې قیمتونه وضع کوو که بیاهم د تابع شکل مبهم وي، مشتق نیولو ته دوام ورکوو ... تر څو د ابهام شکل ختم شي.

د دریم څپرکي پوښتنې

لاندې پوښتنو ته څلور ځوابونه ورکړل شوي دي، سم ځواب په نښه کړئ:

1 – که یوه تابع په $[a,b]$ انتروال کې متمادی او د مشتق وړ وي، نو هغه وخت متزاید ده چې :

$a)\ f'(x)=0$ $b)\ f'(x)<0$ $c)\ f'(x)>0$ $d)\ f'(x)\geq 0$

2- په یوه تابع کې تر ټولو لوړې نقطې ته:

$a)$ Absolute Minimum وایي $b)$ Infliction وایي $c)$ Absolute Maximum وایي $d)$ هیڅ یو

3- د $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+2x}$ په تابع کې د Extreme ټکي عبارت دي له:

$a)$ دوه ټکي $b)$ یو ټکی $c)$ درې ټکي $d)$ نه لري

4 – هغه ټکی چې تابع له مقعریت څخه محدبیت ته بدلوي:

$a)$ د اعظمی ټکی دی $b)$ دانعطاف ټکی دی $c)$ اصغري ټکی دی $d)$ هیڅ یو

5- د $f(x)=ax^2+bx+c$ د تابع د تعریف ساحه عبارت له :

$a)\ (-\infty\ ,+\infty)$ $b)\ (-\infty\ ,0)$ $c)\ (0,-\infty)$ $d)$ هیڅ یو

6- د $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+2}$ تابع عمودي مجانب عبارت دی له:

$a)\ x=1$ $b)\ x=2$ $c)\ x=-1$ $d)\ x=-2$

7- د هوموگرافیك تابع عمودي مجانب عبارت دی له:

$a)\ y=\dfrac{a}{c}$ $b)\ x=-\dfrac{d}{c}$ $c)\ y=\dfrac{c}{a}$ $d)\ y=-\dfrac{c}{d}$

8- د $g(x)=\dfrac{4x^2-6x}{x^2-4}$ تابع افقي مجانب عبارت دی له:

$a)\ 4$ $b)\ 6$ $c)\ -6$ $d)\ -4$

9- لاندې کومه الجبري اړیکه حقیقت لري:

$a)\ \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ $b)\ \lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f'(x)$ $c)\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ $d)$ هیڅ یو

لاندې پوښتنې ځواب کړئ:

1. د $f(x)=x^2-x$ د تابع د منحني میل د $P(3,0)$ په ټکي کې پیدا کړئ.

2. د $f(x)=-x^2$ په تابع کې د $[3,4]$ په انټروال کې د منحني د بدلون ټکي پیدا کړئ.

3. د نیوټن د خارج قسمت په مرسته د لاندنیو تابع ګانو مشتق پیدا کړئ.

1) $f(x)=2x$ 2) $f(x)=3x^2-1$ 3) $f(x)=\sqrt{2}x$

4. د لاندنیو تابع ګانو په ورکړل شوو نقطو کې مشتق پیدا کړئ.

1) $f(x)=2x-1 \quad , \quad x_0=-1$ 2) $f(x)=x^2 \quad , \quad x_0=2$

5. د لاندې تابع ګانو مشتق پیدا کړئ.

1) $f(x)=2x-4x^2$ 2) $f(x)=3x^3-1$

6. په ورکړل شوو ټکو کې د تابع ګانو مشتق محاسبه کړئ.

1) $f(x)=7x^2-3x \quad , \quad x_0=-1$

2) $f(x)=6x^2-2x-1 \quad , \quad x_0=\frac{1}{2}$

7. د $f(x)=3x^5-4x^2-3x$ د تابع څلور ځلې مشتق ونیسئ او د هغې ګراف رسم کړئ.

8. د لاندې تابع ګانو مشتق پیدا کړئ.

1) $f(x)=x^3\sec x$ 2) $f(x)=\sin(3x-1)$ 3) $f(x)=\cos^2 2x$

9. کوم مثبت عدد دی چې د خپل معکوس سره جمع شي د جمعې حاصل یې تر ټولو کوچنی شي؟

10. د $f(x)=\frac{x^2+1}{x}$ تابع ګراف رسم کړئ.

11. د $f(x)=\frac{4x^2}{x^2+1}$ تابع ګراف رسم کړئ.

12. د $f(x)=\sin x$ مثلثاتي تابع ګراف رسم کړئ.

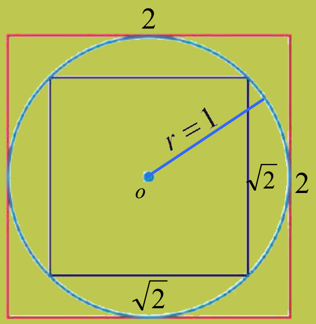
13. د $f(x)=\tan x$ مثلثاتي تابع ګراف رسم کړئ.

څلورم څپرکی

انتیگرال

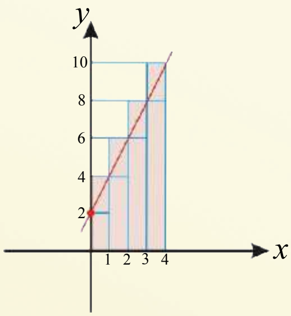
د ریمان مجموعه

Riemann's Sum



په مخامخ شکل کې چې که د دايرې شعاع يو واحد ده، د دايرې د محيطي او محاطي څلور ضلعي ګانو مساحت حساب کړئ او ووایاست چې ددې دايرې مساحت له مخامخ څلور ضلعي ګانو له مساحت سره څه اړیکه لري؟

فعالیت



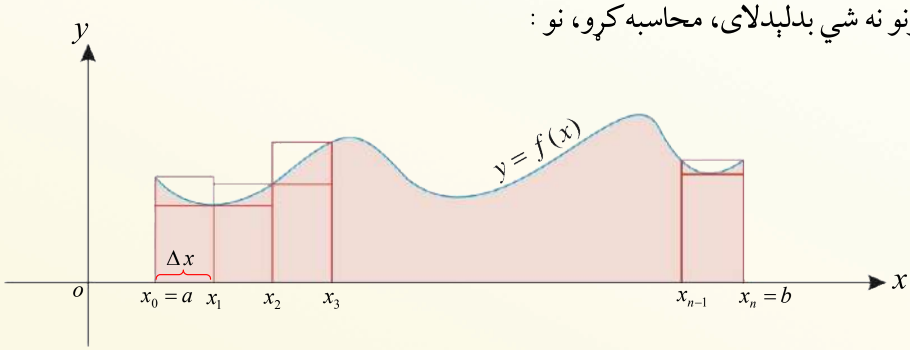
- هغه مساحت چې د x د محور او $f(x) = 2x + 2$ د تابع د ګراف په منځ کې د$[0,4]$ په انټروال کې محصور شوی دی، خط خط کړئ.
- د $y = 2x + 2$ تابع په ګراف کې د څلورو لاندېنیو او پورتنیو مستطیلونو مساحتونه چې په شکل کې ښودل شوی دی، پیدا کړئ.
- د پورتنیو مستطیلونو د مساحت مجموعه او د لاندېنیو مستطیلونو د مساحت مجموعه د تابع د ګراف د لاندېنې مساحت سره په ورکړ شوي واټن کې څه اړیکه لري؟
- د پورته په څېر فعالیت د اتو مساوي لاندېنیو مستطیلونو او د اتو مساوي پورتنیو مستطیلونو لپاره تکرار کړئ او پایله یې د ګراف د لاندې مساحت سره په نوموړي واټن کې پرتله کړئ.
- که چېرې د پورتنیو مستطیلونو د مساحتونو مجموعه او لاندېنیو مستطیلونو[1] د جوړولو لپاره د تابع په ګراف کې د فاصلې وېش زيات کړو د پورتنيو او لاندېنیو مستطیلونو د مساحتونو مجموعه کوم قیمت ته نژدې کېږي.

---

[1] - که چېرې د x په محور د فاصلو تقسیمات زيات کړو او یا که چېرې په یوه فاصله کې د مستطیلونو شمېر زیات شي، په هم هغه اندازه د ګراف لاندې مساحت د قیق په لاس راځي.

له پورتني فعالیت څخه لاندې تعریف لاسته راځي:

تعریف: فرضوو چې د $y = f(x)$ تابع د $[a,b]$ په تړلی انتروال کې متمادي او تعریف شوي وي که چېرې د ناحیې مساحت چې د x د محور او $y = f(x)$ د تابع د ګراف ترمنځ واقع دی چې په هندسي شکلونو نه شي بدلېدلای، محاسبه کړو، نو :



د $[a,b]$ تړلي انتروال په n مستطیلو نو وېشو، څرنګه چې د هر مستطیل عرض د $(\Delta x = \dfrac{b-a}{n})$ رابطې څخه په لاس راځي او د مستطیلونو طول عبارت دی تابع قیمت په هماغه نقطه کې دی.

او د مستطیلونو د هر انټروال اوږدوالی د $i = 1,2,3,\ \dots\ ,n$ لپاره په لاندې ډول دی:

$$x_0 = a, x_1 = a + \Delta x, x_2 = a + 2\Delta x \dots, x_i = a + i\Delta x,\ \dots\ , x_n = b$$

$$[x_0, x_1]\ ,\ [x_1, x_2]\ ,\ [x_2, x_3],\ \dots\ ,[x_{i-1}, x_i],\ \dots\ ,[x_{n-1}, x_n]$$

که په شکل کې د لاندېنیو مستطیلونو مساحت په $f(x_{i-1})\Delta x$ او د پورتنیو مستطیلونو مساحت په $f(x_i)\Delta x$ وښودل شي، نو لرو چې:

$$\text{د لاندینیو مستطیلونو د مساحتونو مجموعه} = f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + \dots + f(x_{n-1})\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x$$

$$\text{د پورتنیو مستطیلونو د مساحتونو مجموعه} = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \dots + f(x_n)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

که چېرې محصور شوی مساحت په A وښیو، نو : $\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x < A < \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$

که چېرې د رابطې له اطراف څخه لیمیټ ونیسو، نو لرو چې:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x \le \lim_{n\to\infty} A \le \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

د ساندوېچ د قضيې پر بنسټ ليکلای شو چې: $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = A = \lim_{n\to\infty} \overset{n}{2} f(xi-1)\Delta x$ $_{121}$

نو $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ ته د ريمان مجموع او ددې مجموعې لېمېټ يعنې $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ ته د ريمان د مجموعې لېمېټ وايي.

لومړی مثال: د $[0,2]$ انټروال په څلور مساوي برخو ووېشئ، د $y=x^2+1$ منحني او x محور تر منځ مساحت پيدا کړئ.

حل: که چېرې $[0,2]$ انټروال په څلورو مساوي برخو ووېشو، نو د مستطيلونو عرض داسې په لاس راځي: $\Delta x = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{2-0}{4} = \dfrac{1}{2}$

ددې مستطيلونو دهر انټروال اوږدوالی عبارت دي له:

$$x_0 = a = 0 \quad , \quad x_1 = a+\Delta x = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = a+2\Delta x = 1 \quad , \quad x_3 = a+3\Delta x = \frac{3}{2}$$

$$x_4 = 2$$

$$[x_0,x_1] \; , \; [x_1,x_2] \; , \; [x_2,x_3] \; , [x_3,x_4]$$

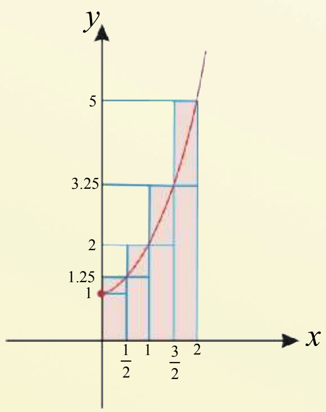
$$[0,\frac{1}{2}] \quad , [\frac{1}{2},1] \quad , [1,\frac{3}{2}] \quad , [\frac{3}{2},2]$$

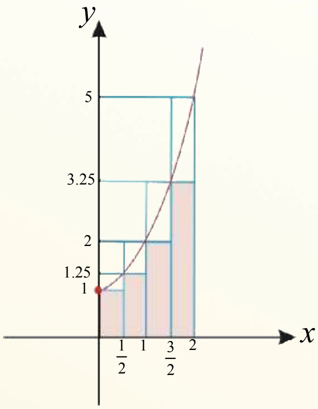
په لاس راغلي قيمتونه د x په ځای په تابع کې وضع کوو.

$$f(x) = x^2+1 \; , f(0) = 1$$

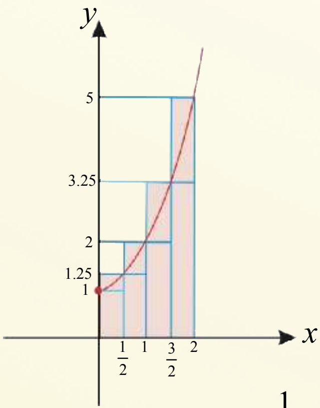
$$f(\frac{1}{2}) = 1.25 \; , \; f(1) = 2$$

$$f(\frac{3}{2}) = 3.25 \; , \; f(2) = 5$$





د لاندېنیو مستطیلونو د مساحتونو مجموعه $= 1\times\frac{1}{2}+1.25\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{2}+3.25\times\frac{1}{2}=3.75$



د پورتنیو مستطیلونو د مساحتونو مجموعه $=1.25\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{2}+3.25\times\frac{1}{2}+5\times\frac{1}{2}=5.75$

$$3.75 < A < 5.75$$

دویم مثال: د $f(x)=1+x$ تابع د ریمان د مجموعې لیمیټ په $[1,10]$ انټروال کې پیدا کړئ.

حل:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{10-1}{n} = \frac{9}{n}$$

$$x_i = a + \Delta x i \ = 1 + [\frac{9}{n}]\, i \quad , \quad i = 0,1,2,\ \dots$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \lim_{n\to\infty} [\sum_{i=1}^{n} (1+x_i)\Delta x]$$

$$= \lim_{n\to\infty} [\Delta x \sum_{i=1}^{n} (1+x_i)]$$

$$= \lim_{n\to\infty} [\Delta x \sum_{i=1}^{n} 1 + \Delta x \sum_{i=1}^{n} x_i]$$

$$= \lim_{n\to\infty} [\frac{9}{n} \sum_{i=1}^{n} 1 + \Delta x \sum_{i=1}^{n} (a + \Delta x i)]$$

$$= \lim_{n\to\infty} [\frac{9}{n} \sum_{i=1}^{n} 1 + \frac{9}{n} \sum_{i=1}^{n} (1 + \frac{9}{n} i)]$$

$$= \lim_{n\to\infty} [\frac{9}{n} \sum_{i=1}^{n} 1 + \frac{9}{n} (\sum_{i=1}^{n} 1 + \frac{9}{n} \sum_{i=1}^{n} i)]$$

$$= \lim_{n\to\infty} [\frac{9}{n} \cdot n + \frac{9}{n} (n + \frac{9}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2})]$$

$$= \lim_{n\to\infty} [9 + \frac{9}{n} (n + \frac{9n^2 + 9n}{2n})]$$

$$= \lim_{n\to\infty} [9 + \frac{9}{n} (\frac{2n^2 + 9n^2 + 9n}{2n})]$$

$$= \lim_{n\to\infty} [9 + \frac{9}{n} (\frac{11n^2 + 9n}{2n})]$$

$$= \lim_{n\to\infty} [9 + \frac{99n^2 + 81n}{2n^2}]$$

$$= \lim_{n\to\infty} [9 + \frac{99n^2}{2n^2} + \frac{81n}{2n^2}]$$

$$= \lim_{n\to\infty} [9 + \frac{99}{2} + \frac{81}{2n}]$$

$$= 9 + \frac{99}{2} = 58.5$$

باید په یاد ولرو:

$$\sum_{i=1}^{n} c = cn$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

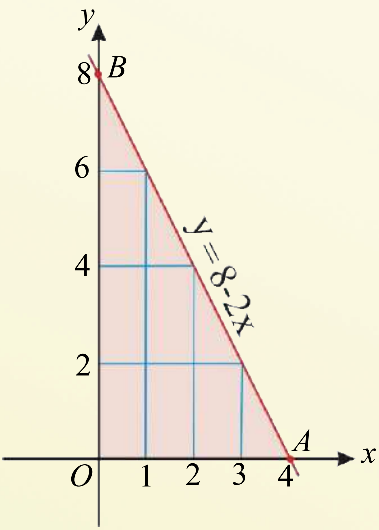
پوښتنې

1. د $[0,3]$ انټروال په بشپړو مساوي برخو له وېشلو څخه وروسته د $y = 3x$ مستقیم خط او د x د محور تر منځ مساحت محاسبه کړئ.

2. د $\Delta x = 0.5$ قیمت لپاره او د لاندې جدول د قیمتونو په پام کې نیولو سره ګراف رسم، د لاندېنیو مستطیلونو د مساحتونو مجموعه اود پورتنیو مستطیلونو د مساحتونو مجموعه پیدا کړئ.

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
y	14	20	26	32	38	44	50

3. د $y = 8 - 2x$ تابع ګراف د لاندې OAB مثلث مساحت د $[0, 4]$ په انټروال کې د ریمان د مجموعې د لیمیټ څخه په ګټه اخیستنې سره پیدا کړئ.



د انتیګرال مفهوم

Concept of Integral

ځرنګه چې پوهېږئ د شکلونو لاندېنې او پورتني مساحتونه د انتیګرال په واسطه محاسبه کېږي.

آیا کولای شو چې د مخامخ شکل پورتنی مساحت په لاس راوړو.

د هغې تابع انتیګرال چې مشتق یې معین وي او یا په بل عبارت د ریمان مجموعي لېمیټ ته انتیګرال وایي دا($\int$) د انتیګرال علامه ده، د sum د کلیمې یا د ریمان د مجموعې د S توري غزېدلې حالت دی، لکه: $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \int f(x)dx$ چې دلته $f(x)$ تابع او dx د $f(x)$ تابع د انتیګرال متحول نظر x ته دی.

انتیګرالونه عموماً په دوه ډوله دي. معین او غیر معین انتیګرالونه، هغه انتیګرالونه چې په ترتیب سره یې تر څېړنې لاندې نیسو:

I- غیرمعین انتیګرال *Indefinite Integral*

- که د $F(x)=2x^2-1$ تابع وي له دې تابع څخه مشتق ونیسئ.
- ددې تابع له مشتق څخه انتیګرال ونیسئ.
- په لاس راغلی انتیګرال له لومړنۍ تابع سره پرتله کړئ او ووایئ چې(-1) په نوموړې تابع کې د څه په نامه یادېږي.
- که په پورتني تابع کې (-1) په C ونوموو د $f(x)$ تابع له څه سره مساوي ده؟
- پورتنی فعالیت د $F(x)=x^6+1$ تابع لپاره تکرار کړئ او ووایئ چې $f(x)$ له څه سره مساوي ده.

له پورتني فعالیت څخه لاندې تعریف په لاس راځي:

تعریف: که چېرې د $f(x)$ تابع د $[a,b]$ په تړلي انټروال کې تعریف او $F(x)$ د $f(x)$ یوه لومړنۍ تابع وي. د $F(x)+C$ تابع ګانو سټ په داسې حال کې چې C یو ثابت عدد وي د $f(x)$ تابع غیرمعین انتیګرال په نامه یادېږي او داسې لیکل کېږي:

$$\int f(x)dx = F(x)+C$$

لومړی مثال: $\int x\,dx$ پیدا کړئ.

حل: $\int x\ dx = \dfrac{x^{1+1}}{1+1} + C = \dfrac{x^2}{2} + C$

دویم مثال: $\int \dfrac{1}{\sqrt[7]{x^3}}\ dx$ حساب کړئ.

حل: $\int \dfrac{1}{\sqrt[7]{x^3}}\ dx = \int x^{-\frac{3}{7}}\ dx = \dfrac{x^{-\frac{3}{7}+1}}{-\frac{3}{7}+1} + C = \dfrac{x^{\frac{4}{7}}}{\frac{4}{7}} + C = \dfrac{7}{4}\sqrt[7]{x^4} + C$

دریم مثال : $\int x^{\frac{3}{2}}\ dx$ پیدا کړئ.

حل: $\int x^{\frac{3}{2}}\ dx = \dfrac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + C = \dfrac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + C = \dfrac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + C = \dfrac{2}{5}\sqrt{x^5} + C$

پوښتنې

لاندې انتیګرالونه محاسبه کړئ:

a) $\int \sqrt[5]{x^3}\ dx$

b) $\int \dfrac{1}{x^4}\ dx$

c) $\int \dfrac{1}{\sqrt{x}}\ dx$

d) $\int \dfrac{x^2\ dx}{\sqrt[4]{x^2}}$

e) $\int \sqrt[8]{x^4}\cdot x\ dx$

د غیرمعین انتیگرال خواص

Properties of indefinite integral

$$\left.\begin{array}{l}\int k\ dx \\ \int [f(x) \pm g(x)]\ dx \\ \int [f(x)\cdot g(x)]\ dx \\ \int \dfrac{f(x)}{g(x)} dx \quad , g(x) \neq 0\end{array}\right\} = ?$$

تاسې د لېمیټ او مشتق خواص مخکې مطالعه کړي؟ آیا کیدای شي چې ورته خواص په غیر معین انتیګرال کې هم وي؟

د مشتقاتو له خواصو څخه په کار اخیستنې د لاندې تابع ګانو مشتق پیدا کړئ.

$$f(x) = 3x^4$$

$$f(x) = 2x^3 - \frac{1}{x^2}$$

$$f(x) = \sin x + \cos x$$

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایلې په لاس راوړو:

څرنګه چې د تابع ګانو د مشتق د پیدا کولو لپاره له ځانګړو قوانینو څخه ګټه اخیستل کېږي، غیرمعین انتیګرالونه هم د داسې خواصو لرونکي دي چې هغه پرته له ثبوت څخه قبلوو:

1- که k یو ثابت عدد وي، نو لرو چې: $\int kdx = k\int dx = kx + C$

مثال: د $\int 5dx$ انتګرال پیدا کړئ.

حل : $\int 5dx = 5\int dx = 5x + C$

2- که چېرې $n \neq -1$ وي، نو : $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$

مثال: د $\int x^4 dx$ **انتيګرال** پيدا کړئ.

حل: $$\int x^4 dx = \frac{x^{4+1}}{4+1} + C = \frac{1}{5}x^5 + C$$

3- که چېرې a يو ثابت عدد او $f(x)$ تابع وي، **نو**:

$$\int a\, f(x)\, dx = a\int f(x)\, dx$$

مثال: د $\int 2x^2\, dx$ **انتيګرال** محاسبه کړئ.

حل: $$\int 2x^2 dx = 2\int x^2 dx = 2\frac{x^3}{3} + C = \frac{2}{3}x^3 + C$$

4- که چېرې $f(x)$ او $g(x)$ دوې تابع ګانې وي په دې صورت کې د تابع ګانو د جمع او تفريق د حاصل انتيګرال مساوي دی په:

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

مثالونه:

$$a)\quad \int (2x^2 + 3)dx = \int 2x^2 dx + \int 3dx = \frac{2x^3}{3} + 3x + C$$

$$b)\quad \int (8 - 2x)dx = 8\int dx - 2\int xdx = 8x - x^2 + C$$

5- که چېرې د تابع ګانو ترادف تر انتيګرال لاندې وي، په دی صورت کې د دوی انتيګرال مساوي دی په:

$$\int [f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx + \ldots + \int f_n(x)dx$$

مثال:

$$\int [x^3 - 6x^2 + 9x + 1]dx = \int x^3 dx - \int 6x^2 dx + \int 9xdx + \int dx$$
$$= \frac{x^4}{4} - \frac{6x^3}{3} + \frac{9x^2}{2} + x + C$$

6- که $f(x)$ او $g(x)$ دوې تابع ګانې وي، په دې حالت کې د تابع ګانو د ضرب د حاصل انتیګرال، مساوي نه دی د انتیګرالونو د ضرب له حاصل سره په جلا توګه، یعنې:

$$\int[f(x)\cdot g(x)]dx \neq \int f(x)dx \cdot \int g(x)dx$$

مثال: که چېرې $f(x)=x+1$ او $g(x)=x-2$ وي، نو:

حل الف: لومړی په تابع ګانو د ضرب عملیه تطبیق کوو او وروسته یې انتیګرال په لاس راوړو:

$$\begin{aligned}\int[f(x)\cdot g(x)]\,dx &= \int[(x+1)(x-2)]dx = \int(x^2-2x+x-2)\,dx\\ &= \int(x^2-x-2)\,dx\\ &= \int x^2dx-\int x\,dx-\int 2\,dx\\ &= \frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x+C\end{aligned}$$

حل ب:اوس د هرې تابع انتیګرال بېل بېل محاسبه کوو او وروسته یې سره ضربوو په لاس راغلي قیمتونه سره پرتله کوو.

$$\begin{aligned}\int f(x)\,dx\cdot\int g(x)\,dx &= \int(x+1)\,dx\cdot\int(x-2)\,dx = (\int x\,dx+\int dx)(=\int x\,dx-\int 2\,dx)\\ &= (\frac{x^2}{2}+x+C)(\frac{x^2}{2}-2x+C) = (\frac{x^2}{2}+x)(\frac{x^2}{2}-2x)+C\\ &\Rightarrow \frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x+C \neq (\frac{x^2}{2}+x)(\frac{x^2}{2}-2x)+C\end{aligned}$$

په پایله کې څرګنده شوه چې نوموړی مساوات حقیقت نه لري.

7- که چېرې $f(x)$ او $g(x)$ دوه تابع ګانې وي په دې صورت کې د توابعو د تقسیم د حاصل انتیګرال مساوي نه دی. د هرې تابع د انتیګرال له حاصل تقسیم سره، یعنې: $\int\frac{f(x)}{g(x)}dx \neq \frac{\int f(x)dx}{\int g(x)dx}$

مثال: که چېرې $f(x)=x^2+2x$ او $g(x)=x$ وي، نو لرو:

د الف جزء حل: لومړی د تابع ګانو د تقسیم د حاصل انتیګرال په لاس راوړو.

$$\int\frac{f(x)}{g(x)}dx = \int\frac{x^2+2x}{x}dx = \int(\frac{x^2}{x}+\frac{2x}{x})dx = \int(x+2)dx = \int xdx+\int 2dx = \frac{1}{2}x^2+2x+C$$

د ب جزء حل: اوس د صورت او مخرج د تابع گانو انتیگرالونه بېلا بېل په لاس راوړو او وروسته يې سره پرتله کوو.

$$\frac{\int f(x)dx}{\int g(x)dx}=\frac{\int (x^2+2x)dx}{\int xdx}=\frac{\int x^2dx+\int 2xdx}{\int xdx}$$

$$=\frac{\frac{1}{3}x^3+x^2}{\frac{1}{2}x^2}+C=\frac{\frac{1}{3}x^3}{\frac{1}{2}x^2}+\frac{x^2}{\frac{1}{2}x^2}+C$$

په پایله کې څرگنده شوه چې

$$\int \frac{f(x)}{g(x)}dx \neq \frac{\int f(x)dx}{\int g(x)dx}$$

پوښتنې

د انتیگرال له خاصیتونو څخه په گټه اخیستنې سره لاندې انتیگرالونه محاسبه کړئ:

a) $\int -17dx=?$

b) $\int \frac{(1+x)^2}{1+x}dx=?$

c) $\int 2x^4dx=?$

d) $\int \frac{1}{x^5}dx=?$

e) $\int (2x^2+4x^3-5x+9)dx=?$

f) $\int (2x+3)^6dx=?$

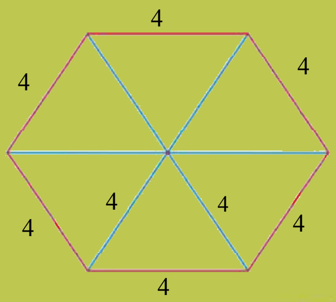
g) $\int \frac{x^3+2x^2}{x^2}dx=?$

h) $\int (2+x)dx=?$

معین انتیگرال

Definite Integral

د شپږ ضلعي دننه مثلثونو د مساحتونو مجموعه پیدا او د شپږ ضلعي له مساحت سره یې پرتله کړئ.



- **د $f(x) = 2x$ د تابع گراف د $[2,5]$ په انټروال کې د $n = 5$ لپاره رسم کړئ او د گراف لاندېنی مساحت پیدا کړئ.**
- په شکل کې د گراف لاندېنی مساحت د کومو دوو عددونو ترمنځ پروت دی.

د پورتنی فعالیت پایله داسې بیانوو:

تعریف: که چېرې د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي وی، نو د $f(x)$ تـابع د ریمـان مجمـوعي لېمیـت ته کله چې n بې‌نهایت ته نژدې شی او د فرعي انټروالونو (Δx) لوی اوږدوالی صفر ته نژدې شي، د $f(x)$ تابع له $x = a$ څخه تر $x = b$ پورې د معین انتیگرال په نوم یادېږي، یعنې:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = \int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

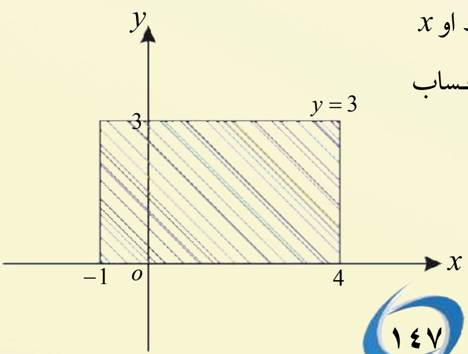
چې a ته د انتیگرال لاندېنی سرحد او b ته د انتیگرال پورتنی سرحد وایي.

لومړی مثال: د $\int_1^3 x^2\,dx$ انتیگرال قیمت پیدا کړئ.

حل: لومړي د $F(x)$ لومړنی تابع پیدا کوو او بیا د مطلوب انتیگرال قیمت ټاکو:

$$\int_1^3 x^2 dx = [\frac{x^3}{3}]_1^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{27-1}{3} = \frac{26}{3}$$

دویم مثـال: هغه مسـاحت چې د $y = 3$ خـط او x محور ترمنځ په $[-1,4]$ انټروال کې محصور دی حساب کړئ.



حل: د $\int_{-1}^{4} 3\ dx$ معین انتیگرال د یوه مستطیل مساحت راښیي چې په تېر شکل کې لیدل کېږي.

ددې مستطیل مساحت د مستطیل د عرض او طول د ضرب له حاصل سره مساوي دی.

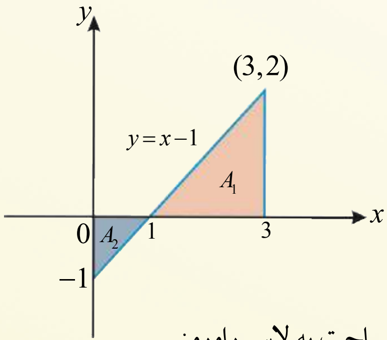
$$\text{د مستطیل مساحت} = 3[4-(-1)] = 3\cdot 5 = 15$$

له انتیگرال څخه په ګټه اخیستنې سره د مستطیل مساحت په لاندې ډول محاسبه کوو.

$$\int_{-1}^{4} 3\ dx = [3x]_{-1}^{4} = 3[4-(-1)] = 15$$

درېیم مثال: هغه مساحت چې د $y = x - 1$ مستقیم خط او x محور ترمنځ په $[0,3]$ انټروال کې محصور دی په لاس راوړئ.

حل:



له شکل څخه په ګټه اخیستنې سره لومړی د ښي خوا د لوی مثلث مساحت په لاس راوړو:

$$A_1 = \frac{1}{2}(2\cdot 2) = \frac{1}{2}\cdot 4 = 2$$

د کوچني مثلث مساحت عبارت دی له:

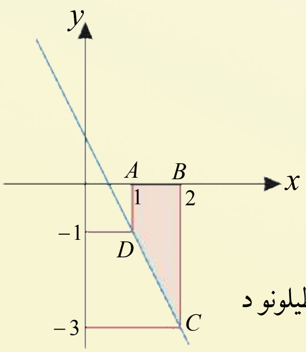
$$A_2 = \frac{1}{2}[1(-1)] = \frac{1}{2}(-1) = -\frac{1}{2}$$

د A_1 او A_2 د مساحتونو مجموعه عبارت ده له:

$$A_1 + A_2 = 2 - \frac{1}{2} = 1.5$$

په پایله کې د نوموړي انتیگرال قیمت عبارت دی له: $\int_0^3 (x-1)\ dx = [\frac{x^2}{2} - x]_0^3 = [\frac{3^2}{2} - 3] - 0 = \frac{9}{2} - 3 = 1.5$

پوښتنې



1. د مخامخ شکل څخه په کار اخیستنې سره هغه مساحت چې د $y = -2x + 1$ د مستقیم خط او د x د محور ترمنځ په $[1,2]$ انټروال کې محصور دی په لاس راوړئ.

2. د $f(x) = x^2$ تابع د لاندېنیو مستطیلونو د مساحت مجموعه او پورتنیو مستطیلونو د مساحت مجموعه په $[0,1]$ انټروال کې د $n = 4$ لپاره په لاس راوړئ.

$$\left.\begin{array}{l}\int_a^b c\,dx \\ \int_a^b [f(x)\pm g(x)]\,dx \\ \int_a^a f(x)\,dx\end{array}\right\} = ?$$

د معین انتیگرال خواص

Properties of definite integral

آیا کولای شو چې د غیرمعین انتیگرال د ځانګړونو څخه

په ګټه اخیستنې سره مخامخ اړیکې پوره کړو.

- د $\sum_{k=1}^{4} 3k^2$ مجموعه حساب کړئ.
- د $\int_a^b x\,dx$ د انتیګرال قیمت د $[-1,1]$ په انټروال کې پیدا کړئ.
- د $\int_0^2 (1+3x)\,dx$ انتیګرال محاسبه کړئ.

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

د ځینو انتیګرالونو محاسبه د قیمت په وضع کولو سره امکان لري او ځینې یې امکان نه لري، دې ته اړتیا پیدا کیږي، ترڅو معین انتیګرال ثبوت کړو.

1. د ثابتې تابع انتیګرال د $[a,b]$ په انټروال کې یعنې $\int_a^b Cdx$ عبارت دی، له:

$$\int_a^b C\,dx = C\int_a^b dx = C[x]_a^b = C(b-a)$$

ثبوت: د $[a,b]$ انټروال په n مساوي برخو، یعنې $\Delta x_i = \dfrac{b-a}{n}$ وېشو او د هر x_i لپاره د i - ام انټروال

څخه لرو: $i = 0,1,2,\ldots,n$ $\qquad f(x_i) = C$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} C\,\Delta x_i = C(\Delta x_1 + \Delta x_2 + \ldots + \Delta x_n) = C\left(\frac{b-a}{n} + \frac{b-a}{n} + \ldots + \frac{b-a}{n}\right)$$

$$= C(b-a)\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}\right) = C(b-a)\frac{n}{n} = C(b-a) \Rightarrow \int_a^b Cdx = C(b-a)$$

مثال: $\int_3^4 dx$ معین انتیګرال حساب کړئ.

حل: $\int_3^4 dx = [x]_3^4 = 4-3=1$

2. که د $f(x)$ تابع د $[a,b]$ په انټروال کې انتیګرال منونکی وي او k یو ثابت حقیقي عدد وي، نو لرو چې:

$$\int_a^b k\,f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

ثبوت: که چېرې د $[a,b]$ انټروال د x_i ، $i=1,2,...,n$ په n مساوي برخو ووېشو، نو د ریمان د مجموعې او انتیګرال د تعریف له مخې لیکلای شو:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} k\,f(x_i)\Delta x = \lim_{n\to\infty} k\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$
$$= k\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = k\int_a^b f(x)\,dx$$
$$\Rightarrow \int_a^b k\,f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

مثال: د $\int_{-2}^{2} 4\,dx$ ټاکلی انتیګرال محاسبه کړئ.

حل: $\int_{-2}^{2} 4dx = 4\int_{-2}^{2} dx = 4[x]_{-2}^{2} = 4(2-(-2)) = 4\cdot 4 = 16$

3. که د $F(x)$ تابع یوه لومړنی تابع د $f(x)$ او په $[a,b]$ انټروال کې متمادي وي، نو:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

ثبوت:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a) = -(-F(b)+F(a))$$
$$= -(F(a)-F(b)) = -\int_b^a f(x)\,dx \;\Rightarrow\; \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

مثال: د $\int_2^3 2x\,dx = -\int_3^2 2x\,dx$ انتیګرال مساوات پیدا کړئ.

حل: لومړی د کېڼ لوری انتیګرال او وروسته د ښيې خوا انتیګرال محاسبه کوو:

$$\int_2^3 2x\,dx = [\frac{2x^2}{2}]_2^3 = \frac{2(3)^2}{2} - \frac{2(2)^2}{2} = \frac{2(9)}{2} - \frac{2(4)}{2} = \frac{18}{2} - \frac{8}{2} = \frac{18-8}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

$$\int_3^2 2x\,dx = [\frac{2x^2}{2}]_3^2 = \frac{2(2)^2}{2} - \frac{2(3)^2}{2} = \frac{2(4)}{2} - \frac{2(9)}{2} = \frac{8}{2} - \frac{18}{2} = \frac{8-18}{2} = -\frac{10}{2} = -5$$

د لاسته راغلو قیمتونو په پام کې نیولو سره پایله په لاس راځي:

$$\int_2^3 2x\,dx = -\int_3^2 2x\,dx$$

4- که د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي وي په هغه صورت کې لرو چې: $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

ثبوت: څرنګه چې $\Delta x = 0$ دی، نو:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \int_a^a f(x)\,dx = F(a) - F(a) = 0$$

$$\Rightarrow \int_a^a f(x)\,dx = 0$$

مثال: د $\int_3^3 3x^2 dx$ انتیګرال محاسبه کړئ.

حل: $\int_3^3 3x^2 dx = [\frac{3x^3}{3}]_3^3 = [x^3]_3^3 = [3^3 - 3^3] = 27 - 27 = 0$

5- که $f(x)$ او $g(x)$ تابع ګانې په $[a\ ,b]$ انټروال کې انتیګرال منونکي وي، نو:

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\ dx$$

ثبوت:

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}[f(x_i) \pm g(x_i)]\ \Delta x$$

$$= \lim_{n\to\infty}[\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x \pm \sum_{i=1}^{n} g(x_i)\,\Delta x]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x \pm \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} g(x_i)\,\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$$

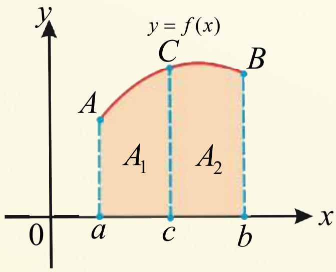
مثالونه:

حل:

$$a)\quad \int_0^1 (4+3x^2)\,dx = \int_0^1 4\,dx + \int_0^1 3x^2\,dx = 4\int_0^1 dx + 3\int_0^1 x^2\,dx = 4[x]_0^1 + 3\,[\frac{x^3}{3}]_0^1 = 4+1 = 5$$

$$b)\quad \int_0^3 (x^2-1)\,dx = \int_0^3 x^2 dx - \int_0^3 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 - [x]_0^3 = \frac{27}{3} - 3 = \frac{27-9}{3} = \frac{18}{3} = 6$$

6. که چېرې د $f(x)$ تابع د (a,b) په یوه تړلې انټروال کې خرنګه چې $a<c<b$ دی د a، b او c ټکی پکی شامل دي انتیګرال منونکي وي، نو:
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$



ثبـــوت: دلتــه د $[a,b]$ انټــروال پــه دوو انټروالونــو د $[a,c]$ او $[c,b]$ تقــسیمو، وروســته د $f(x)$ تــابع انتیګــرال پــه نومــوړو انټروالونو کې په پام کې نیسو.

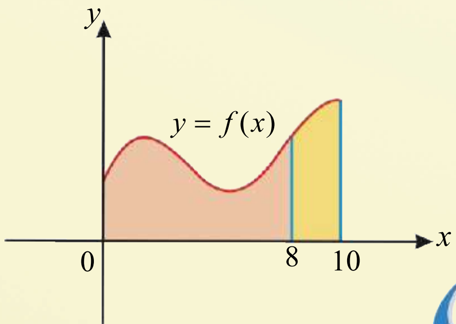
د انتیګرال اصلي مفهوم ته په پام $A=\int_a^b f(x)dx$ پــه حقیقــت کــې د هغــې ســطحې مــساحت دی چــې د $f(x)$ د تابع د ګراف او x د محور ترمنځ د $[a,b]$ په انټروال کې محصوره ده. په داسې حال کې چې د هغې سطحې مساحتونه چې د $f(x)$ ګراف او د x د محور ترمنځ د $[a,c]$ او $[c,b]$ په انټروالونو کې محصوره ده

او په شکل کې واضح لیدل کېږي عبارت ده له: $$A_2 = \int_c^b f(x)\,dx \text{ ، } A_1 = \int_a^c f(x)\,dx$$

په پایله کې ویلای شو چې: $$A = A_1 + A_2 \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

مثال: که چېرې $\int_0^{10} f(x)dx = 17$ او $\int_0^8 f(x)dx = 12$ وي، نو د $\int_8^{10} f(x)dx$ انتیګرال قیمت محاسبه کړئ.

حل:



$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

$$\int_0^{10} f(x)\,dx = \int_0^8 f(x)\,dx + \int_8^{10} f(x)\,dx$$

اوس د $\int_{8}^{10} f(x)\,dx$ انتیګرال قیمت په لاس راوړو:

$$\int_{8}^{10} f(x)\,dx = \int_{0}^{10} f(x)\,dx - \int_{0}^{8} f(x)\,dx = 17 - 12 = 5$$

7. که چیرې د $f(x) \le g(x)$ تابع ګانې په $[a, b]$ انټروال کې انتیګرال منومنکي وي، نو لرو:

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx \le \int_{a}^{b} g(x)\,dx$$

ثبوت:

$$\int_{a}^{b} g(x)\,dx - \int_{a}^{b} f(x)\,dx = \int_{a}^{b} [g(x) - f(x)]\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [g(x) - f(x)]\,\Delta x$$

نو څرنګه $g(x) - f(x) \ge 0$ او $\Delta x \ge 0$ دی، نو د سلسلې هر حد مثبت دی، نو د هغې لېمیټ هم منفي نه دی یعنې:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [g(x_i) - f(x_i)]\,\Delta x \ge 0 \Rightarrow \int_{a}^{b} [g(x) - f(x)]\,dx \ge 0$$

$$\int_{a}^{b} g(x)\,dx - \int_{a}^{b} f(x)\,dx \ge 0 \Rightarrow \int_{a}^{b} g(x)\,dx \ge \int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

مثال: که چیرې $f(x) = 1 - \frac{x^2}{4}$ او $g(x) = 1 + \frac{x^2}{2}$ وي، نو د $x > 1$ لپاره وښیاست چې $\int_{a}^{b} f(x)dx \le \int_{a}^{b} g(x)dx$ دی.

حل:

$$\int_{a}^{b} (1 - \frac{x^2}{4})\,dx \le \int_{a}^{b} (1 + \frac{x^2}{2})dx$$

$$\int_{a}^{b} 1\,dx - \int_{a}^{b} \frac{x^2}{4}\,dx \le \int_{a}^{b} 1\,dx + \int_{a}^{b} \frac{x^2}{2}\,dx$$

$$[x]_a^b - \frac{1}{12}[x^3]_a^b \le [x]_a^b + \frac{1}{6}[x^3]_a^b$$

پوهېږو چې $(b-a)>0$ دی، نو:

$$(b-a)-\frac{1}{12}(b^3-a^3)\le(b-a)+\frac{1}{6}(b^3-a^3)\qquad /\div(b-a)$$

$$1-\frac{1}{12}(a^2+ab+b^2)\le 1+\frac{1}{6}(a^2+ab+b^2)$$

$$-\frac{1}{12}\le+\frac{1}{6}^{3}\qquad /\div(a^2+ab+b^2)$$

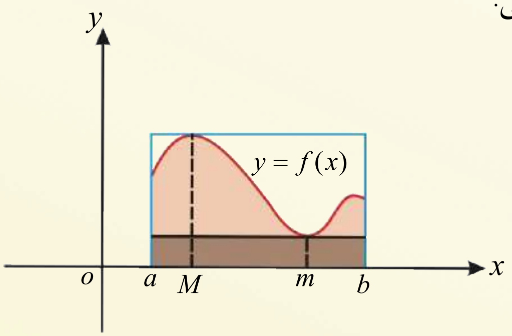
$$-\frac{1}{12}<\frac{1}{6}$$

8. که د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي او m, M قیمتونه په ترتیب سره د تابع مطلق اعظمي او مطلق اصغري قیمتونه په نوموړی انټروال کې وی، نو $m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$

ثبوت: څرنګه چې $m\le f(x)\le M$ دی، نو لرو چې:

$$\int_a^b m\,dx\le\int_a^b f(x)\,dx\le\int_a^b M\,dx$$

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)\,dx\le M(b-a)$$



چې دا وروستنی اړیکه د انتیګرال د تخمیني قضیې په نامه یادیږي.

مثال: $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ انتیګرال په تخمیني توګه حساب کړئ.

حل: څرنګه چې د $f(x)=e^{-x^2}$ تابع په $[0,1]$ انټروال کې متمادي ده او $M=f(0)=e^0=1$ مطلق اعظمي او $m=f(1)=e^{-1}$ مطلق اصغري دی، نو لرو چې:

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)\,dx\le M(b-a)$$

$$e^{-1}(1-0)\le\int_0^1 e^{-x^2}\,dx\le 1(1-0)$$

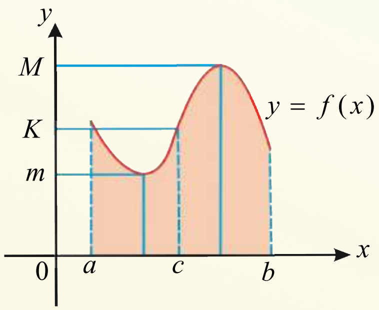
$$e^{-1}\le\int_0^1 e^{-x^2}\,dx\le 1$$

$$e^{-1}=\frac{1}{e}\approx 0,3679\Rightarrow 0.3679\le\int_0^1 e^{-x^2}\,dx\le 1$$

په پایله کې د انتیګرال تخمیني قیمت د 1 او 0.3679 قیمتونو ترمنځ قرار لري.

9. که د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انتروال کې متمادي وي، نو د c یو حقیقي عدد شته چې: $a \le c \le b$ دی، نو:

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$$



ثبوت: د $a < b$ لپاره m او M قیمتونه په ترتیب د تابع مطلق اصغري او اعظمي قیمتونه د $[a,b]$ په انتروال کې وي، لکه: مخامخ شکل د انتیګرال د تخمیني قضیې څخه په کار اخیستنې د $c \in [a,b]$ لپاره لرو چې:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a) \quad \Rightarrow m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \le M$$

فرضوو $K = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ وي، نو $m \le K \le M$ دی او د هر c حقیقي عدد لپاره، $a \le c \le b$

لرو چې: $K = f(c)$ نو: $f(c) = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$

چې دا وروستی اړیکه د متوسط قیمت د قضیې په نامه یادېږي څرنګه چې $f(c)$ د تابع متوسط قیمت په $[a,b]$ انتروال کې دی.

مثال: د $f(x) = x^2$ تابع په $[1,4]$ انتروال کې په پام کې ونیسئ آیا کولای شئ

$$\int_1^4 x^2\,dx = [\frac{x^3}{3}]_1^4 = [\frac{64}{3} - \frac{1}{3}] = [\frac{64-1}{3}] = \frac{63}{3} = 21$$ دی.

حل: څرنګه چې $f(x) = x^2$ تابع ده، اوس که د x په ځای د c قیمت په تابع کې وضع کړو نو: $f(c) = c^2$ سره کېږي چې دلته د متوسط قیمت د قضیې د فورمول څخه د c قیمت داسې په لاس راځي:

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$$

اوس په پورتنی رابطه کې یې قیمت اېږدو، لرو چې:

$$\int_1^4 x^2\, dx = c^2(4-1)$$

$$21 = 3c^2 \Rightarrow c^2 = \frac{21}{3} \Rightarrow c^2 = 7 \Rightarrow c = \sqrt{7}$$

$$k = f(c) \quad , \quad f(c) = c^2 = (\sqrt{7})^2 = 7 \Rightarrow f(c) = 7 \quad , \quad k = 7$$

ښکاره شوه چې د تابع یو قیمت مساوي په k او $4 > \sqrt{7} > 1$ دی.

له مخکې څخه پوهېږو چې د مستطیل مساحت د سور او اوږدوالي له ضرب سره برابر دی، نو د متوسط قیمت په فورمول کې $f(c)$ اوږدوالي او $b-a$ سور دی، نو د منحني لاندې مساحت په $[1,4]$ انټروال کې مساوي له هغه مستطیل سره دی چې اضلاع یې 7 او 3 دی.

پوښتنې

1. لاندې معین انتیګرالونه محاسبه کړئ.

$a)\int_{-1}^{1}(x^3+2)\,dx = ?$

$b)\int_{2}^{5}7x\,dx = ?$

$c)\int_{-2}^{4}(-x)\,dx = ?$

$d)\int_{-1}^{3}(2|x|-3x)\,dx = ?$

$e)\int_{-2}^{3}3x\,dx$

$f)\int_{-1}^{2}(x^3-\frac{1}{2}x^4)\,dx = ?$

$g)\int_{-4}^{4}(2x^2-\frac{1}{8}x^4)\,dx = ?$

$h)\int_{1}^{3}\sqrt{x}\,dx$

2. د $\int_{-1}^{4} f(x)\,dx$ انتیګرال قیمت د $[-1,4]$ په انټروال کې داسې پیدا کړئ چې $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 5$ او $\int_{1}^{4} f(x)dx = -2$ وي.

3. د $f(x) = x$ تابع په $[0,2]$ انټروال کې په نظر کې ونیسئ او د c قیمت په لاس راوړئ.

10- د انتیګرال او مشتق اساسي قضیې

یو موټر په $72\frac{m}{\sec}$ چټکتیا سره په حرکت کې دی،
دریور برک ته فشار ورکوي او موټر له 6 ثانیو وروسته
ودرېږي په دې وخت کې وهل شوي فاصله پیدا کړئ.

$$S(t)=v_0\cdot t$$

فعالیت

- له مشتق د تعریف څخه په ګټې اخیستنې سره د $f(x)=x^2$ د تابع مشتق د $h=0$ په ټکي کې پیدا کړئ.
- د په لاس راغلی تابع انتیګرال په $[0,1]$ انټروال کې محاسبه کړئ.
- د په لاس راغلو دواړو حالتونو قیمتونه سره پرتله کړئ.

له پورتني فعالیت څخه په لاس راځي چې:

د انتیګرال او مشتق تر منځ یوه منطقي اړیکه شته چې له دې اړیکې څخه په کار اخیستنې سره کولای شو، د انتیګرال اصلي او اساسي قضیې په لاندې ډول ثبوت کړو:

1- د انتیګرال او مشتق لومړۍ اساسي قضیه:

که چېرې د $f(x)$ تابع د $[a,b]$ په انټروال کې متمادي وي او x په دې انټروال کې شامل وي، لرو چې:

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt$$

څرنګه چې د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې مشتق منونکې ده، نو د هر $x\in[a,b]$ لپاره $F'(x)=f(x)$ دی.

ثبوت: څرنګه چې د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي ده، نو د هر $x\in[a,b]$ لپاره د $f(x)$ تابع په $[a,x]$ انټروال کې متمادي ده په پایله کې د $f(x)$ تابع په دې انټروال کې انتیګرال منوونکې هم ده.

اوس د $F(x)$ تابع مشتق د تعریف مطابق لیکو او بیا د x متحول ته د h په اندازه تزاید ورکوو، لکه په لاندې ډول:

$$F'(x)=f(x)$$

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(a)+F(a)-F(x)}{h}$$

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(a)-(F(x)-F(a))}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{F(x)\Big|_a^{x+h}-F(x)\Big|_a^{x}}{h}$$

اوس د $f(x)$ تابع په $f(t)$ عوض کوو:

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{F(t)\Big|_a^{x+h}-F(t)\Big|_a^{x}}{h}$$

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\int_a^{x+h} f(t)\,dt-\int_a^{x} f(t)\,dt}{h}$$

نظر دریم خاصیت ته لرو چې: $\int_a^b f(t)\,dt=-\int_b^a f(t)\,dt$

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\int_a^{x+h} f(t)\,dt-\int_a^{x} f(t)\,dt}{h}$$

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\int_x^{a} f(t)\,dt+\int_a^{x+h} f(t)\,dt}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\int_x^{x+h} f(t)\,dt}{h}$$

د متوسط قیمت د قضیې څخه $f(c)=\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt$ چې c د x او $x+h$ تر منځ واقع دی، نوکله چې h صفر ته تقرب وکړي c، x ته تقرب کوي، همدارنګه د f تابع له متمادیت څخه لرو:

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt=\lim_{c\to x} f(c)=f(x)$$

په پایله کې: $F'(x)=f(x)$

مثال: د $f(x)=\int_2^{x^2+1}\frac{1}{t^2+1}$ مشتق پیدا کړئ.

حل:

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt \text{ یا } F(x)=\int_a^{g(x)} f(t)\,dt$$

$$u=g(x)=x^2+1$$

$$f(t)=\frac{1}{t^2+1}$$

د زنځیري قاعدې له مخې لرو:

$$F'(x)=f(g(x))\cdot g'(x)$$

$$F'(x)=\frac{1}{(x^2+1)^2+1}\cdot(x^2+1)'=\frac{1}{(x^2+1)^2+1}\cdot 2x$$

$$F'(x)=\frac{2x}{(x^2+1)^2+1}$$

2- د انتیگرال او مشتق دویمه اساسي قضیه:

که چېرې $F(x)$ د $f(x)$ تابع لومړنی تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي وي، په دې صورت کې لرو چې:

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$$

ثبـــوت: لـه مخکــې قـضیې ځـخـه پـوهېږو چـې کـه $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ دی لـه دې ځایـه د هر $x \in [a,b]$ لپاره $F'(x) = f(x)$ نو د دې دوو مقدارونو خلاف یو ثابت مقدار شته چې:

$$f(x) - F(x) = k \Rightarrow f(x) = F(x) + k$$

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

$$F'(x) = f(x)$$

$$\int_a^x f(t)dt = f(x) = F(x) + k$$

$$\int_a^x f(t)\ dt - F(x) = k$$

که د x په ځای په پورتنی رابطه کې a وضع کړو، نو:

$$\int_a^a f(t)\ dt - F(a) = k \quad , \quad 0 - F(a) = k \quad \Rightarrow \quad k = -F(a)$$

که د k قیمت په لومړی رابطه کې وضع کړو، نو: $\int_a^x f(t)dt - F(x) = -F(a)$

که د x په ځای په دې رابطه کې b وضع شي، نو: $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$

چې اخیـري رابطه پـه $\int_a^b f(t)\,dt = [F(x)]_a^b$ پـه شکل شـودل کېـږي دغـه وروسـتی اړیکـه د لـومړنی تـابع او انتیګـرال تـرمنځ اړیکـه ښـیي چــې د نیوټن"لایبنز" رابطې په نوم هم یادېږي.

یادونه:

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + c$$

$$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + c$$

$$\int \cos ec^2 x\,dx = -\cot x + c$$

مثال: د $\int_0^1 x^2 dx$ انتیګرال حاصل پیدا کړئ.

حل: $\int_0^1 x^2 dx = F(1) - F(0) = [\frac{x^3}{3}]_0^1 = \frac{1}{3}\cdot 1^3 - \frac{1}{3}\cdot 0^3 = \frac{1}{3}$

پوښتنې

1. **لاندې مشتقات پیدا کړئ.**

$a)\ F(t) = \int_{\sin t}^{\cos t} \frac{1}{4 - x^2} dx$

$b)\ F(t) = \int_0^{\cos t} \frac{1}{4 - x^2} dx$

$c)\ F(t) = \int_{-\pi}^{t} \frac{\cos y}{1 + y^2} dy$

$d)\ F(x) = \int_1^x \frac{\sin t}{t} dt$

2. که په $f(t) = t$ تابع کې $F(0) = 2$ وي، د $F(b)$ مقدار په $0, 0.2, 0.4, \ldots, 1$ ټکو کې پیدا کړئ.

3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx$ پیدا کړئ.

11- په تعويضي طريقې سره انتيګرال نيونه

$$\int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx$$

ـ آيا کولای شئ چې مخامخ انتيګرال د نامعين انتيګرال له خواصو څخه په کار اخېستنې سره حل کړئ.

ـ که نه شی کولای، نو د جذر لاندې افاده په يوه متحول سره عوض کړئ او بيا هغه حساب کړئ او ووايئ چې په انتيګرال کې د وضع کولو دا طريقه په څه نوم يادېږي.

- د $\int_0^4 \sqrt{2x+1}\,dx$ انتيګرال کې د جذر لاندې افاده په u سره عوض کړئ.
- د u مشتق ونيسي او د dx قيمت پيدا کړئ.
- څرنګه چې نوموړی انتيګرال يو معين انتيګرال دی، نو د $u = 2x+1$ په معادله کې د $x = 0$ او $x = 4$ قيمتونه وضع او د انتيګرال حدونه د u له جنسه په لاس راوړئ، وروسته د انتيګرال قيمت محاسبه کړئ.

له پورتني فعاليت څخه لاندې پايلې ته رسېږو:

که د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې مشتق منونکې وي، $u = g(x)$ او $F'(x) = f(x)$ سره تعويض شي، څرنګه چې $du = g'(x)dx$ دی، له زنځيري قاعدې څخه ليکلای شو:

$$\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

لومړی مثال: د $\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2}$ انتيګرال قيمت پيدا کړئ.

حل: د قوس دننه افاده په u عوض کوو:

$$u = 3-5x \quad , \qquad du = -5\,dx \qquad\qquad dx = -\frac{du}{5}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ u = 3-5x \quad \Rightarrow \quad u = 3-5\cdot 1 = -2 \quad \Rightarrow \quad u = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ u = 3-5x \quad \Rightarrow \quad u = 3-5\cdot 2 = 3-10 \quad \Rightarrow \quad u = -7 \end{cases}$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2} = \int_{-2}^{-7} \frac{1}{u^2}(-\frac{1}{5})\,du = -\frac{1}{5}\int_{-2}^{-7}\frac{du}{u^2} = -\frac{1}{5}\left[-\frac{1}{u}\right]_{-2}^{-7} = \left[\frac{1}{5u}\right]_{-2}^{-7} = \frac{1}{5}\left[-\frac{1}{7}+\frac{1}{2}\right] = \frac{1}{14}$$

دویم مثال: د $\int_0^1 x^2(1+2x^3)^5\,dx$ انتیگرال حساب کړئ.

حل: د قوس دننه افاده په u عوض کوو.

$$u = 1+2x^3 \quad , \quad du = 6x^2\,dx \Rightarrow x^2 dx = \frac{1}{6}du$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ u = 1+2x^3 \Rightarrow u = 1+2\cdot 0 = 1 \Rightarrow u = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ u = 1+2x^3 \Rightarrow u = 1+2\cdot 1 = 3 \Rightarrow u = 3 \end{cases}$$

$$\int_0^1 x^2(1+2x^3)^5\,dx = \int_1^3 u^5\,\frac{1}{6}\cdot du = \frac{1}{6}\int_1^3 u^5 du = \frac{1}{6}[\frac{u^6}{6}]_1^3 = \frac{1}{6}[\frac{3^6}{6}-\frac{1}{6}]$$

$$= \frac{1}{6}[\frac{729}{6}-\frac{1}{6}] = \frac{1}{6}[\frac{728}{6}]$$

$$= \frac{728}{36} = \frac{182}{9} = 20.\overline{2}$$

فعالیت

- د $\int x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$ انتیگرال کې د جذر لاندې افاده د u په متحول سره تعویض کړئ.
- له u څخه مشتق ونیسئ او په لاس راغلې قیمت په لومړنی انتیګرال کې وضع او هغه حساب کړئ.

- له پورته څخه د $F(x)+C$ په لاس راغلي تابع څخه مشتق ونیسئ او له هغې څخه لومړنی تابع په لاس راوړئ.

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

که د $F(u)$ تابع د $f(u)$ لومړنی تابع وي، د $u=g(x)$ د متحول په تعویض سره یوه بله تابع چې مستقل متحول یې x او متمادي مشتق ولري له زنځیري قاعدې څخه په کاراخیستنې سره لرو:

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx=\int f(u)\,du$$

لومړی مثال: $\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$ انتیگرال حساب کړئ.

حل: د جذر لاندې افاده په u سره عوض کوو.

$$u=1-4x^2 \ ,\ du=-8x\,dx$$

$$xdx=-\frac{1}{8}du$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx=\int \frac{1}{\sqrt{u}}(-\frac{1}{8})\,du=-\frac{1}{8}\int \frac{1}{\sqrt{u}}\,du=-\frac{1}{8}\int u^{-\frac{1}{2}}\,du=-\frac{1}{8}\,(\frac{u^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1})+C$$

$$=-\frac{1}{8}(\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}})+C=-\frac{1}{8}(\frac{\sqrt{u}}{\frac{1}{2}})+C=-\frac{1}{8}(2\sqrt{u})+C=-\frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2}+C$$

دویم مثال: $\int x^3\cos(x^4+2)dx$ حساب کړئ.

حل: که چېرې $u=x^4+2$ وضع کړو په لاس راځي:

$$u=x^4+2 \ ,\ du=4x^3dx \ ,\ x^3dx=\frac{1}{4}du$$

$$\int x^3\cos(x^4+2)\,dx=\int \cos u\cdot\frac{1}{4}du$$

$$=\frac{1}{4}\int \cos u\,du$$

$$=\frac{1}{4}\sin u+C$$

$$=\frac{1}{4}\sin(x^4+2)+C$$

پوښتنې

لاندې انتیګرالونه د تعویض له لارې محاسبه کړئ.

$a)\ \int \cos 3x\, dx = ?$

$b)\ \int_1^2 x\sqrt{x-1}\ dx = ?$

$c)\ \int_0^7 \sqrt{4+3x}\ dx = ?$

$d)\ \int 2\sqrt[5]{(1-4x)^2}\, dx = ?$

$e)\ \int 2x(x^2+3)^4\, dx = ?$

$f)\ \int_0^5 \frac{x\, dx}{x^2+10} = ?$

$g)\ \int \sqrt{\cos x}\ \sin x\ dx = ?$

12- په قسمي طریقې سره انتیگرال نیونه Integration by Parts

د حجروي وېش په وخت کې یوه حجره په دوو یا څو حجرو وېشل کېږي. آیا کولای شئ دا لاره(روش) په نورو شیانو کې، لکه: تیږه، شګه او نورو کې ووینو که څواب هو وي، نو دا لاره د څه په نامه یادېږي.

د میتوز د سلول وېش، د مور د هر سلول څخه، وروسته د میتوز د سلولي وېش څخه، دوه نور سلولونه جوړېږي.

فعالیت

- د $\int \frac{xdx}{x^2+1}$ انتیگرال په تعویضي طریقه حل کړئ.
- د $\int_{-1}^{1} 3x^2\sqrt{x^3+1}dx$ انتیگرال قیمت په تعویضي طریقه پیدا کړئ.
- آیا کولای شئ چې د $\int x^2 \sin x dx$ انتیگرال په تعویضي طریقه حل کړئ.

له پورتني فعالیت څخه دې پایلې ته رسېږو:

د $\int f(x)g(x)\,dx$ په انتیگرال کې $f(x)$ او $g(x)$ دوې مشتق منونکې تابع ګانې دي چې یوه له بلې سره د ضرب ور وي یا نه وي، خو د انتیگرال محاسبه یې اسانه کار نه دی، که چېرې $f(x)=u$ او $g(x)=v$ وضع کړو، د ضرب حاصل مشتق یې مساوي په: $(u\cdot v)'=u'\cdot v+v'\cdot u$ دی.

له پورتنی رابطې څخه $v'\cdot u$ په لاس راوړو اوله اطراف څخه انتیگرال نیسو:

$$v'\cdot u=(u\cdot v)'-u'\cdot v$$

$$\int v'\cdot u\ dx=u\cdot v-\int u'\cdot v\ dx \quad \text{یا} \quad \int udv=u\cdot v-\int vdu$$

چې پورتنۍ رابطې ته د غیرمعین انتیگرال فورمول په قسمي طریقه وایي.

که د u او v تابع ګانې په $[a,b]$ انټروال کې تعریف شوی وي، لاندې فورمول د معین انتیگرال فورمول په قسمي لاره(طریقه) بلل کېږي.

$$\int_a^b v'u\,dx=u\cdot v\,\Big|_a^b-\int_a^b vu'\,dx \quad \text{یا} \quad \int_a^b udv=u\cdot v\,\Big|_a^b-\int_a^b vdu$$

لومړی مثال: د $\int x\sin x\,dx$ انتيګرال پيدا کړئ.

حل:

$$u = x \quad , \quad du = dx$$
$$dv = \sin x\,dx \quad , \quad v = -\cos x$$
$$\int udv = u\cdot v - \int vdu$$
$$\int x\sin x\,dx = x(-\cos x) - \int -\cos x\,dx$$
$$= -x\cos x + \sin x + C$$

دويم مثال: د $\int_0^1 -x\,e^x\,dx$ انتيګرال حساب کړئ.

حل:

$$u = -x \quad , \quad du = -dx \quad , \quad -du = dx$$
$$dv = e^x dx \quad , \quad v = e^x$$
$$\int_a^b v'\cdot u\,dx = u\cdot v\,\Big|_a^b - \int_a^b v\cdot u'\,dx$$
$$\int_0^1 -xe^x\,dx = [-xe^x]_0^1 + \int_0^1 e^x dx$$
$$= -e^1 + 0\cdot e^0 + [e^x]_0^1$$
$$= -e^1 + e^1 - e^0 \;\; = -e^0$$
$$= -1$$

يادونه:

$$\int e^x\,dx = e^x + c$$

پوښتنې

لاندې انتيګرالونه حساب کړئ.

a) $\int \theta\cos\theta\,d\theta = ?$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2x\,dx = ?$

c) $\int x^5\cos(x^3)\,dx = ?$

d) $\int_0^1 x\,e^x\,dx = ?$

د ریمان مجموعه: فرضوو د $y=f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي او تعریف شوی وي او د هغې ناحیې مساحت چې د x محور او د $y=f(x)$ منحني ترمنځ واقع دی چې په هندسي شکلونو نه شي بدلېدلای، محاسبه کړو.

د $[a,b]$ انټروال په n مستطیلو نو تقسیموو ځرنګه چې د هر مستطیل عرض د $(\Delta x=\dfrac{b-a}{n})$ رابطې څخه په لاس راځي او د مستطیلونو طول عبارت دی د تابع قیمت په هم هغه ټکي کې، دا فاصلې په لاندې ډول دي:

او د مستطیلونو انټروالونه د $i=1,2,3,\ ....,n$ لپاره په لاندې ډول دي:

$$x_0=a \quad , \quad x_1=a+\Delta x \quad , \quad x_2=a+2\Delta x,\ \dots\ ,x_i=a+i\Delta x,\ \dots\ ,x_n=b$$
$$[x_0,x_1]\ ,\ [x_1,x_2]\ ,\ [x_2,x_3],\ \dots\ ,[x_{i-1},x_i],\ \dots\ ,[x_{n-1},x_n]$$

که د لاندېنیو مستطیلونو مساحت په $f(x_{i-1})\Delta x$ او د پورتنیو مستطیلونو مساحت په $f(x_i)\Delta x$ وښودل شي او د محصور شوي سطحې مساحت په A وښیو، نو لرو چې:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x < A < \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

نامعین انتیګرالونه:که چېرې د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې تعریف او $F(x)$ د $f(x)$ یوه لومړنی تابع وي. د $F(x)+C$ توابعو سټ چې c یو ثابت عدد وي د غیرمعین انتګرال په نامه یادېږي او داسې لیکل کېږي: $\int f(x)dx=F(x)+C$

د نامعین انتیګرالونو خواص(ځانګړتیاوې):

$$\int kdx=k\int dx=kx+C$$
$$\int a\,f(x)\,dx=a\int f(x)\,dx$$
$$\int[f(x)\pm g(x)]dx=\int f(x)\ dx\pm\int g(x)\ dx$$
$$\int[f_1(x)+f_2(x)+\dots+f_n(x)]dx=\int f_1(x)dx+\int f_2(x)dx+\dots+\int f_n(x)dx$$
$$\int[f(x)\cdot g(x)]\ dx\neq\int f(x)\,dx\cdot\int g(x)\,dx$$
$$\int\frac{f(x)}{g(x)}dx\neq\frac{\int f(x)dx}{\int g(x)dx}\quad ,\ g(x)\neq 0$$

معین انتیګرال: د $f(x)$ تابع د ریمان مجموعې لیمیټ ته په $[a,b]$ انټروال کې کله چې n بې‌نهایت تـه نږدې شي د Δx فرعي انټروالونو اوږدوالی صفر ته نږدې کېږي چې د $f(x)$ تابع معین انتیګـرال د $x=a$ څخه تر $x=b$ پورې په نوم یادېږي.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x=\int_a^b f(x)dx=\left[F(x)\right]_a^b=F(b)-F(a)$$

a ته د انتیګرال لاندېنی سرحد او b ته د انتیګرال پورتنی سرحد وایي.

د معین انتیګرال خواص(ځانګړتیاوې):

$$\int_a^b C\,dx=C(b-a)$$

$$\int_a^b k\,f(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\,dx$$

$$\int_a^a f(x)\,dx=0$$

$$\int_a^b [f(x)\pm g(x)]dx=\int_a^b f(x)\,dx\pm\int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$$

$$f(x)\le g(x)\quad\Rightarrow\quad\int_a^b f(x)\,dx\le\int_a^b g(x)\,dx$$

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)\,dx\le M(b-a)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx=f(c)(b-a)\quad\Rightarrow\quad f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

د انتیګرال او مشتق لومړی اساسي قضیه:

که چېرې د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي وي او x په دې انټروال کې شامل وي، لرو چې:

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt$$

څرنګه چې د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې د مشتق وړ ده، نو د هر $x\in[a,b]$ لپاره $F'(x)=f(x)$ دی.

د انتیګرال او مشتق دویمه اساسي قضیه:

- که چېرې $F(x)$ تابع د $f(x)$ لومړنی تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي وي، په دې صورت کې لرو چې:

$$\int_a^b f(t)\,dt=F(b)-F(a)$$

- که $F(u)$ د $f(u)$ لومړنی تابع وي او له $u=g(x)$ متحول سره تعویض شي چې مستقل متحول یې x او متمادي مشتق ولري. له زنځیري قاعدې څخه په کار اخیستنې سره لرو:

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx=\int f(u)\,du$$

- که $F(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې مشتق منونکې وي او $u=g(x)$ همدارنګه له $F'(x)=f(x)$ سره تعویض شي، څرنګه چې $du=g'(x)dx$ دی، له زنځیري قاعدې څخه لیکلای شو:

$$\int_a^b f(g(x))\ g'(x)\ dx=\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$$

- د $\int f(x)g(x)dx$ انتیګرال کې $f(x)$ او $g(x)$ دوې مشتق منونکې تابع ګانې وي چې په خپل منځ کې قابل د ضرب وي او یا نه وي، خو د انتیګرال محاسبه یې آسانه کار نه دی، که چېرې $f(x)=u$ او $g(x)=v$ سره عوض شي، د هغوی د حاصل ضرب مشتق عبارت دی له:

$$(u\cdot v)'=u'v+v'u$$

له پورتني اړیکې څخه $v' \cdot u$ په لاس راوړو او له دواړو خواوو څخه انتیګرال نیسو:

$$\int v' \cdot u \ dx = u \cdot v - \int u' \cdot v \ dx \quad \text{یا} \quad \int u dv = u \cdot v - \int v du$$

چې اخیرۍ اړیکې ته د غیر معین انتیګرال فورمول په قسمي طریقه وایي.

- که د u او v تابع ګانې په $[a,b]$ انټروال کې تعریف شوی وي لاندې فورمول، د معین انتیګرال فورمول په قسمي لاره(طریقه) بلل کېږي:

$$\int_a^b v'u \, dx = u \cdot v \Big|_a^b - \int_a^b vu' \, dx \quad \text{یا} \quad \int_a^b u dv = u \cdot v \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

د څپرکي پوښتنې

1- د لاندې معینو انتیګرالونو قیمت پیدا کړئ.

$a)\ \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+x^2}dx$ $\quad b)\int_{-4}^{4}[2x^2-\frac{1}{8}x^4]dx$ $\quad c)\ \int_{2}^{4}\frac{1}{x^2}dx$

$d)\int_{0}^{3}4dx$ $\quad e)\ \int_{1}^{3}\sqrt{x}\ dx$ $\quad f)\ \int_{1}^{2}(x^2-x^5)dx$

$g)\ \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\cos^2 x}dx$ $\quad h)\ \int_{-2}^{0}[\frac{x^3}{4}+\frac{x^2}{3}]dx$ $\quad i)\ \int_{2}^{3}(x^3+x^2)dx$

$j)\int_{-2}^{2}[x^3-\frac{1}{2}x^2+3x-4]dx$ $\quad k)\ \int_{0}^{\pi}\sin x dx$ $\quad l)\ \int_{1}^{2}x^2\ dx$

2- لاندې غیر معین انتګرالونه په لاس راوړئ.

$a)\ \int[\sin x+8x^3]dx$ $\quad b)\ \int[x^5+\frac{4}{x^4}+x^3+\frac{2}{x^2}+x]dx$

$c)\ \int x(1-2x^2)dx$ $\quad d)\ \int\sin x\,dx$

$e)\ \int\frac{\sin 2x}{2\sin x}dx$ $\quad f)\ \int\frac{(1-x)^2}{1-x}dx$

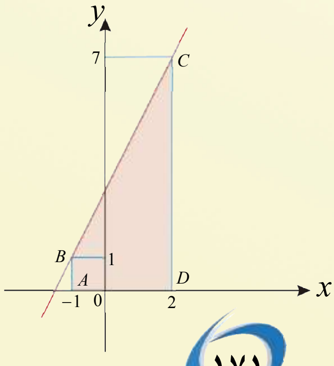
$g)\ \int\sqrt[5]{x^3}\ dx$ $\quad h)\ \int\frac{3x^2+8x}{x}dx$

$i)\ \int\left(2x^2+3\right)dx$ $\quad j)\ \int\frac{x^2}{\sqrt{x^3+2}}dx$

$k)\ \int\frac{(1+x)(1-x)}{x-x^3}dx$ $\quad l)\int(3x^2+4x-1)\ dx$

3- د لاندې محصور رنګ شوې سطحې مساحت د شکل له مخې پیدا کړئ.

$\int_{-1}^{2}(2x+3)dx$



4- لاندې انتيګرالونه د تعويضي طريقې په مرسته پيدا کړئ.

a) $\int 3\cos(2x+1)\,dx$

b) $\int \sqrt{3x+5}\,dx$

c) $\int \frac{2\,dx}{x+2}$

d) $\int (3x+6)^3\,dx$

e) $\int x^3\sqrt{x^4+2}\,dx$

f) $\int (x^3+2)^2 3x^2 dx$

g) $\int_0^2 \frac{dt}{(3-2t)^2}$

h) $\int_0^2 x^2\cdot\sqrt{9-x^3}\,dx$

i) $\int \frac{1}{(x-10)^7}dx$

j) $\int_0^1 (1-x^2)^3 x dx$

k) $\int (4-3x)^7 dx$

l) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt[4]{x^3+2}}$

5- لاندې انتيګرالونه د قسمي طريقې په مرسته پيدا کړئ.

a) $\int x\cos x\,dx$

b) $\int_0^{\pi} \sin x\cos x\,dx$

c) $\int e^x\cdot\cos x\,dx$

d) $\int_0^{2\pi} x\cos 3x\,dx$

e) $\int xe^{-x}dx$

f) $\int x\sqrt{1+x}\,dx$

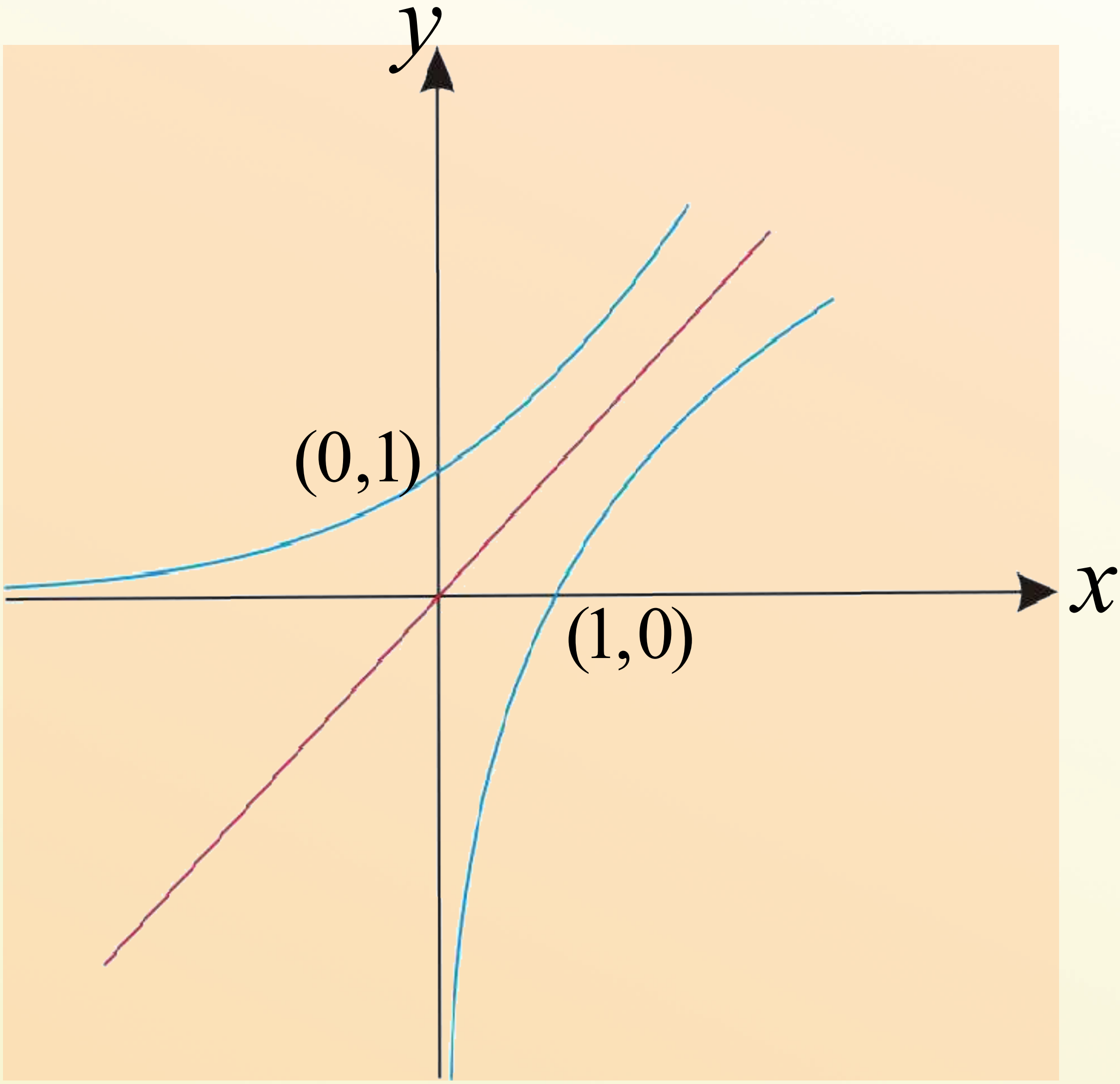
g) $\int x^2\cdot e^{2x}dx$

h) $\int e^{2x}\sin 3x\,dx$

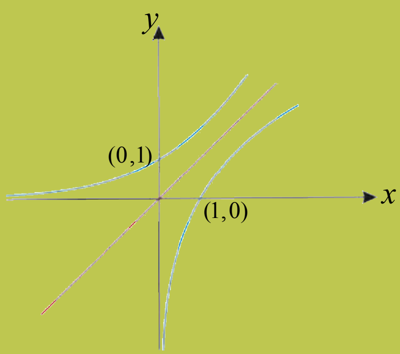
i) $\int x^2\cdot e^{-x}\,dx$

پنځم څپرکی

د لوګاریتمي او اکسپوننشیل تابع ګانو مشتق او انتیګرال


y
(0,1)
x
(1,0)

د لوګاریتمي او اکسپوننشیل تابع ګانو مشتق



مخامخ شکل د څه ډول تابع ګانو ګراف راښيي، نومونه يې واخلئ.

فعالیت

- لوګاریتم تعریف او خواص يې وليکئ.
- لوګاریتمي او اکسپوننشيل تابع ګانې يوه له بلې سره څه اړيکې لري.
- که $\log_b x$ يوه متصله تابع وي، نو $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ له کوم عدد سره مساوي ده.
- د $y = f(x)$ د تابع له دواړو خواوو څخه طبيعي لوګاریتم ونيسئ، اړيکه يې وليکئ.

د پورتني فعاليت پايله داسې بيانوو:

په عمومي ډول که $f(x)=\ln x$ او $g(x)=a^x$ وي؛ نو $g'(x)=a^x \ln a$ او $f'(x)=\dfrac{1}{x}$ دی.

ثبوت:

-1

$$y = g(x) = a^x$$
$$\ln y = \ln a^x = x \ln a$$

د مساوات له دواړو خواوو څخه نظر x ته مشتق نيسو:

$$\frac{y'}{y} = x' \ln a + x(\ln a)'$$
$$\frac{y'}{y} = \ln a + 0$$
$$\frac{1}{y} y' = \ln a$$
$$y' = y \ln a \quad \Rightarrow \quad g'(x) = a^x \ln a$$

-2

$$f(x)=\ln x$$

$$(\ln x)'=\lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\ln\frac{x+h}{x}}{h}$$

$$(\ln x)'=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\ln(\frac{x+h}{x})=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\ln(1+\frac{h}{x})\ =\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\frac{x}{h}\ln(1+\frac{h}{x})$$

$$=\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\ln(1+\frac{h}{x})^{\frac{x}{h}}$$

که $u=\frac{x}{h}$ وضع شي نو $\frac{h}{x}=\frac{1}{u}$ دی خرنگه چې $h\to 0$ تقرب وکړي، نو $u\to\infty$ ته نژدې کېږي، لیکلای شو چې:

$$(\ln x)'=\frac{1}{x}\lim_{u\to\infty}\ln(1+\frac{1}{u})^{u}\ =\frac{1}{x}\ln\lim_{u\to\infty}(1+\frac{1}{u})^{u}$$

پوهېږو چې $\lim_{u\to\infty}(1+\frac{1}{u})^{u}=e$ دی، نو: $(\ln x)'=\frac{1}{x}\ln e=\frac{1}{x}$

قضیه

1. که د $f(x)=\log_a x$ تابع مشتق منوونکی وي، نو مشتق یې $f'(x)=\frac{1}{x}\log_a e$

2. که $f(x)=\log_a g(x)$ او $g(x)$ مشتق منوونکی وي، نو $(\log_a g(x))'=\frac{g'(x)}{g(x)}\log_a e$

ثبوت:

-1

$$f(x)=\log_a x\quad\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x}\log_a e$$

$$f'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log_a\frac{x+h}{x}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log_a(1+\frac{h}{x})=\lim_{h\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{h}\log_a(1+\frac{h}{x})=\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\log_a(1+\frac{h}{x})^{\frac{x}{h}}$$

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x}\log_a\lim_{h\to 0}(1+\frac{h}{x})^{\frac{x}{h}}$$

اوس که $\frac{x}{h}=u$ وضع شي، نو $\frac{h}{x}=\frac{1}{u}$ کېږي، که $h\to 0$ صفر ته تقرب وکړي، نو $u\to\infty$ کوي، یعنې:

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x}\log_a\lim_{u\to\infty}(1+\frac{1}{u})^{u}\ =\frac{1}{x}\log_a e$$

2- غوارو ثبوت کړو چې: $(\log_a g(x))'=\dfrac{g'(x)}{g(x)}\log_a e$

د زنځيري قاعدې له مخې:

$$f'(x)=(\log_a g(x))'=(\log_a g(x))'\cdot g'(x)=\frac{1}{g(x)}\log_a e\cdot g'(x)$$

$$=\frac{g'(x)}{g(x)}\log_a e$$

که $a=e$ وضع شي، نو لرو: $(\log_a g(x))'=(\ln g(x))'=\dfrac{g'(x)}{g(x)}$

پایله:

1- د Exponential تابع ګانو مشتق د لوګاريتم په مرسته کولای شو په اسانۍ سره په لاس راوړو.

که $y=e^x$ وي ددې تابع مشتق $y'=e^x$ دی، ځکه که د $y=e^x$ رابطې څخه طبيعي لوګاريتم ونيسو، په لاس راځي:

$$y=e^x \quad \Rightarrow \ln y=x\ln e=x$$

$$(\ln y)'=(x)' \quad \Rightarrow \frac{y'}{y}=1 \quad \Rightarrow y'=y\cdot 1=e^x$$

2- که $y=e^u$ او u تابع د x وي، نو: $y'=u'e^u$

3- که $y=a^u$ کله چې $a>0$ او $a\neq 1$ وي، نو: $y'=u'a^u\ln a$

4- د لوګاريتمي تابع ګانو د مشتق پيدا کولو لپاره په بيلابيلو قاعدو سره له دې اريکې څخه ګټه اخلو:

$$y=\log_a u\Rightarrow y'=(\log_a u)'=\frac{u'}{u}\log_a e$$

$$y'=\frac{u'}{u}\log_a e=\frac{u'}{u}\cdot\frac{1}{\log_e a} \quad \Rightarrow y'=\frac{u'}{u\ln a}$$

لومړی مثال: د $f(x)=\ln(x^2+1)$ تابع مشتق پيدا کړئ.

حل: که $g(x)=x^2+1$ وضع کړو، نو لرو:

$$g(x)=x^2+1$$
$$g'(x)=2x$$
$$(\ln g(x))'=\frac{g'(x)}{g(x)}$$
$$(\ln(x^2+1))'=\frac{(x^2+1)'}{x^2+1}=\frac{1}{x^2+1}\cdot 2x \quad \Rightarrow f'(x)=(\ln(x^2+1))'=\frac{2x}{x^2+1}$$

دویم مثال: د $f(x)=\ln(x^2-5x+4)$ تابع مشتق پیدا کړئ.

حل:

$$\left.\begin{aligned}&f(x)=\ln(x^2-5x+4)\\&g(x)=x^2-5x+4\ \Rightarrow\ g'(x)=2x-5\end{aligned}\right\}\quad \begin{aligned}&(\ln g(x))'=\frac{g'(x)}{g(x)}\\&(\ln(x^2-5x+4))'=\frac{g'(x)}{g(x)}=\frac{2x-5}{x^2-5x+4}\end{aligned}$$

دریم مثال: د $f(x)=\log_a\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}}$ او $f(x)=\ln\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}}$ تابع گانو مشتق پیدا کړئ.

حل: پوهېږو چې $\log_a\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}}=\log_a(\dfrac{x^2+1}{x^2-1})^{\frac{1}{2}}$ دی، نو لیکلای شو چې:

$$\log_a\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}=\log_a(\frac{x^2+1}{x^2-1})^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\log_a\frac{x^2+1}{x^2-1}=\frac{1}{2}(\log_a(x^2+1)-\log_a(x^2-1))$$

$$(\log_a\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}})'=\frac{1}{2}(\log_a(x^2+1)-\log_a(x^2-1))'$$

$$=\frac{1}{2}[\frac{(x^2+1)'}{(x^2+1)}\log_a e-\frac{(x^2-1)'}{(x^2-1)}\log_a e]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{2x}{x^2+1}\log_a e-\frac{2x}{x^2-1}\log_a e\right]=\frac{1}{2}\cdot 2x\log_a e\left[\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{x^2-1}\right]$$

$$=\frac{-2x}{x^4-1}\log_a e$$

حل: پوهېږو چې $\ln\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}}=\ln(\dfrac{x^2+1}{x^2-1})^{\frac{1}{2}}$ دی، نو لیکلای شو چې:

$$\ln\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}=\ln(\frac{x^2+1}{x^2-1})^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}(\ln(x^2+1)-\ln(x^2-1))$$

$$(\ln\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}})'=\frac{1}{2}[\ln(x^2+1)-\ln(x^2-1)]'=\frac{1}{2}[(\ln(x^2+1))'-(\ln(x^2-1))']$$

$$=\frac{1}{2}(\frac{2x}{x^2+1}-\frac{2x}{x^2-1})=\frac{-2x}{x^4-1}$$

خلورم مثال: د $y=e^{(x^2+1)}$ تابع مشتق پیدا کړئ.

حل: پوهېږو چې که $y=e^u$ وي نو $y'=u'e^u$

$$y=e^{(x^2+1)} \quad \Rightarrow \quad y'=(x^2+1)'\cdot e^{x^2+1}=2x\cdot e^{x^2+1}$$

پنځم مثال: د $y=\sqrt[x]{2}$ تابع مشتق په لاس راوړئ.

حل: پوهېږو چې که چېرې $y=a^u$ وي، نو $y'=u'a^u\ln a$ سره دی، نو:

$$y=\sqrt[x]{2}=(2)^{\frac{1}{x}} \quad \Rightarrow \quad y'=(\frac{1}{x})'\cdot 2^{\frac{1}{x}}\ln 2=\frac{-1}{x^2}\cdot 2^{\frac{1}{x}}\cdot\ln 2$$

شپږم مثال: د $y=x^{2x}$ تابع مشتق پیدا کړئ.

حل: که د معادلې له دواړو خواوو څخه طبیعي لوګاریتم ونیسو، په لاس راځي چې:

$$y=x^{2x}$$
$$\ln y=\ln x^{2x}$$
$$\ln y=2x\ln x$$
$$(\ln y)'=(2x\ln x)' \quad \Rightarrow \quad \frac{y'}{y}=2\ln x+2x\cdot\frac{1}{x}$$
$$y'=2(\ln x+1)\cdot y \quad \Rightarrow \quad y'=2(\ln x+1)\cdot x^{2x}$$

اووم مثال: د $y=10^x$ تابع مشتق حساب کړئ.

حل: پوهېږو چې $y=a^x \quad \Rightarrow \quad y'=a^x\ln a$ دی، نو:

$$y=10^x$$
$$y'=10^x\cdot\ln 10$$

اتم مثال: د $y=e^{3x}$ تابع مشتق پیدا کړئ.

حل: که $u=3x$ وضع شي، نو: $u'(x)=3$

$$y=e^u$$
$$y'=e^u\cdot u'=e^{3x}\cdot 3$$
$$y'=3e^{3x}$$

نهم مثال: د لاندې تابع ګانو مشتق پیدا کړئ.

1) $y=\log(x^4+1)$ 2) $y=\log_3(\log_2 x)$ 3) $y=\log_{x^2-1}x^2+1$

حل: پوهېږو چې د لوګارتمي توابعو مشتق په مختلفو قاعدو سره د لاندې قضيې څخه پـه ګـټه اخېستنې سـره پـه لاس راوړو:

$$y = \log_a u$$

$$y' = (\log_a u)' = \frac{u'}{u}\log_a e = \frac{u'}{u\log_e a} = \frac{u'}{u\ln a}$$

$$1)\quad y = \log(x^4+1) \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{4x^3}{(x^4+1)\ln 10}$$

$$2)\quad y = \log_3(\log_2 x) \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{(\log_2 x)'}{\ln 3 \log_2 x} = \frac{\frac{1}{x\ln 2}}{\ln 3\log_2 x} = \frac{1}{(\ln 2)(\ln 3)x\log_2 x}$$

$$= \frac{1}{\ln 2\cdot\ln 3\cdot x\cdot\frac{\log_e x}{\log_e 2}} = \frac{1}{\ln 2\cdot\ln 3\cdot x\cdot\frac{\ln x}{\ln 2}} = \frac{1}{\ln 3\, x\ln x}$$

$$3)\quad y = \log_{x^2-1} x^2+1 = \frac{\log_e(x^2+1)}{\log_e(x^2-1)} = \frac{\ln(x^2+1)}{\ln(x^2-1)}$$

پوهېږو چې $y' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2} \quad \Leftarrow \quad y = \dfrac{u}{v}$ **دی؛ نو لرو:**

$$y' = \frac{\frac{2x}{x^2+1}\cdot\ln(x^2-1) - \frac{2x}{x^2-1}\ln(x^2+1)}{\left[\ln(x^2-1)\right]^2}$$

پوښتنې

د لاندې توابعو مشتق پیدا کړئ:

$a)\quad f(x) = \ln\sin 3x$

$b)\quad f(x) = \ln\sqrt{3x^2+7}$

$c)\quad f(x) = \ln(5x^2-6x+5)$

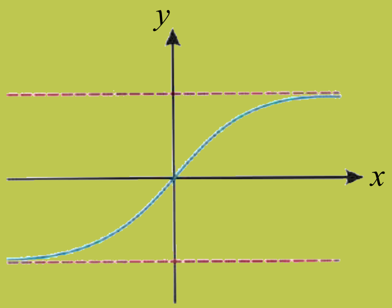
$d)\quad f(x) = \log_{10} 3x^2$

$e)\quad f(x) = y = x^x$

$f)\quad y = \dfrac{(x+1)^2(\sqrt{x}-1)}{(x+4)^3 e^x}$

د معکوسو تابع گانو مشتق

مخامخ شکل د څه ډول تابع گراف راښيي؟



کـه چېـرې f او g يـوه د بلـې دوې معکوسـې تـابع گـانې وي، يعنـې $y=f(x)\Leftrightarrow x=g(y)$ وي، نـو:

$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$ يا $y'_x=\frac{1}{x'_y}$ دی، څکه چې د تابع او ضمني تابع گانو له مشتق څخه ليکلای شو:

$$\left.\begin{array}{l} y=f(x) \\ x=g(y) \end{array}\right\} \Rightarrow y'_x\cdot x'_y=y'_y \quad \Rightarrow y'_x\cdot x'_y=1 \quad \Rightarrow y'_x=\frac{1}{x'_y}$$

مثال: د $y=a^x$ تابع مشتق د هغې د معکوسې تابع په مرسته پيدا کړئ.

حل:

$$y=a^x \quad \Rightarrow x=\log_a y$$

$$\Rightarrow y'_x=\frac{1}{x'_y}=\frac{1}{(\log_a y)'}=\frac{1}{\frac{1}{y}\log_a e}=\frac{1}{\frac{1}{y}}\log_e a=y\log_e a$$

$$y'=a^x\ln a$$

د مثلثاتي معکوسو تابع گانو مشتق

د مثلثاتي معکوسو تابع گانو مشتق د لاندې اړيکو په مرسته لاسته راوړو:

1) $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

2) $(\arccos x)'=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

3) $(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$

4) $(arc\cot x)'=\frac{-1}{1+x^2}$

ثبوت:

1) $y = arc\sin x \quad \Leftrightarrow \quad x = \sin y$

$(arc\sin x)' = ?$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}$$

$$\Rightarrow (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

2) $y = arc\cos x \quad \Leftrightarrow \quad x = \cos y$

$(arc\cos x)' = ?$

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\cos y)'} = \frac{1}{-\sin y} = \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2 y}}$$

$$\Rightarrow (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

3) $y = arc\tan x \Leftrightarrow x = \tan y$

$$\Rightarrow (arc\tan x)' = y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\tan y)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \cos^2 y$$

$$= \frac{\cos^2 y}{1} = \frac{\cos^2 y}{\sin^2 y + \cos^2 y}$$

دکسر صورت او مخرج په $\cos^2 y$ ويشو:

$$(arc\tan x)' = \frac{\cos^2 y}{\sin^2 y + \cos^2 y} = \frac{1}{\tan^2 y + 1} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

4) $y = arc\cot x \Leftrightarrow x = \cot y$

$$(arc\cot x)' = ?$$

$$(arc\cot x)' = y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\cot y)'} = \frac{1}{\frac{-1}{\sin^2 y}}$$

$$= -\sin^2 y = \frac{-\sin^2 y}{1} = \frac{-\sin^2 y}{\sin^2 y + \cos^2 y}$$

د کسر صورت او مخرج په $\sin^2 y$ ويشو:

$$= -\frac{\sin^2 y}{\sin^2 y + \cos^2 y} = \frac{-1}{1+\cot^2 y} = -\frac{1}{1+x^2}$$

لومړی مثال: د $y = (\arctan x)^5$ تابع مشتق پيدا کړئ.

$$y' = 5(\arctan x)^4(\arctan x)' = 5(\arctan x)^4 \frac{1}{1+x^2}$$

دويم مثال: د $y = \log_5(\arctan x)$ تابع مشتق پيدا کړئ.

$$y' = [\log_5(\arctan x)]' = (\log_5 u)' = \frac{u'}{u \log_5 e}$$

$$= \frac{\frac{1}{1+x^2}}{\arctan x \log_5 e} = \frac{1}{(1+x^2)(\arctan x \ln 5)}$$

دريم مثال: د $y = arc\tan e^x$ تابع د مشتق مقدار د $x = 0$ ټکي کې پيدا کړئ.

$$y' = \left[arc\tan e^x\right]' = (arc\tan u)' = \frac{u'}{1+u^2} = \frac{e^x}{1+e^{2x}}$$

$$y'(0) = \frac{e^0}{1+e^0} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

پوښتنې

1. د لاندې تابع ګانو مشتق پیدا کړئ.

$$1)\ y = (arc\sin x)^3$$

$$2)\ y = \log_2(arc\cos x)$$

قسمي کسرونه

د يو کسر تجزيه کول په قسمي کسرونو:

پوهېږو چې د $\frac{2}{x+1}$ او $\frac{1}{x^2-1}$ د جمعې حاصل $\frac{2x-1}{x^2-1}$ دی، آیا کولای شئ چې له دې کسر څخه د $\frac{2}{x+1}$ او $\frac{1}{x^2-1}$ کسرونه لاسته راوړئ.

$$\frac{2}{x+1}+\frac{1}{x^2-1}=\frac{2x-1}{x^2-1}$$

- د $\frac{7}{x+1}$ ، $\frac{5}{x-2}$ او $\frac{2}{x-5}$ کسرونه سره جمع کړئ.
- د پورته کسرونود جمعې حاصل، بېرته په لومړنيو کسرونو واړوئ.
- واقعي کسرونه څه ډول کسرونه دي، تعريف يې کړئ.

د پورتني فعاليت پايله داسې بيانوو:

تعريف: د يوه واقعي کسر هغه کوچنی کسرونه چې د جمعې د عواملو په شکل ليکل شوي وي، که چېرې هغوی سره جمع کړو، راکړل شوی واقعي کسر به په لاس راشي، نو دا جمع شوي لومړني کسرونه د قسمي کسرونو په نامه يادېږي.

د يوه واقعي کسر د تجزيه کولو لپاره لاندې حالتونه په پام کې نيسو:

لومړی حالت:

که چېرې د $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ ناطق کسر مخرج ($P_n(x)$) له خطي بېلابېلو ضربي عواملو څخه جوړ شوي وي او تکرار نه وي په لاندې بڼه بدلېدلای شي:

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)}=\frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{x-x_2}+\frac{C}{x-x_3}+\ \cdots\ +\frac{N}{x-x_n}$$

(A, B, C .... حقيقي عددونه دي)

لومړی مثال: د $\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}$ کسر په قسمي کسرونو تجزيه کړئ.

حل: د مخرج پولينوم په لومړنيو ضربي عواملو تجزيه کوو، نو په لاس راځي:

$$x^3-4x^2-7x+10=(x-5)(x-1)(x+2)$$

لیدل کېږي چې نوموړی کسر له درو قسمي کسرونو څخه جوړ شوی دی، صورتونه يې C, B, A ټاکو:

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{A}{x-5}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+2}$$

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{A(x-1)(x+2)+B(x-5)(x+2)+C(x-1)(x-5)}{(x-5)(x-1)(x+2)}$$

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{Ax^2+Ax-2A+Bx^2-3Bx-10B+Cx^2-6Cx+5C}{(x-5)(x-1)(x+2)}$$

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{(A+B+C)x^2+(A-3B-6C)x+(-2A-10B+5C)}{(x-5)(x-1)(x+2)}$$

لیدل کېږي چې د دواړو خواوو د کسرونو مخرجونه سره برابر دي، نو بايد صورتونه هم سره برابر وي، نو د مطابقت د خواصو(د ورته حدونو ضريبونه سره مساوي وي) څخه په ګټه اخستنې سره لیکو:

$$\begin{cases} A+B+C=4 \\ A-3B-6C=-1 \\ -2A-10B+5C=-39 \end{cases}$$

د پورته سیستم له حل څخه وروسته $B=3, A=2$ او $C=-1$ په لاس راځي، نو:

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{2}{x-5}+\frac{3}{x-1}-\frac{1}{x+2}$$

دويم مثال: د $\dfrac{3x^3-6x^2-20x-1}{x^2-2x-8}$ کسر په قسمي کسرونو تجزيه کړئ.

حل: لومړی نوموړی کسر په واقعي کسر بدلوو او بيا پورتنۍ طريقه پرې تطبيقوو:

$$\frac{3x^3-6x^2-20x-1}{x^2-2x-8}=3x+\frac{4x-1}{x^2-2x-8} \Rightarrow \frac{4x-1}{x^2-2x-8}=\frac{A}{x-4}+\frac{B}{x+2}$$

$$=\frac{A(x+2)+B(x-4)}{(x-4)(x+2)}=\frac{(A+B)x+(2A-4B)}{x^2-2x-8}$$

$$\left.\begin{aligned} A+B&=4 \\ 2A-4B&=-1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow A=\frac{5}{2} \qquad , \qquad B=\frac{3}{2}$$

$$\frac{3x^2-6x^2-20x-1}{x^2-2x-8}=3x+\frac{5}{2(x-4)}+\frac{3}{2(x+2)}$$

دويم حالت:

که د کسر د مخرج ضربي عوامل لومړی درجه پولینوم وي چې ځینې یې تکرار راغلی وي، یعنې که د $x-x_0$ عامل n ځلې په مخرج کې تکرار شوی وي، نو لیکلای شو چې:

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)}=\frac{A}{x-x_0}+\frac{B}{(x-x_0)^2}+\cdots+\frac{N}{(x-x_0)^n}$$

لومړی مثال: د $\dfrac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}$ واقعي کسر په قسمي کسرونو تجزیه کړئ:

حل: د مخرج د پولینوم ضربي عوامل په لاس راوړو:

$$x^3-4x^2+5x-2=(x-1)(x-2)(x-1)$$

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{3x^2-6x+2}{(x-2)(x-1)^2}=\frac{A}{(x-2)}+\frac{B}{(x-1)}+\frac{C}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{A(x-1)^2+B(x-2)(x-1)+C(x-2)}{(x-2)(x-1)^2}$$

$$=\frac{(A+B)x^2+(-2A-3B+C)x+(A+2B-2C)}{(x-2)(x-1)^2}$$

$$\left.\begin{array}{l}A+B=3\\ -2A-3B+C=-6\\ A+2B-2C=2\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{array}{l}A=2\\ B=1\\ C=1\end{array}$$

$$\Rightarrow\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{2}{x-2}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}$$

دریم حالت:

که د مخرج ضربي عوامل دویمه درجه پولینوم چې د تجزیې وړ نه وي او تکرار هم نه وي راغلی، نو د $\dfrac{P_m(x)}{P_n(x)}$ واقعي پولینوم د یو قسمي کسر $\dfrac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ بڼه لري.

لومړی مثال: د $\dfrac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}$ کسر په قسمي کسرونو تجزیه کړئ.

حل: د مخرج پولینوم ضربي عوامل عبارت دی له:

$$x^3+3x^2+6x+4=(x+1)(x^2+2x+4)$$

ځرنګه چې د x^2+2x+4 درې جملهیي د حقیقي عددونو په سټ کې حل نه لري، نو په دې ساحه کې د تجزیې وړ نه ده. له دې امله لیکو:

$$\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}=\frac{Ax+B}{x^2+2x+4}+\frac{C}{x+1}=\frac{(Ax+B)(x+1)+C(x^2+2x+4)}{(x^2+2x+4)(x+1)}$$

$$=\frac{(A+C)x^2+(A+B+2C)x+(B+4C)}{(x^2+2x+4)(x+1)}$$

$$\left.\begin{array}{l}A+C=5\\ A+B+2C=8\\ B+4C=9\end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{l}A=3\\ B=1\\ C=2\end{array}\Rightarrow \frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}=\frac{3x+1}{x^2+2x+4}+\frac{2}{x+1}$$

پوښتنې

لاندې کسرونه په قسمي کسرونو تجزیه کړئ.

-1

$a)\ \frac{-x^2+2x-12}{x^3+2x^2+6x+5}$ $\quad b)\ \frac{4x^2-3x+8}{x^3-2x+4}$ $\quad c)\ \frac{2x^4-8x^3+7x^2-3x+4}{x^2-9x+3}$

-2

$a)\ \frac{1}{x^4(x+1)}$ $\quad b)\ \frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}$ $\quad c)\ \frac{x^4+1}{x^2(x-1)}$

$d)\ \frac{3x^2+5x+10}{x^3+2x^2-4x-8}$ $\quad e)\ \frac{3x^2-18x+36}{x^3-6x^2+9x}$

-3

$a)\ \frac{3x+7}{(x^2+x+1)(x^2-4)}$ $\quad b)\ \frac{x^2+3x+4}{x^4-2x^2+1}$

$c)\ \frac{x^2+13x+10}{x^3-5x^2}$ $\quad d)\ \frac{x^5}{x^4-1}$

د اکسپوننشل تابع ګانو انتیګرالونه

مخامخ اړیکې سره پرتله کړئ.

$$\log_a b = x$$

$$a^x = b$$

فعالیت

- د $f(x) = a^x$ تابع څه ډول تابع ده، نوم یې واخلئ.
- د لوګاریتمي تابع یوه بېلګه ولیکئ.
- د $\log_a x = C$ اړیکه په اکسپوننشیل ډول ولیکئ.

له پورتني فعالیت څخه لیکلای شو چې:

د $f(x) = e^x$ طبیعي اکسپوننشیل تابع لپاره لرو $\int e^x dx = e^x + C$ نو په عمومي ډول

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} \quad , \; a \neq 1 \quad , \; a \in IR^+$$

ثبوت: له تعویضي طریقې څخه په کار اخیستنې سره لرو:

$$u = a^x$$

$$du = \ln a \cdot a^x dx$$

$$dx = \frac{du}{\ln a \cdot a^x} = \frac{du}{u \ln a}$$

$$\int a^x dx = \int u \frac{du}{u \ln a} = \frac{1}{\ln a} \int dx$$

$$\frac{1}{\ln a} u = \frac{1}{\ln a} a^x = \frac{a^x}{\ln a} \Rightarrow \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

لومړی مثال: د $f(x)=2^{x-3}$ اکسپوننشیل تابع انتیګرال غواړو پیدا کړو:

د توان له قانون څخه لرو:

$$2^{x-3}=\frac{2^x}{2^3}=\frac{1}{8}2^x$$

$$\int 2^{x-3}dx=\int\frac{1}{8}2^x dx=\frac{1}{8}\int 2^x dx$$

$$\frac{1}{8}\int 2^x dx=\frac{1}{8}\cdot\frac{2^x}{\ln 2}+C$$

دویم مثال: دلاندې اکسپوننشیل تابع ګانو انتیګرالونه پیدا کړئ.

$1)\ \int 3^{x+1}\,dx=?\qquad 2)\ \int 6^{x-1}\,dx=?$

حل:

1) $\int 3^{x+1}\,dx=?$

$$3^{x+1}=3^x\cdot 3$$

$$\int 3^x\cdot 3\,dx=3\int 3^x\,dx=3\cdot\frac{3^x}{\ln 3}+C$$

2) $\int 6^{x-1}\,dx=?$

$$6^{x-1}=\frac{6^x}{6}=\frac{1}{6}\cdot 6^x$$

$$\int\frac{1}{6}6^x\,dx=\frac{1}{6}\int 6^x\,dx=\frac{1}{6}\cdot\frac{6^x}{\ln 6}+C$$

پوښتنې

د لاندې اکسپوننشیل تابع ګانو انتیګرالونه محاسبه کړئ.

$a)\ \int 3^{x-1}dx\qquad b)\ \int 2^{-x}dx\qquad c)\ \int a^{x+b}dx$

$d)\ \int\frac{1}{a^x}dx\qquad e)\ \int 2^x\cdot 3^x dx\qquad f)\ \int\frac{2^x}{3^x}dx$

$g)\ \int\frac{4^{x+3}}{2^x}dx\qquad h)\ \int\frac{5^x+3^x}{2^x}dx\qquad i)\ \int(1+2^x)dx$

د لوگاریتمي تابع گانو انتیگرال

وښیئ چې د تابع په کوم حالت کې نزولي او په کوم حالت کې صعودي ده.

$$y = a^x$$

$$\int a^x dx = ?$$

- لوگاریتم په څو ډوله دی، د هر ډول عمومي رابطه ولیکئ.
- د $x = a^y$ او $y = \log_a x$ معادلې یو له بل سره څه اړیکه لري.
- د $x = b^y$ او $y = \log_b x$ تابع گانو گراف رسم کړئ.
- آیا کولای شو چې د لوگاریتمي تابع گانو انتیگرال ونیسو؟

له پورتني فعالیت څخه پایله داسې بیانوو:

که $(x \in IR^+)$ $f(x) = \ln x$ وي د طبیعي لوگاریتم د تابع لپاره لیکلای شو: $\int \ln dx = x \cdot \ln x - x + C$

که $(x, a \in IR^+, a \neq 1)$ $f(x) = \log_a x$ وي د معمولي لوگاریتم تابع لپاره لیکلای شو:

$$\int \log_a x\, dx = x \log_a \frac{x}{e}$$

ثبوت:

1- که $a = e$ وضع شی، نو:

$$\int \log_a x\, dx = x \log_a \frac{x}{e} + C$$

$$\int \log_e x\, dx = \int \ln x dx = x \log_e \frac{x}{e} = x(\log_e x - \log_e e)$$

$$\int \ln x\, dx = x \ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C$$

-2

$$\int \log_a x\,dx = x\log_a \frac{x}{e} + C$$

$$u = \log_a x \quad , \quad du = \frac{1}{x}\log_a e\,dx$$

$$dv = dx \quad , \quad v = x$$

$$\int \log_a x\,dx = x\log_a x - \int x\frac{1}{x}\log_a e\,dx$$

$$= x\log_a x - \log_a e\int dx$$

$$= x\log_a x - x\log_a e = x(\log_a x - \log_a e) = x\log_a \frac{x}{e} + C$$

$$\int \log_a x\,dx = x\ \log_a \frac{x}{e} + C$$

مثال: د $\int \ln 3x dx$ غیرمعین انتیګرال غواړو پیدا کړو:

حل:

$$\int \ln 3x dx = \int (\ln 3 + \ln x) dx = \int \ln 3\,dx + \int \ln x\,dx$$
$$= x\ln 3 + x\ln x - x$$
$$= x(\ln 3 + \ln x) - x = x(\ln 3x - 1)$$

یادونه:

(I) د تعویض Substitution له لارې کولای شو د غیرمعین انتیګرال حل پیدا کړو.

لومړی مثال: لاندې انتیګرالونه پیدا کړئ.

حل:

$$a)\quad I = \int \frac{1}{2}e^{-2x-3}dx$$

$$-2x - 3 = u, \qquad -2 = \frac{du}{dx} \quad , \quad dx = -\frac{1}{2}du$$

$$I = \int \frac{1}{2}e^{u}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)du = -\frac{1}{4}\int e^{u}du = -\frac{1}{4}e^{u} + C = -\frac{1}{4}e^{-2x-3} + C$$

$$b)\quad I = \int \frac{2dx}{x+2}$$

$$x + 2 = u, \qquad 1 = \frac{du}{dx} \qquad dx = du$$

$$I = \int \frac{2du}{u} = 2\int \frac{du}{u} = 2\ln|u| + C = 2\ln|x+2| + C$$

دويم مثال: د $f(x)=e^{2x}$ تابع انتیګرال ونيسئ:

حل:

$$f(x)=e^{2x} \Rightarrow \int f(x)dx=\int e^{2x}dx=?$$

$$u=2x \Rightarrow du=2dx$$

$$dx=\frac{du}{2}$$

$$f(x)=e^{2x} \Rightarrow \int f(x)dx=\int e^{u}\cdot\frac{du}{2}=\frac{1}{2}\int e^{u}\,du$$

$$\int e^{2x}dx=\frac{e^{u}}{2}+C=\frac{e^{2x}}{2}+C=\frac{1}{2}e^{2x}+C$$

آزمايښت: $F(x)=\frac{1}{2}e^{2x}+C \Rightarrow F'(x)=\frac{1}{2}e^{2x}\cdot 2=e^{2x}=f(x)$

دريم مثال: د $f(x)=x\cdot\ln x^{2}$ انتیګرال حساب کړئ.

حل:

$$f(x)=x\cdot\ln x^{2} \Rightarrow \int f(x)dx=\int (x\cdot\ln x^{2})dx=?$$

$$u=x^{2}$$

$$du=2x\,dx \Rightarrow dx=\frac{1}{2}du$$

$$\int f(x)\,dx=\int x\cdot\ln u\cdot\frac{1}{2x}du=\frac{1}{2}\int\ln u\,du=\frac{1}{2}[u\cdot\ln u-u+C]=\frac{1}{2}u\cdot\ln u-\frac{1}{2}u+C$$

$$=\frac{1}{2}x^{2}\cdot\ln x^{2}-\frac{1}{2}x^{2}+C$$

(II) معين انتیګرالونه هم د بدلون(تعويض) له لارې حل کېږي.

لومړی مثال: د $\int_{-1}^{1}e^{2x}\,dx$ انتیګرال پيدا کړئ.

$$f(x)=e^{2x} \Rightarrow \int_{-1}^{1}e^{2x}\,dx$$

$$u=2x \Rightarrow du=2\,dx \Rightarrow dx=\frac{1}{2}du$$

$$\left.\begin{array}{l} x=-1,\ u=2x \Rightarrow u=2(-1)=-2 \\ x=1,\ u=2x \Rightarrow u=2(1)=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \int_{-1}^{1}e^{2x}\,dx=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}e^{u}\,du=\frac{1}{2}\left[e^{u}\right]_{-2}^{2}=3.627$$

دویم مثال: د $f(x)=\int_1^2 2x\cdot\ln x^2 dx$ انتیگرال قیمت پیدا کړئ.

$$u=x^2$$

$$du=2x\,dx \Rightarrow dx=\frac{1}{2x}du$$

$$\left.\begin{array}{l} x=1 \ , \ u=x^2=1 \\ x=2 \ , \ u=x^2=4 \end{array}\right\} \Rightarrow \int_1^2 2x\cdot\ln x^2 dx=\int_1^4 2x\cdot\ln u\cdot\frac{1}{2x}du=\int_1^4 \ln u\,du$$

$$=\left[u\cdot\ln u-u\right]_1^4=\left[4\cdot\ln 4-4\right]-\left[1\cdot\ln 1-1\right]\approx 2.545$$

پوښتني

لاندې انتیگرالونه حل کړئ.

a) $\int \ln 2x^3 dx$ b) $\int \ln\sqrt{x}\,dx$ c) $\int \log\frac{x}{2}dx$

d) $\int 3\log\frac{1}{x}dx$ e) $\int_1^2 \frac{4}{e^{2x-4}}dx$

د قسمي کسرونو په مرسته د انتیګرال محاسبه

د مخامخ کسر قسمي کسرونه پیدا کړئ.

$$\frac{5}{x^2-3x+2}=\frac{?}{(x-2)}+\frac{?}{(x-1)}$$

مخکې مو د قسمي کسرونو تجزیه مطالعه کړه اوس غواړو چې د هغو تابع ګانو انتیګرالونه د قسمي کسرونو په واسطه تر څېړنې لاندې ونیسو.

لومړی مثال: $\int \frac{7x-12}{x^2-6x+8}dx$ محاسبه کړئ.

حل: د قسمي کسرونو د تجزیې په مرسته لیکلای شو:

$$\frac{7x-12}{x^2-6x+8}dx=\frac{A}{(x-2)}+\frac{B}{(x-4)}$$

$$\frac{A(x-4)+B(x-2)}{(x-2)(x-4)}=\frac{Ax-4A+Bx-2B}{(x-2)(x-4)}=\frac{(A+B)x-4A-2B}{(x-2)(x-4)}$$

$$A+B=7$$

$$-4A-2B=-12$$

$$A=7-B$$

$$-4(7-B)-2B=-12$$

$$-28+4B-2B=-12$$

$$-28+2B=-12$$

$$2B=16 \quad \Rightarrow \quad B=8$$

$$A=7-8=-1$$

$$\frac{7x-12}{x^2-6x+8}=-\frac{1}{x-2}+\frac{8}{x-4}$$

نو لیکلای شو چې:

$$\int\frac{7x-12}{x^2-6x+8}dx=\int\frac{-1}{x-2}dx+\int\frac{8}{x-4}dx$$

$$\int\frac{7x-12}{x^2-6x+8}dx=-\int\frac{1}{x-2}dx+8\int\frac{1}{x-4}dx$$

$$=-\ln|x-2|+8\ln|x-4|+C=\ln(x-2)^{-1}+\ln(x-4)^8+C$$

$$=\ln\left[(x-2)^{-1}\cdot(x-4)^8\right]=\ln\left[\frac{(x-4)^8}{x-2}\right]+C$$

دویم مثال: د $\int \frac{-5x+9}{x^2+x-6}dx$ انتیګرال محاسبه کړئ.

حل: مخرج په فکټورونو تجزیه کوو: $x^2+x-6=(x-2)(x+3)$

نو:

$$\frac{-5x+9}{x^2+x-6}=\frac{-5x+9}{(x-2)(x+3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+3}$$

$$\frac{A(x+3)+B(x-2)}{(x-2)(x+3)}=\frac{Ax+3A+Bx-2B}{(x-2)(x+3)}=\frac{(A+B)x+3A-2B}{(x-2)(x+3)}$$

$$(A+B)x+3A-2B=-5x+9$$

$$A+B=-5 \Rightarrow A=-5-B$$

$$3A-2B=-5x+9$$

د A او B عددي قیمتونه عبارت دي له:

$$3(-5-B)-2B=9$$

$$-15-5B=9$$

$$-5B=24$$

$$B=-\frac{24}{5}$$

$$A=-5+\frac{24}{5}=\frac{-25+24}{5}=-\frac{1}{5}$$

$$\frac{-5x+9}{x^2+x-6}=\frac{-\frac{1}{5}}{x-2}-\frac{\frac{24}{5}}{x+3}$$

$$\int\frac{-5x+9}{x^2+x-6}=\int\frac{-\frac{1}{5}}{x-2}dx-\int\frac{\frac{24}{5}}{x+3}dx=-\frac{1}{5}\int\frac{1}{x-2}dx-\frac{24}{5}\int\frac{1}{x+3}dx$$

$$=-\frac{1}{5}\ln(x-2)-\frac{24}{5}\ln(x+3)$$

$$=\ln(x-2)^{-\frac{1}{5}}+\ln(x+3)^{-\frac{24}{5}}=\ln\left[(x-2)^{-\frac{1}{5}}\cdot(x+3)^{-\frac{24}{5}}\right]+C$$

پوښتنې

لاندې انتیګرالونه د قسمی کسرونو په طریقه حل کړئ.

a) $\int\frac{x+2}{x^3-3x^2-x+3}dx$ b) $\int\frac{x-2}{x^2-6x+5}dx$ c) $\int\frac{x^6}{x^4+3x^2+2}dx$

د خپرکي مهم ټکي

- که $f(x)=e^x$ وي، نو ددې تابع مشتق عبارت له $f'(x)=e^x$ دی.
- که $f(x)=a^x$ وي، د دې تابع مشتق $f'(x)=a^x\cdot\ln a$ دی.
- که $f(x)=\log_a x$ وي، نو د تابع مشتق $f'(x)=\frac{1}{x}\log_a e=\frac{1}{x\ln a}$ دی.
- $f(x)=\log_a g(x)$ وي، نو د تابع مشتق $(\log_a g(x))'=\frac{g'(x)}{g(x)}\log_a e$ دی.
- **قسمي کسرونه**: د یوه واقعي کسر هغه کوچنی کسرونه چې د جمعې د عواملو په شکل لیکل شوي دي که هغوی جمع کړو، راکړل شوي واقعي کسر په لاس راځي، قسمي کسرونه بلل کېږي.
- که چېرې د $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ د کسري پولینوم مخرج ($P_n(x)$) د خطي بېلابېلو ضربي عواملو څخه جوړوي چې تکرار نه وي راغلی په لاندې بڼه بدلیدلای شي:

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)}=\frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{x-x_2}+\frac{C}{x-x_3}+\cdots+\frac{N}{x-x_n}$$

- که د لوړې درجه پولینوم مخرج ضربي عوامل چې ځینې یې تکرار راغلي وي، یعنې که د $x-x_0$ عامل n ځلې تکرار شوی وي، نو لیکلای شو چې:

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)}=\frac{A}{x-x_0}+\frac{B}{(x-x_0)^2}+\cdots+\frac{N}{(x-x_0)^n}$$

- که د $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ مخرج ضربي عوامل دویمه درجه پولینوم د تجزیې وړ نه وي او تکرار هم نه وي راغلی، نو د واقعي پولینوم یو ټوټه کسر $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ بڼه لري.
- د اکسپوننشیل تابع ګانو انتیګرال لپاره لیکلای شو:

$$\int e^x dx=e^x+C \quad , \quad \int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C \quad , \quad (a\in IR^+\ ,\ a\neq 1)$$

- د لوګارتمي توابعو د انتیګرال لپاره لیکلای شو:

$$\int \ln x\,dx=x\ln x-x+C \quad , \quad \int \log_a x\,dx=x\log_a\frac{x}{e}+C$$

- ځینې تابع ګانې چې پرته د بدلون له لارې حل کېږي، لیکو:

$$f(x)=e^x \Rightarrow \int f(x)\,dx=\int e^x\,dx=e^x+C$$

د پنځم څپرکي پوښتنې

لاندې پوښتنې حل کړئ.

1. د $f(x)=\ln(\frac{x-2}{x+2})$ د تابع مشتق پیدا کړئ.
2. د $f(x)=\ln\sqrt{x-1}$ تابع مشتق پیدا کړئ.
3. د $y=2x^{2x}$ تابع مشتق پیدا کړئ.
4. د $f(x)=\log\sqrt{x^3}$ تابع مشتق پیدا کړئ.
5. لاندې کسرونه په قسمي کسرونو تجزیه کړئ.

1) $\frac{x+1}{x^2-x-6}$ 2) $\frac{x^2-x+1}{x^3+2x^2+x}$ 3) $\frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2}$

6. لاندې انتیګرالونه پیدا کړئ.

1) $\int 5t^7dt$ 2) $\int \frac{x^3-3}{x^2}dx$

3) $\int (2\cos x-5\sin x+e^x)dx$ 4) $\int \sqrt{\cos x}\sin xdx$

5) $\int xe^{-x}dx$ 6) $\int (\frac{5}{(2x+1)(x-2)})dx$

7) $\int_{-1}^{1}3x^2\sqrt{x^3+1}dx$

7 – د لاندې تابع ګانو مشتق پیدا کړئ.

$a)\ y=\ln(x^2+x+1)$ $b)\ y=\ln(\sin x)$

$c)\ y=e^{x^2+1}$ $d)\ y=\sqrt[x]{2}$

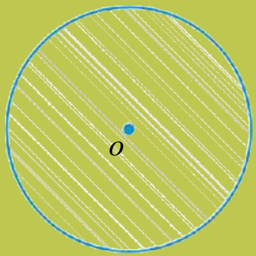
شپږم څپرکی

د انتیګرال تطبیقات

د منحني ګانو پواسطه د محصور شوي سطحې د مساحت محاسبه

Accounting of area bounded by one curve

د مخامخ شکل مساحت چې یوه سطحه د یوې منحني په واسطه تړل شوې دایره ده. د مساحت فورمول یې وویاست.



فعالیت

د $y=1-x^2$ تابع په پام کې ونیسئ.

- د تابع بحراني (*Critical Point*) ټکي او د x محور سره د تقاطع ټکي پیدا او ګراف یې رسم کړئ.
- د $y=1-x^2$ تابع او x محور تر منځ د سطحې د مساحت قیمت د انتیګرال په مرسته پیدا کړئ.
- پورتنی فعالیت د $y=-x^2+2x$ تابع لپاره تکرار کړئ او د منحني او د x د محور تر منځ محصور شوی مساحت محاسبه کړئ.

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایلې لاسته راځي:

ـ $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$ انتیګرال د یوې سطحې د مساحت قیمت راښیي چې د $y=f(x)$ منحني او د x محور او د $x=a$, $x=b$ د کرښو له خوا رابند (محصور) دی.

ـ که د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ تړلی انټروال کې مثبت او متمادي وي، یعنې $y=f(x)\geq 0$ په دې صورت کې $f(x)$ تابع ګراف تل د x محور پورته خواته او که $y=f(x)\leq 0$ وي، په دې حالت کې $f(x)$ تابع ګراف د x محور لاندې خواته واقع ده او منفي دی.

لومړی مثال: د $x=4-y^2$ تابع د منحني او د y د محور تر منځ محصور شوی مساحت پیدا کړئ.

حل: لومړی د تابع بحراني ټکي او د y محور سره د تقاطع ټکي پیدا کوو، وروسته یې شکل رسموو، د بحراني ټکي د پیدا کولو لپاره لومړی د تابع مشتق نیسو او له صفر سره یې مساوي کوو او له محورونو سره د تقاطع ټکو د په لاس راوړلو لپاره تابع له صفر سره برابروو.

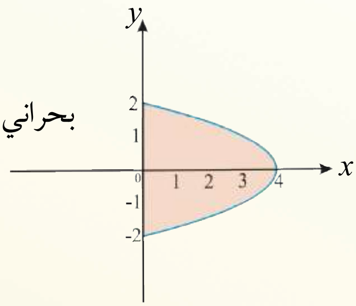
$x = 4 - y^2 \Rightarrow x' = -2y = 0$

$x' = 0 \Rightarrow y = 0$

$y = 0\ , \quad x = 4 - y^2 \Rightarrow x = 4 - 0 \Rightarrow x = 4 \quad \Rightarrow (4,0)$ بحراني ټکی

$x = 0 \quad , \quad 4 - y^2 = 0 \Rightarrow y^2 = 4$

$y = \pm 2 \quad \Rightarrow (0,2) \quad , \quad (0,-2)$ د محورونو سره د تقاطع ټکي



خرنګه چې د $x = 4 - y^2$ معادله په $[-2,2]$ انټروال کې نظر x محور ته دواړه ټکي متناظر دي، نو د نمايي مساحت په پام کې نیولو سره، د انتیګرال د مساحت سرحدات په لاندې ډول په لاس راوړو:

$$A = \int_{-2}^{2} (4 - y^2)\, dy = 2\int_{0}^{2} (4 - y^2)dy = 2[4y - \frac{y^3}{3}]_0^2$$

$$A = 2\,[(4 \cdot 2 - \frac{2^3}{3}) - 0] = 2\,(8 - \frac{8}{3}) = 2\,(\frac{24-8}{3}) = 2\,(\frac{16}{3}) = \frac{32}{3}$$

دويم مثال: د x محور او د $y = 1 - \frac{1}{2}x^2$ تابع منحني د محصور شوي سطحې مساحت محاسبه کړئ.

حل: د محصور شوي سطحې د مساحت ټاکلو لپاره لومړی بحراني ټکي او د x له محور سره د تقاطع ټکي په لاس راوړو.

$y = 1 - \frac{1}{2}x^2\ , \quad y' = -x$

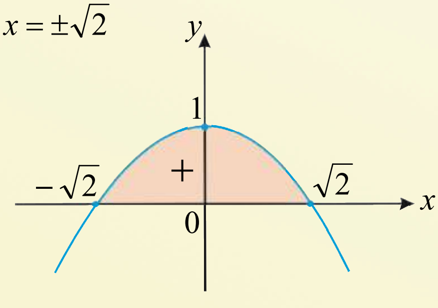
$y' = 0 \Rightarrow x = 0$

$x = 0,\ y = 1 - \frac{1}{2}x^2 = 1 \quad \Rightarrow y = 1 - \frac{1}{2}0^2 \quad \Rightarrow y = 1 \quad \Rightarrow (0,1)$ بحراني ټکي

$y = 0, 1 - \frac{1}{2}x^2 = 0 \quad \Rightarrow -\frac{1}{2}x^2 = -1 \quad \Rightarrow x^2 = 2,\ x = \pm\sqrt{2}$

$x_1 = \sqrt{2} \quad , \quad x_2 = -\sqrt{2}$

$(\sqrt{2},0)\ ,\ (-\sqrt{2},0)$ له محورونو سره د تقاطع ټکي



$$A = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (1 - \frac{1}{2}x^2)\,dx = 2\int_{0}^{\sqrt{2}} (1 - \frac{1}{2}x^2)\,dx = 2([x - \frac{1}{6}x^3]_0^{\sqrt{2}})$$

$$A = 2(\sqrt{2} - \frac{(\sqrt{2})^3}{6} - 0) = 2(\frac{6\sqrt{2} - (\sqrt{2})^3}{6}) = 2(\frac{6\sqrt{2} - \sqrt{8}}{6})$$

$$= (\frac{6\sqrt{2} - 2\sqrt{2}}{3}) = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

$$A = 1.8853$$

دریم مثال: د $y = x^2 - 3$ تابع ګراف د x له محور سره یوه سطحه رابند وي، د دې سطحې مساحت پیدا کړئ.

حل: لومړی د سطحې د ټاکلو لپاره د تابع ګراف رسموو او د تابع بحراني ټکي او د تقاطع ټکي په لاس راوړو:

$$y = x^2 - 3 \Rightarrow y' = 2x$$

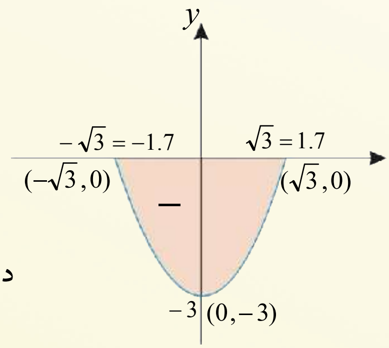
$$y' = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$x = 0\ ,\ y = x^2 - 3 \Rightarrow y = 0^2 - 3$$

$\Rightarrow y = -3 \Rightarrow (0,-3)$ بحراني ټکي

$$y = 0\ ,\ \ x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 3$$

$x = \pm\sqrt{3} \Rightarrow (\sqrt{3},0)\ ,\ (-\sqrt{3},0)$ د محورونو سره د تقاطع ټکي



څرنګه چې د $y = x^2 - 3$ تابع په $[\sqrt{3}, -\sqrt{3}]$ انټروال کې د محور سره د تقاطع ټکي متناظر قیمتونه لري، نو ګراف یې د x له محور څخه لاندې دی او انتیګرال یې منفي دی، نو له ټول مساحت څخه د انتیګرال د سرحدونو نیمایي مساحت پیدا کوو او په 2 کې یې ضربوو:

$$A_1 = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (x^2 - 3)\,dx = -2\int_{0}^{\sqrt{3}} (x^2 - 3)\,dx = -2(\int_{0}^{\sqrt{3}} x^2\,dx - 3\int_{0}^{\sqrt{3}} dx) = -2([\frac{1}{3}x^3]_0^{\sqrt{3}} - [3x]_0^{\sqrt{3}})$$

$$= -2(\frac{1}{3}[(\sqrt{3})^3 - 0] - 3[\sqrt{3} - 0]) = -2(\frac{1}{3}(\sqrt{3})^3 - 3\sqrt{3})$$

$$= -\frac{2}{3}(\sqrt{3})^3 + 6\sqrt{3} = -\frac{2}{3}(1.7)^3 + 6(1.7) = -\frac{2}{3}(4.913) + 10.2 = -\frac{9.826}{3} + 10.2$$

$$= -3.2753 + 10.2 = 6.9247$$

خلورم مثال: د $y = x^2 - 3x$ تابع ګراف رسم د منحني او x محور تر منځ د سطحې مساحت په $[-1,4]$ انټروال کې وټاکئ.

حل: لومړی د منحني بحراني ټکی او له له محورونو سره د تقاطع ټکي پیدا کوو:

$$y = x^2 - 3x$$

$$y' = 2x - 3 = 0 \Rightarrow 2x = 3 \;,\; x = \frac{3}{2}$$

$$x = \frac{3}{2} \;,\quad y = x^2 - 3x \Rightarrow y = (\frac{3}{2})^2 - 3(\frac{3}{2})$$

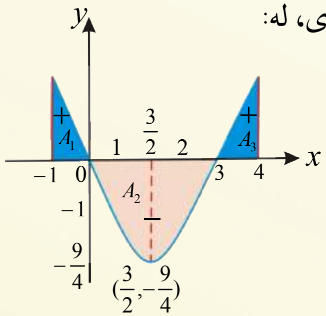
$$y = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} = -\frac{9}{4} \;,\quad (x,y) = (\frac{3}{2}, -\frac{9}{4})$$ بحراني ټکی

خرنګه چې $y'' = 2 > 0$ دی، نو د $(\frac{3}{2}, -\frac{9}{4})$ ټکي د تابع مطلق اصغري ټکي دي او د تقاطع ټکي یې د x له محور سره عبارت دی، له:

$$y = 0 \Rightarrow x^2 - 3x = 0$$

$$\Rightarrow x(x-3) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 0 \quad , \quad x_2 = 3$$



$$A = A_1 - A_2 + A_3 = \int_{-1}^{0}(x^2 - 3x)\,dx - \int_{0}^{3}(x^2 - 3x)\,dx + \int_{3}^{4}(x^2 - 3x)\,dx$$

$$A = [\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2]_{-1}^{0} - [\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2]_{0}^{3} + [\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2]_{3}^{4}$$

$$A = [(\frac{1}{3}\cdot 0 - \frac{3}{2}\cdot 0) - (\frac{1}{3}\cdot(-1)^3 - \frac{3}{2}\cdot(-1)^2)] - [(\frac{1}{3}\cdot 3^3 - \frac{3}{2}\cdot 3^2) - (\frac{1}{3}\cdot 0 - \frac{3}{2}\cdot 0)] +$$

$$[(\frac{1}{3}\cdot(4)^3 - \frac{3}{2}\cdot(4)^2) - (\frac{1}{3}\cdot(3)^3 - \frac{3}{2}\cdot(3)^2)]$$

$$= -(-\frac{1}{3} - \frac{3}{2}) - (\frac{1}{3}\cdot 27 - \frac{3}{2}\cdot 9) + (\frac{1}{3}\cdot 64 - \frac{3}{2}\cdot 16) - (\frac{1}{3}\cdot 27 - \frac{3}{2}\cdot 9)$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{3}{2} - \frac{27}{3} + \frac{27}{2} + \frac{64}{3} - \frac{48}{2} - \frac{27}{3} + \frac{27}{2}$$

$$= \frac{1 - 27 + 64 - 27}{3} + \frac{3 + 27 - 48 + 27}{2} = \frac{65 - 54}{3} + \frac{57 - 48}{2} = \frac{11}{3} + \frac{9}{2} = \frac{22 + 27}{6} = \frac{49}{6}$$

پنځم مثال: د $y = x^2 - 2x$ منحني او x محور ترمنځ مساحت د $[-1,2]$ په انټروال کې پیدا کړئ.

حل: لومړی بحراني ټکي وروسته د x له محور سره د تقاطع ټکي په لاس راوړو:

$$y = x^2 - 2x \Rightarrow y' = 2x - 2 = 0$$

$$2x = 2 \Rightarrow x = 1$$

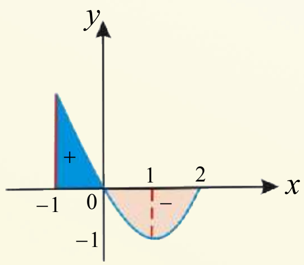
$x = 1 \ , \quad y = x^2 - 2x = 1^2 - 2(1) = -1 \Rightarrow (1,-1)$ بحراني ټکي

څرنگه چې $y'' = 2 > 0$ دی، نو تابع د $(1,-1)$ په ټکي کې مطلق اصغري لري او د x لـه محور سـره يـې تقاطع په لاندې ډول ده.

$$y = 0 \quad , \quad x^2 - 2x = 0$$

$$x(x-2) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad , \quad x_2 = 2$$



څرنگه چې منحني د $[-1,2]$ په انټروال کې لـه مبدأ څخه تيرېږي او د منحنـي يـوه برخـه د $[-1,0]$ پـه انټروال کې د x محور پورته خواته او بله برخه يې د $[0,2]$ په فاصلې کې د x محور ښکته خواته پرتـه ده انتيګرال يې منفي دی:

$$A = \int_{-1}^{0} (x^2 - 2x)dx - \int_{0}^{2} (x^2 - 2x)\,dx = [\frac{1}{3}x^3 - x^2]_{-1}^{0} - [\frac{1}{3}x^3 - x^2]_{0}^{2}$$

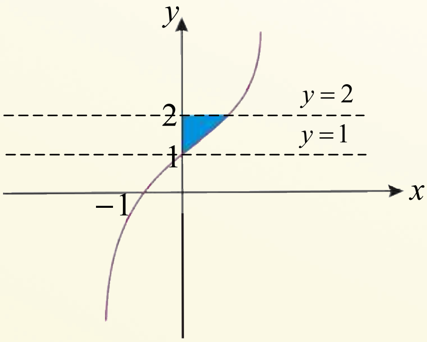
$$= (0 - (-\frac{1}{3} - 1)) - ((\frac{8}{3} - 4) - 0) = -(-\frac{1}{3} - 1) - (\frac{8}{3} - 4) = -(\frac{-1-3}{3}) - (\frac{8-12}{3})$$

$$= -(\frac{-4}{3}) - (\frac{-4}{3}) = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$$

پوښتني

1- د $f(x)=\sin x$ منحني او د x محور تر منځ مساحت په $[-2\pi, 2\pi]$ انټروال کې حساب کړئ.

2- د $y=x^3+1$ تـــابع منحنـــي او $y=1$ ، $y=2$ کرښو تر منځ مساحت وټاکئ.

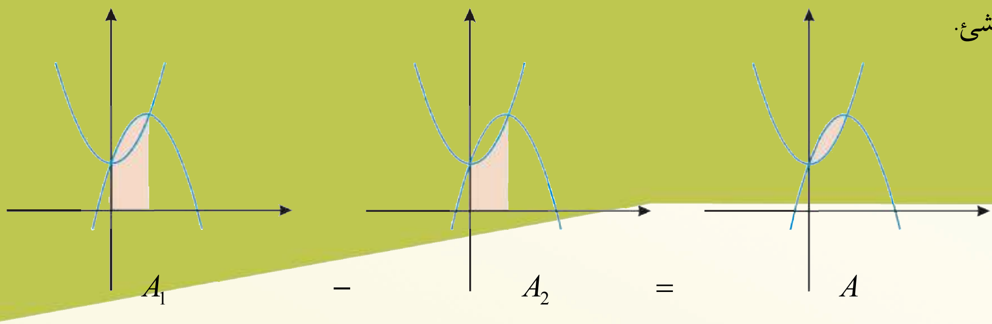


3- د $y=\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}+x}$ منحني او د $x=0$ او $x=1$ کرښو تر منځ مساحت حساب کړئ.

د دوو محصور شویو منحني ګانو تر منځ د مساحت محاسبه

Accounting of area bounded by tow curves

لانــــدې شـــکلونه پــــه پــــام کـــې ونيـــسئ د $A = A_1 - A_2$ اړيکــــې د ســــموالي پــــه اړه ځــــه و يلای شئ.



که د $y_1 = 1 - x^2$ او $y_2 = x^2 - 1$ تابع ګانې راکړل شوې وي.

- د $y_1 = y_2$ رابطې څخه د x قيمت په لاس راوړئ.
- د لاس ته راغلو قيمتونو په پام کې نيولو سره د هغوی ګراف رسم کړئ.
- څرنګه چې د y_1 تابع ګراف د y_2 تابع د ګراف څخه لوړ دی، نو د تابع ګانو د انتيګرال د تفريق حاصل $(y_1 - y_2)$ د x په ټاکل شوی انټروال کې حساب کړئ.
- نوموړی فعاليت د $y = x^2$ تابع د منحني او $y = x + 2$ د کرښې لپاره تکرار کړئ او د محصورې شوې سطحې مساحت حساب کړئ.

د پورتنی فعاليت څخه لاندې پايلې لاسته راځي:

ـ که چيرې د $y_1 = f(x)$ او $y_2 = g(x)$ دوو منحني‌ګانو د محصور شوې سطحې د محاسبې لپاره په هغه صورت کې چې $f(x) > g(x)$ وي، يعنې د $f(x)$ تابع ګراف د $g(x)$ تابع دپاسه واقع وي، نو لومړی د دواړو منحني ګانو د تقاطع ټکي پيدا کوو وروسته د پاسني او لاندېني منحني د x د محور سره مساحت په $[a,b]$ انټروال کې محاسبه کوو:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)\, dx - \int_a^b g(x)\, dx$$

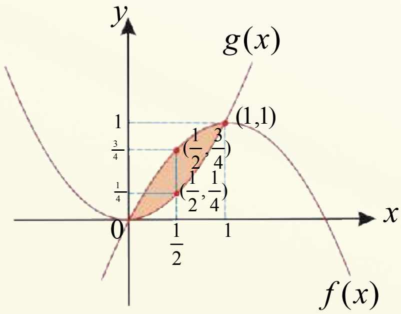
ـ که چېرې د $g(x)$ تابع ګراف د $f(x)$ تابع د ګراف دپاسه واقع وي، نو لرو چې:

$$A=\int_a^b[g(x)-f(x)]\,dx=\int_a^b g(x)\,dx-\int_a^b f(x)\,dx$$

لومړی مثال: د $f(x)=2x-x^2$ او $g(x)=x^2$ منحني ګانو د ګرافونو ترمنځ د پرتې سطحې مساحت حساب کړئ.

حل: لومړی د دواړو منحني ګانو د تقاطع ټکی پیدا کوو:

$$f(x)=2x-x^2\quad,\quad g(x)=x^2$$
$$f(x)=g(x)\Rightarrow 2x-x^2=x^2$$
$$2x-x^2-x^2=0$$
$$2x-2x^2=0$$
$$2x(1-x)=0$$
$$2x=0\quad\Rightarrow\quad x_1=0$$
$$1-x=0\quad\Rightarrow\quad x_2=1$$



لیدل کېږي چې ددواړو منحني ګانو تقاطع (1،1) او (0،0) ده اوس د محصور شوي سطحې مساحت پیدا کوو.

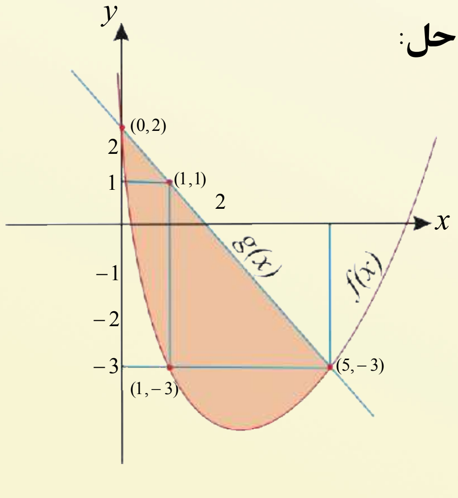
$$A=\int_a^b[f(x)-g(x)]=\int_0^1[2x-x^2-x^2]\,dx=\int_0^1[2x-2x^2]=[\frac{2x^2}{2}-\frac{2x^3}{3}]_0^1$$
$$=[x^2-\frac{2}{3}x^3]_0^1=(1-\frac{2}{3})-0=\frac{3-2}{3}=\frac{1}{3}$$

دویم مثال: د $f(x)=x^2-6x+2$ تابع او $g(x)=2-x$ کرښې د ګرافونو تر منځ د پرتې سطحې مساحت حساب کړئ.

حل:

$$\left.\begin{aligned}f(x)&=x^2-6x+2\\ g(x)&=2-x\end{aligned}\right\}\Rightarrow f(x)=g(x)$$
$$x^2-6x+2=2-x\Rightarrow x^2-6x+2-2+x=0$$
$$x^2-5x=0\Rightarrow x(x-5)=0$$
$$x_1=0\quad,\quad x_2=5$$

$\Rightarrow (0,2)\ ,\ (5,-3)$ د کرښې او منحني د تقاطع ټکي



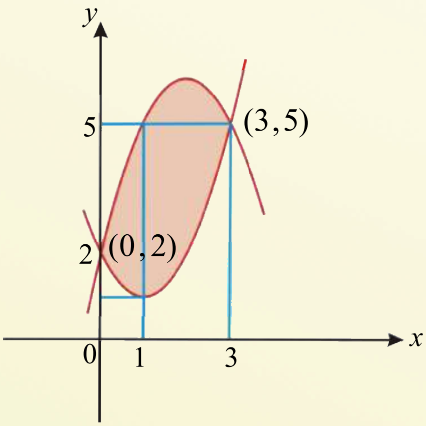
له شکل څخه ښکاري چې د $g(x)$ کربښې ګراف د $f(x)$ ګراف پورته خوا ته واقع دی، په دې معنا چې

$g(x) > f(x)$

$$A = \int_a^b [g(x) - f(x)]\,dx = \int_0^5 (2 - x - x^2 + 6x - 2)dx$$
$$= \int_0^5 (-x - x^2 + 6x)\,dx = \int_0^5 (-x^2 + 5x)\,dx$$
$$= [-\frac{x^3}{3} + 5\frac{x^2}{2}]_0^5 = (-\frac{125}{3} + 5\cdot\frac{25}{2}) - 0 = -\frac{125}{3} + \frac{125}{2}$$
$$= \frac{-250 + 375}{6} = \frac{125}{6}$$

دریم مثال: د $f(x) = -x^2 + 4x + 2$ او $g(x) = x^2 - 2x + 2$ تابع ګانو د ګرافونو تر منځ د پرتې سطحې مساحت پیدا کړئ.

حل: څرنګه چې د دواړو ګرافونو د تقاطع ټکي د انتیګرال حدونه جوړوي، نو د دې ټکو د پیدا کولو لپاره $f(x) = g(x)$ وضع کوو:



$$\left.\begin{array}{l} f(x) = -x^2 + 4x + 2 \\ g(x) = x^2 - 2x + 2 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) = g(x)$$
$$-x^2 + 4x + 2 = x^2 - 2x + 2$$
$$\Rightarrow -x^2 + 4x + 2 - x^2 + 2x - 2 = 0$$
$$-2x^2 + 6x = 0 \Rightarrow x(-2x + 6) = 0$$
$$\Rightarrow x_1 = 0 \quad , \quad -2x = -6 \Rightarrow x_2 = 3$$

د دواړو منحني ګانو د تقاطع ټکي $(0,2)$, $(3,5)$

د x له محور سره د تقاطع ټکی عبارت له (5،3)، (2،0) دی اوله شکل څخه لیدل کېږي چې د $f(x)$ ګراف د $g(x)$ له ګراف څخه پورته واقع دی، نو لرو:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_0^3 (-x^2 + 4x + 2)dx - \int_0^3 (x^2 - 2x + 2)dx$$
$$= [-\frac{x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} + 2x]_0^3 - [\frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} + 2x]_0^3$$
$$= -\frac{1}{3}\cdot 27 + 2\cdot 9 + 6 - 0 - \frac{1}{3}\cdot 27 + 9 - 6 + 0$$
$$= -9 + 18 - 9 + 9 = 9$$

پوښتنې

1- د $y = x^2$ او $y = -x^2 + 4x$ منحني ګانو د ګرافونو تر منځ د پرتې سطحې مساحت پیدا کړئ.

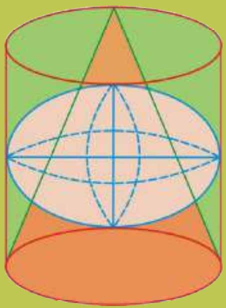
2- د $y^2 = 2x - 2$ پارابول او $y = x - 5$ کرښې د ګرافونو تر منځ د سطحې مساحت حساب کړئ.

3- د $y^2 = 2x + 6$ منحني او $y = x - 1$ کرښې د ګرافونو تر منځ د سطحې مساحت محاسبه کړئ.

دګراف له دوران څخه د په لاس راغلي جسم حجم

Accounting of rounding things Volume

د مخامخ شکل د جسمونو د حجمونو تر منځ نسبت پیدا کړئ.

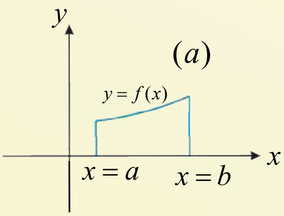


په مخکنیو ټولګیو کې مو د جسمونو حجم پیداکړی وو. پرته له دې چې د هغوی فورمولونه ثبوت شي منلي مو وو، خو اوس د جسمونو د حجم فورمولونه د معین انتیګرال څخه په ګټه اخیستنې سره ثبوتوو.

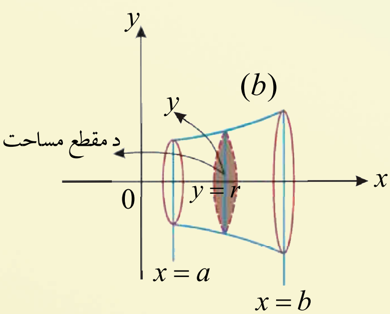
- یو ټکی او یوه کرښه په فضا کې داسې په پام کې ونیسئ چې ټکی د کرښې په منځ کې واقع وي.
- هغه جسم چې د یوې مستقیمې کرښې له دوران څخه د یوه ټکي په شاوخوا له خرخېدو وروسته جوړېږي، نوم یې واخلئ.
- د نوموړي جسم د حجم فورمول ولیکئ او ووایئ چې هغه څنګه ثبوتوو.

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

- که چېرې د $y=f(x)$ متمادي تابع د منحنی مساحت نظر (a) شکل ته



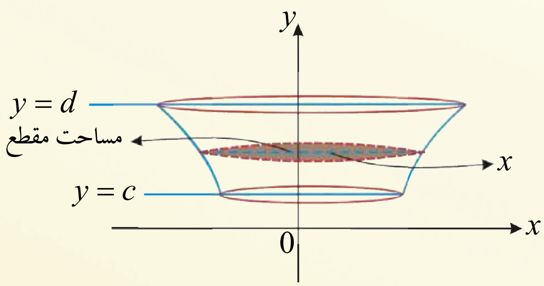
د $x=a$ او $x=b$ کرښو او منحنی په واسطه محصور شوی وي، نو د هغه جسم حجم چې د پورتني تابع د منحنی له دوران څخه د x محور په شاوخوا لاسته راځي تقریباً استوانه یې شکل لري، لکه د (b) شکل.



چې ارتفاع يې $\Delta x = b - a$ ده او د دې استوانې سطح د دايروي شکل په واسطه محصوره شوې ده چې دې سطحو ته مقطع وايي او پوهېږو چې د دايرې مساحت نظر x محور ته $A(x) = \pi r^2$ دی او ددې مقطع شعاع شکل ته په کتو سره د y محور سره موازي ده، نو $y = r$ کېږي او د حجم فورمول يې نظر ريمان مجموع ته په لاندې ډول دی:

$$v = \lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} A(x)\Delta x = \int_a^b \pi r^2\, dx = \int_a^b \pi y^2\, dx = \int_a^b \pi [f(x)]^2\, dx$$

- که د $x = f(y)$ تابع د منحني مساحت $y = c$ او $y = d$ کرښو ترمنځ محصور شوی وي دداسې استوانې د مقطع مساحت نظر y محور ته $A(y) = \pi r^2$ دی چې ارتفاع يې $\Delta y = d - c$ او شعاع يې $x = r$ سره ده هغه حجم چې له دې دوران څخه په لاس راځي په لاندې ډول دی:



$$v = \lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} A(y)\Delta y = \int_a^b \pi r^2\, dy = \int_a^b \pi x^2\, dy = \int_a^b \pi [f(y)]^2\, dy$$

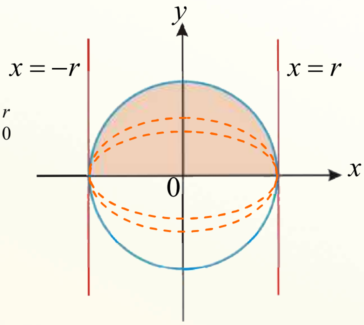
د دوراني جسمونو حجم د انتيګرال په مرسته په لاس راځي، لکه:

1- د انتيګرال په مرسته د کرې حجم پيدا کړئ.

ثبوت: پوهېږو چې که چېرې نيمه دايره د خپل قطر په شاوخوا وڅرخي کره لاس ته راځي او د دايرې معادله $x^2 + y^2 = r^2$ ده، اوس د نيمې دايرې حجم له څرخېدو وروسته په لاس راوړو او هغه دوه برابره کوو چې د دايرې بشپړ حجم په لاس راشي

$$x^2 + y^2 = r^2$$
$$y^2 = r^2 - x^2$$

$$V=\int_{-r}^{r}\pi y^2dx=\pi\int_{-r}^{r}(r^2-x^2)\,dx$$



$$=2\pi\int_{0}^{r}(r^2-x^2)\,dx=2\pi[r^2x-\frac{x^3}{3}]_0^r$$

$$=2\pi[(r^3-\frac{r^3}{3})-0]$$

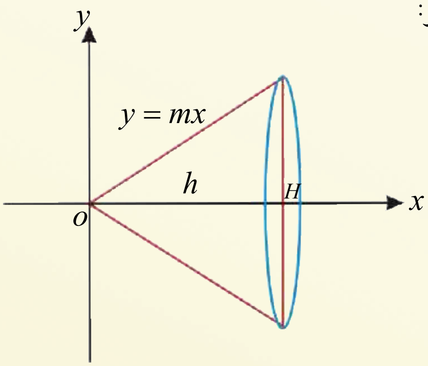
$$=2\pi(\frac{3r^3-r^3}{3})$$

$$=2\pi(\frac{2r^3}{3})$$

V (دکرې حجم) $=\frac{4}{3}\pi r^3$

2- د انتيګرال په مرسته د مخروط حجم پيدا کړئ.

ثبوت: څرنګه چې مخروطي سطح د $y=mx$ کرښې له دوران څخه د x د محور په چاپېريال پـه لاس راځي نو:



$$V=\int_0^h\pi\, y^2dx$$

$$=\int_0^h\pi\, m^2x^2dx=\pi\, m^2\int_0^h x^2dx$$

$$=\pi\, m^2[\frac{x^3}{3}]_0^h=\pi\, m^2(\frac{h^3}{3})$$

$$=\frac{\pi\, h}{3}(mh)^2$$

له پورته شکل څخه ليدل کېږي چې د مخروط قاعده دايروي بڼه لري اوشعاع يې د h محور سره مـوازي ده، يعنـي $y\,//\,r$ او همدا رنګه د مخروط ارتفاع (h) د x په محور باندې منطبق ده، $(x=h)$ نـو د $y=mx$ پـه اړيکـه کې يې قيمت وضع کوو:

$$y=mx\quad\Rightarrow\quad r=mh$$

$$=\frac{\pi h}{3}\quad r^2$$

$$V=\pi\, r^2\times\frac{h}{3}$$

ځرنګه چې د مخروط قاعده دايروي ده، د دايرې مساحت πr^2 دی، لرو چې:

$$V = \pi r^2 \cdot \frac{h}{3}$$

$$V(\text{د مخروط حجم}) = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

3- د اليپس حجم چې د $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ د منحني او x محور په چاپير د لوی قطر په شاوخوا له دوران وروسته جوړيږي، په لاس راوړئ.

ثبوت: د اليپس د نيمايي حجم د لوی قطر په شاوخوا په لاس راوړو او هغه دوه چنده کوو چې د بشپړ اليپس حجم په لاس راشي.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

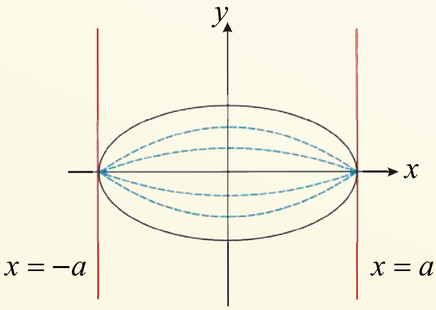
$$\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{x^2}{a^2} \Rightarrow y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2$$

$$V = \int_{-a}^{a}\pi y^2\,dx = \pi\int_{-a}^{a}[b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2]dx$$

$$= 2\pi\int_0^a[b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2]dx = 2\pi[b^2x - \frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x^3}{3}]_0^a$$

$$= 2\pi[(b^2a - \frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{a^3}{3}) - 0] = 2\pi[b^2a - \frac{b^2a}{3}]$$

$$= 2\pi[\frac{3b^2a - b^2a}{3}] = 2\pi[\frac{2b^2a}{3}]$$



$$\text{V} = \frac{4}{3}\pi b^2 a \Rightarrow \text{د اليپس دوران د لوی قطر په شاوخوا حجم} = \frac{4}{3}\pi b^2 a$$

که چېرې د اليپس محراقونه د y په محور پراته وي او د هغه انتګرال حساب کړو د اليپس د کوچني قطر په شاوخوا حجم په لاندې ډول په لاس راځي:

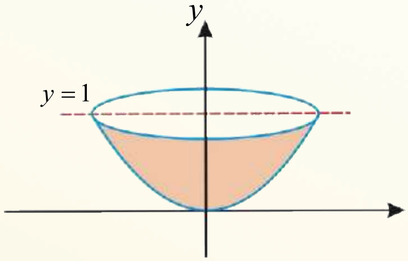
$$\text{د اليپس دوران د کوچني قطر په شاوخوا حجم} = \frac{4}{3}\pi a^2 b$$

لومړی مثال: د هغه جسم حجم چې د $y = x^2$ او $y = 1$ کرښې تر منځ پرتې مستوي مساحت د دوران شخه د y په محور په لاس راځي، پیدا کړئ.

حل: لومړی شکل رسموو وروسته یې مساحت حسابوو:

$$V = \int_a^b \pi\, x^2 dy = \pi \int_0^1 y\, dy = \frac{1}{2}\pi y^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{2}\pi$$

$$\Rightarrow V = \frac{\pi}{2}$$



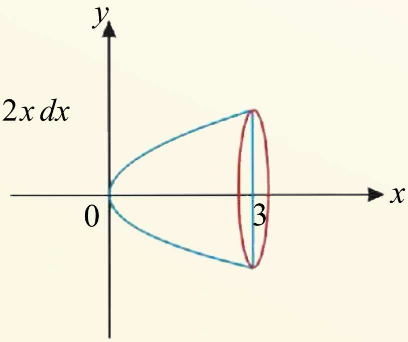
دویم مثال: د $y = \sqrt{2x}$ تابع او $y = 3$ کرښې ترمنځ د څرخیدلی جسم مساحت پیدا کړئ.

حل:

$$V = \int_a^b \pi\, y^2 dx = \int_0^3 \pi[\sqrt{2x}\,]^2 dx = \pi \int_0^3 [\sqrt{2x}\,]^2 dx = \pi \int_0^3 2x\, dx$$

$$V = 2\pi \int_0^3 x\, dx = 2\pi [\frac{x^2}{2}]_0^3$$

$$V = 9\pi$$

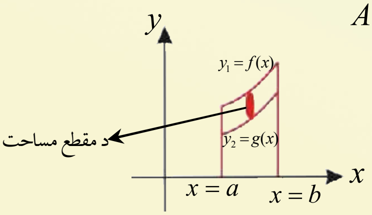


یادونه: که د $y_1 = f(x)$ او $y_2 = g(x)$ تابع گانې په $[a, b]$ انټروال کې متمادي وی د هغه دوراني جسم حجم د $f(x)$ او $g(x)$ منحني گانو او د $x = a$ ، $x = b$ کرښو تر منځ جوړېږي له لاندې رابطې څخه لاسته راځي:

$\Delta x =$ د استواني ارتفاع

$A(x) =$ (د استواني د مقطع مساحت) $= \pi y_1 - \pi y_2 = \pi(y_1 - y_2)$

د هغې استواني د حجم فورمول چې د $f(x)$ تابع گراف د $g(x)$ تابع گراف څخه پورته قرار لري.



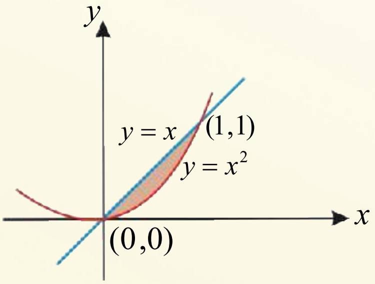
$$V = \int_a^b \pi(y_1^2 - y_2^2)\, dx = \pi \int_a^b (y_1^2 - y_2^2)\, dx$$

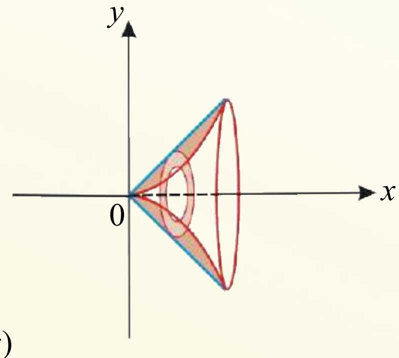
د هغې استواني د حجم فورمول چې د $g(x)$ تابع گراف ، د $f(x)$ گراف څخه پورته واقع وي.

$$V=\int_a^b \pi(y_2^2-y_1^2)\,dx=\pi\int_a^b (y_2^2-y_1^2)\,dx$$

مثال: د هغه جسم حجم پيدا کړئ چې د $y=x^2$ منحني او $y=x$ کرښې تر منځ د پرتې سطحې مساحت له دوران څخه د x محور په شاوخوا په لاس راځي، محاسبه کړئ.

حل:





$$\left.\begin{array}{l} y_1=x^2=f(x) \\ y_2=x=g(x) \end{array}\right\} \Rightarrow y_2>y_1\ ,\ g(x)>f(x)$$

$$=\int_a^b \pi(y_2^2-y_1^2)\,dx=\int_0^1 \pi(x^2-(x^2)^2)dx$$

$$=\pi\int_0^1 (x^2-x^4)\,dx=\pi[\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}]_0^1$$

$$=\pi[(\frac{1}{3}-0)-(\frac{1}{5}-0)]=\pi[\frac{1}{3}-\frac{1}{5}]$$

$$V=\pi[\frac{5-3}{15}]=\pi[\frac{2}{15}]=\frac{2\pi}{15}$$

پوښتني

1. د هغه جسم حجم چې د $y=\sin x$ تابع او د $x=0$ او $x=\pi$ دوو کرښو تر منځ محصور شوی مساحت له دوران څخه د x د محور په چاپېر جوړېږي پيدا کړئ.
2. د هغه جسم حجم پيدا کړئ چې د $y=x^3$ منحني او $y=8$ ، $x=0$ کرښو ترمنځ محصور شوي مساحت له دوران څخه د y د محور په چاپېر جوړېږي، حساب کړئ؟

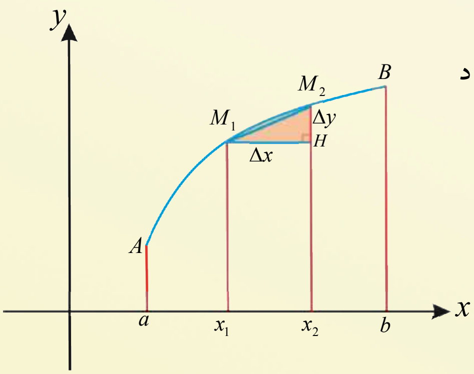
د قوس د اوږوالی محاسبه

Accounting the Length of Arc

ځرنګه کولای شو چې د مخامخ پړي اوږدوالی پیدا کړو؟

فعالیت

- د قایمو مختصاتو په سیستم کې د $y = f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې په پام کې ونیسئ او هغې تـه $\overset{\frown}{AB}$ ووایې، داسې چې تابع په نوموړی فاصله کې متمادي او د مشتق وړ وي.
- د $[a,b]$ انټروال په دریو مساوي برخو ویشو او د x_1 او x_2 د قوس اوږدوالی په M_1 او M_2 ښیو.
- د M_1 له ټکي څخه یوه ټوټه کرښه د M_2 په ټکي او یـوه بلـه کرښـه، د هغې پـه مخامخ کرښـه رسـمـوو او د دواړو ټوټه کرښو، د تقاطع ټکی H ونوموئ.
- د M_1H د کرښې فاصلې ته Δx او M_2H ته Δy وایي او د M_1HM_2 د قـایم الزاویـه مثلـث د مخـامخ قوس اوږوالی د فیثاغورث د قضیې په مرسته حساب کړئ.



له پورتني فعالیت څخه کولای شو چې د M_1HM_2 مثلث د مخامخ قوس اوږدوالی داسې ثبوت کړو.

ثبوت:

له قایم‌الزاویه M_1HM_2 مثلث څخه په ګټې اخیستنې سره لرو چې:

$$(M_1M_2)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$$

$$M_1M_2 = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

د مشتق له تعریف څخه پوهېږو:

$$f'(t)=\frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad , \qquad g'(t)=\frac{\Delta y}{\Delta t}$$

$$\Delta x=f'(t)\cdot\Delta t \qquad , \qquad \Delta y=g'(t)\cdot\Delta t$$

$$M_1M_2=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=\sqrt{[f'(t)\cdot\Delta t]^2+[g'(t)\cdot\Delta t]^2}$$

$$M_1M_2=\sqrt{[f'(t)]^2+[g'(t)]^2}\cdot\Delta t$$

نو د ریمان له مجموعې څخه لرو:

$$L=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{[f'(t)]^2+[g'(t)]^2}\cdot\Delta t$$

$$L=\int_a^b\sqrt{[f'(t)]^2+[g'(t)]^2}\,dt$$

لومړی مثال: د $x^2+y^2=r^2$ د دایرې محیط محاسبه کړئ:

حل: څرنګه چې د دایرې پارامتري معادله په دې ډول $\begin{cases}x=r\cos t\\ y=r\sin t\end{cases}$ ده.

که چېرې $0\le t\le\pi$ وي، نو د دایرې نمایي محیط پیدا کړئ.

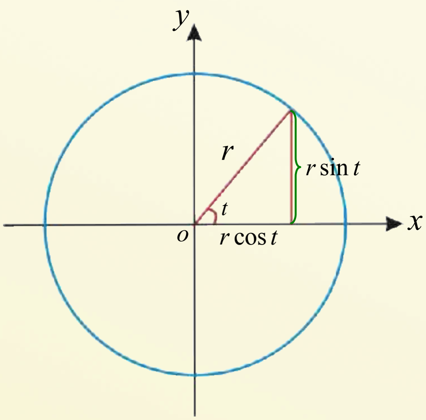
$$P=\int_0^{\pi}\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt$$

$$x'=-r\sin t \quad , \quad y'=r\cos t$$

$$P=\int_0^{\pi}\sqrt{(-r\sin t)^2+(r\cos t)^2}\,dt$$

$$P=\int_0^{\pi}\sqrt{r^2\sin^2 t+r^2\cos^2 t}\,dt$$

$$P=\int_0^{\pi}\sqrt{r^2(\sin^2 t+\cos^2 t)}\,dt=\int_0^{\pi}\sqrt{r^2}\,dt$$



$P=[r\,t]_0^{\pi}=(r\cdot\pi-r\cdot 0)=\pi r$ د دایرې نیمایي محیط

د دایرې مکمل محیط $=2\pi r$

یادونه:

1- د $y=f(x)$ منحني معادله په $a \le x \le b$ انټروال کې راکړل شوې ده، د x د پارامتر په پام کې نیولو سره د منحنی د قوس اوږدوالی داسې محاسبه کوو:

$$L=\int_a^b \sqrt{1+f'^{\,2}(x)}\,dx$$

مثال: د $y=f(x)=x^{\frac{3}{2}}$ منحني د قوس اوږدوالي په $0 \le x \le 4$ فاصله کې حساب کړئ.

حل: $f(x)=x^{\frac{3}{2}} \Rightarrow f'(x)=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$

$$L=\int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\,dx=\int_0^4 \sqrt{1+(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}})^2}\cdot dx$$

$$=\int_0^4 \sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx=\int_0^4 \sqrt{u}\cdot\frac{4}{9}du=\frac{4}{9}\int_0^4 u^{\frac{1}{2}}\,du$$

$$u=1+\frac{9}{4}x$$

$$du=\frac{9}{4}dx$$

$$dx=\frac{4}{9}du$$

$$=\frac{4}{9}[\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}]_0^4=\frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}[u^{\frac{3}{2}}]_0^4=\frac{8}{27}[\sqrt{u^3}]_0^4$$

$$=\frac{8}{27}[\sqrt{(1+\frac{9}{4}x)^3}]_0^4=\frac{8}{27}[\sqrt{(1+\frac{9}{4}\cdot 4)^3}-1]=\frac{8}{27}(\sqrt{10^3}-1)$$

$$L=\frac{8}{27}(10\sqrt{10}-1)$$

2- د $x=f(y)$ منحني په $a \le y \le b$ انټروال کې راکړل شوې ده، د y د پارامتر د په پام کې نیولو سره لرو چې:

$$L=\int_a^b \sqrt{f'^2(y)+1}\,dy$$

مثال: د $x=f(y)=y^{\frac{3}{2}}$ منحني د قوس اوږدوالی په $1 \le y \le 4$ انټروال کې حساب کړئ.

حل:

$$f(y)=y^{\frac{3}{2}} \quad , \quad f'(y)=\frac{3}{2}\cdot y^{\frac{1}{2}}$$

$$L=\int_a^b\sqrt{f'^2(y)+1}\,dy=\int_1^4\sqrt{(\frac{3}{2}\cdot y^{\frac{1}{2}})^2+1}\,dy$$

$$=\int_1^4\sqrt{\frac{9}{4}y+1}\,dy=\int_1^4\sqrt{u}\cdot\frac{4}{9}du \qquad u=\frac{9}{4}y+1$$

$$=\frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}[u^{\frac{3}{2}}]_1^4=\frac{8}{27}[\sqrt{(\frac{9}{4}y+1)^3}]_1^4 \qquad du=\frac{9}{4}dy$$

$$=\frac{8}{27}[\sqrt{(10)^3}-\sqrt{(\frac{9}{4}+1)^3}] \qquad dy=\frac{4}{9}du$$

$$=\frac{8}{27}[\sqrt{1000}-\sqrt{(\frac{13}{4})^3}]=\frac{8}{27}[10\sqrt{10}-\sqrt{\frac{2197}{64}}]$$

پوښتنې

1. د $x=t^2$ او $y=t^3$ د منحنيګانو د قوس اوږدوالی د $1\le x\le 2$ د فاصلې تر منځ پيدا کړئ.
2. د $f(x)=\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}$ د منحني د قوس اوږدوالی په $0\le x\le 1$ انټروال کې پيدا کړئ.

د څپرکي مهم ټکي

- د $\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$ انتیګرال د یوې سطحې د مساحت اندازه یا پراخوالی راښیي چې د $y=f(x)$ منحني او د x د محور او د $x=a$ او $x=b$ کرښو له خوا رابند دی.
- که د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې مثبت او متمادي وي، یعنې $y=f(x)\geq 0$ په دې صورت کې د $f(x)$ تابع تل د x د محور پورته خواته او که $y=f(x)\leq 0$ وي، په دې حالت کې د $f(x)$ د x د محور لاندې خواته واقع او انتیګرال یې منفي دی.

د دوو منحنيګانو په واسطه د محصور شوی سطې د مساحت محاسبه:

- که چیرې د $f(x)$ تابع د $g(x)$ تابع د ګراف په پورتنی برخه کې واقع وي، نو لرو:

$$A=\int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx=\int_a^b f(x)\,dx-\int_a^b g(x)\,dx$$

- که چیرې د $g(x)$ تابع ګراف د $f(x)$ تابع په پاسنی برخه کې واقع وی؛ لرو چې:

$$A=\int_a^b [g(x)-f(x)]dx=\int_a^b g(x)dx-\int_a^b f(x)dx$$

دګراف له دوران څخه د په لاس راغلي جسم حجم

- که چیرې د $y=f(x)$ متمادي تابع مساحت د $x=a$ او $x=b$ کرښو په واسطه محصور شوی وي، نو د هغه جسم حجم چې د پورتني تابع د منحني له دوارن څخه د x محور په شاوخوا لاسته راځي تقریباً استوانه‌یي شکل لري.

چې ارتفاع یې $\Delta x=b-a$ ده او د دې استوانې سطح د دایروي سطحو په واسطه محصوره شوې ده چې دې سطحو ته مقطع وایي او پوهیږو چې د دایرې مساحت نظر د x محور ته $A(x)=\pi r^2$ دی او ددې مقطع شعاع نظر شکل ته د y له محور سره موازي دی؛ نو $y=r$ کیږي او د حجم فورمول یې نظر د ریمان مجموعې ته په لاندې ډول دی:

$$v=\lim_{n\to\infty} V_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} A(x)\Delta x=\int_a^b \pi r^2\,dx=\int_a^b \pi y^2\,dx=\pi\int_a^b [f(x)]^2\,dx$$

- که د $x=f(y)$ تابع مساحت د $y=c$ ، $y=d$ کرښو ترمنځ محصور شوی وي دداسې استوانې مقطع نظر y محور ته $A(y)=\pi r^2$ چې ارتفاع یې $\Delta x=d-c$ او شعاع یې $x=r$ سره ده هغه حجم چې ددې دوران له مساحت څخه په لاس راځي په لاندې ډول دی:

$$v=\lim_{n\to\infty} V_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} A(y)\Delta y=\int_a^b \pi r^2\,dy=\int_a^b \pi x^2\,dy=\pi\int_a^b [f(y)]^2\,dy$$

د قوس د اوږدوالي محاسبه:

د قوس د اوږدوالي د محاسبې فورمول:

$$L=\int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2+[g'(t)]^2}\,dt$$

(1
$$L=\int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$$

(2
$$L=\int_a^b \sqrt{1+f'^2(y)}\,dy$$

د شپږم څپرکي پوښتنې

1. د $y^2-x-5=0$ منحني او د y د محور تر منځ د پرتې سطحې مساحت محاسبه کړئ.
2. د هغې سطحې مساحت چې د $y=\sin x$ منحني په $[0,2\pi]$ انټروال کې او د x د محور تر منځ پرته ده، پیدا کړئ.
3. د $y=x^2-2x$ او $y=6x-x^2$ منحني ګانو تر منځ د پرتې سطحې مساحت حساب کړئ.
4. د $y=-x^2+4x-3$ منحني او x محور تر منځ د پرتې سطحې مساحت پیدا کړئ.
5. د $y=x^3-6x^2+8x$ او $y=x^2-4x$ منحني ګانو تر منځ د پرتې سطحې مساحت پیدا کړئ.
6. د هغه جسم حجم وټاکئ چې د $y=\sin x-\cos x$ منحني او $x=0$, $x=\dfrac{\pi}{2}$ کرښو د x محور په شاوخوا له دوران څخه په لاس راځي، حساب کړئ.
7. د هغې سطحې حجم چې د $y=\dfrac{1}{4}x^2+2$ منحني له دوران څخه د x د محور پرشاوخوا په $[0,4]$ انټروال کې جوړ شوي وي.
8. د هغې رابندې شوې سطحې د جسم حجم چې د $y=x^2$ منحني او د $x^2+y^2=2$ دایرې له دوران څخه د x محور په شاوخوا جوړ شوې وي، پیدا کړئ.
9. د هغه جسم حجم چې د $y=\dfrac{1}{2}x+1$ کرښې دوران او د x محور په $[2,6]$ انټروال کې جوړېږي، په لاس راوړئ.
10. د $y=-x+4$ منحني د قوس اوږدوالی په $-2\le x\le 2$ انټروال کې حساب کړئ.
11. د $y=\dfrac{4}{3}x+\dfrac{4}{3}$ تابع د منحني د قوس اوږدوالی په $2\le x\le 5$ انټروال کې پیدا کړئ.

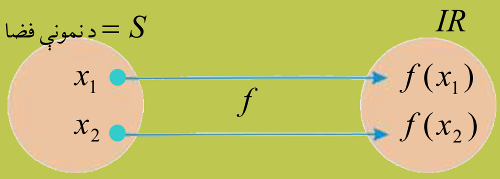
اووم څپرکی

احصائیه

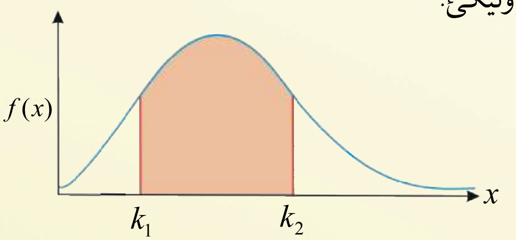
موږ ټول افغانان یو.

د احتمال د تابع توزیع

د تـصادفي ازمایـښت، نمونـه‌یي فـضا او د ناڅاپـه متحـول کلمې ستاسو په ذهن کې څه څه را ژوندي کوي.



- هغه تصادفي متحول چې په احصائیه او احتمالاتو کې ترې ګټه اخلي، لـه هغه متحـول سـره چې پـه الجبر کې مو لوستي دی، څه توپیر لري؟
- که $x_1, x_2, \ldots x_n$ د یوه سـټ عناصـر او $P(x = x_i) = f(x_i)$ تـابع ولـرو، هغه مرتبـې جـوړې چې د نوموړې تابع څخه په لاس راځي، جوړې او بیا یې ولیکئ.
- مخـامخ شـکل تـه پـه کتنـې سـره د k_1 او k_2 مقـدارونو تـرمنځ او $f(x)$ د منحنـي لانـدېنۍ محـدود شـوی مـساحت د انتیګـرال پـه شـکل وښیئ.



- د لانـدې جـدول پـه پـام کـې نیولـو سـره د $\left[E(x = x_i)\right] = \sum_{i=1}^{2} x_i f(x_i)$, $\left[x_i - E(x_i)\right]^2$ او $\left[x_i - E(x_i)\right]^2 f(x_i)$ مجموعه په لاس راوړئ.

x_i	0	1
$f(x_i)$	0.5	0.5

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

ـ هغه تصادفي متحول چې په احصائیه او احتمالاتو کې تر څېړنې لاندې نیول کېږي عبارت له هغې تابع څخه دی چې د تعریف ناحیه یې نمونه‌یي فضا او د قیمتونو ناحیه یې حقیقي اعداد دي.

ـ که $P(x=x_i)=f(x_i)$ ولرو، نو د $[x_1, f(x_1)], [x_2, f(x_2)], \dots, [x_n, f(x_n)]$ مرتبو جوړو ته د مجزا (غیر متمادي) احتمال تابع وایي.

- د تجمعي او متمادی احتمال تابع کولای شو، په دې بڼه $F(x)=P(X\le x)$ وښیو.
- که چېرې $f(x)$ د احتمال تابع او x تصادفي متحول وي، په دې صورت کې د دې احتمال چې x د k_1 او k_2 په منځ کې وي برابر دی له:

$$P(k_1\le x\le k_2)=\int_{k_1}^{k_2} f(x)\,dx$$

- که چېرې x پیوسته ناڅاپه (تصادفي) متحول او $k_1<k_2$ څخه وي، په دې صورت کې:

$$P(k_1\le x\le k_2)=F(k_2)-F(k_1)$$

- که چېرې x ناڅاپه مجزا متحول وي، په دې حالت کې اوسط $(Expected\ Value)$ د x تصادفي مجزا متحول چې د $E(x)$ په بڼه ښودل کېږي، برابر دی له:

$$E(x)=x_1 f(x_1)+x_2 f(x_2)+\dots\dots\dots+x_n f(x_n)=\sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i)$$

$E(x)$ د x اوسط هم بلل کېږي چې هغه په $\bar{x}$ ښيي همدارنګه که چېرې x غیر متمادي تصادفي متحول وي، په دې صورت کې د x وریانس چې په S^2 ښودل کېږي برابر دی له:

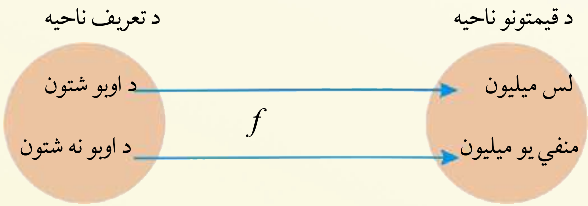
$$S^2=\sum_{i=1}^{n}\left[x_i-E(x_i)\right]^2 f(x_i)$$

مثال: یو شخصي شرکت غواړي د یوې غونډۍ پر سر د اوبو یوه څاه وکني، د اوبو څاه په یو میلیون افغانۍ تمامیږي که نوموړې څاه اوبه ورکړي د شرکت مالك لس میلیونه افغانۍ اجوره اخلي، پرته له هغې به د څاه د کېندلو یو میلیون افغانۍ مصرف په زیان ورکړي.

الف_ دا موضوع د یوې تابع په بڼه وښیئ.

ب_ که د دې احتمال چې کیندل شوې څاه اوبه ورکړي 0.2 او د نه ورکولو احتمال یې 0.8 وي، په دې صورت کې د احتمال تابع، اوسط $(Expected\ Value)$، وریانس او د x تصادفي متحول معیاري انحراف پیدا کړئ.

د الف حل:



د ب حل: د تصادفي متحول د احتمال تابع اوسط، وریانس او معیاري انحراف په لاندې جدول کې ښودل شوي دي:

تصادفي متحول	د احتمال تابع	اوسط	د تصادفي متحول د مربعاتو انحراف د تصادفي متحول له اوسط څخه	واریانس	انحراف معیاري
x_i	$f(x_i)$	$E(x)=\sum x_i f(x_i)$	$[x_i - E(x)]^2$	$S^2=[x_i - E(x)]^2 f(x_i)$	S
-1	0.8	$-1\cdot 0.8=-0.8$	$(-1-1.2)^2=4.84$	$4.84\cdot 0.8=3.872$	4.4
10	0.2	$10\cdot 0.2=2$	$(10-1.2)^2=77.44$	$77.44\cdot 0.2=15.488$	
	0.1	1.2		$\sum S^2=19.360$	

پوښتنې

فرض کوو چې د یوه موټر پلورنځي د 100 ورځو خرڅلاو په لاندې ډول دی:

د ورځو شمېر	60	30	8	2
د پېرودل شوو موټرو شمېر	0	1	2	3

د x تصادفي متحول د احتمال تابع او د تجمعي احتمال تابع پیدا کړئ.

د تجمعي احتمال له تابع څخه په ګټه اخېستنې سره ووایئ چې په یوه ورځ کې حداکثر احتمال د (2) موټرونو او حداقل احتمال د دوو موټرونو په کومه کچه ده؟

د دوه جمله‌يي توزيع او د برنولي ازمويښت

يو ګڼون کوونکي د پوهنتون د کانکور په آزموينه کې له 160 سؤالونو څخه 100 سوالونه حل کړل. تاسې څه سوچ کوئ چې داګڼون‌کوونکی په آزموينه کې بريالی کېږي او يا بې نتيجه پاتې کېږي؟

د احتمال دوه جمله‌يي توزيع يوه غيرمتمادي توزيع ده چې د مختلفو پېښو د توصيف لپاره په‌کار وړل کېږي اکثراً پېښې چې په نړۍ کې منځ ته راځي دوه حالتونه لري.

د لاندې آزمويښتي پېښو له شرطونو څخه څه ډول پايلې په لاس راوړلای شئ.

- څو ځلې دوه سکې واچول شي چې سمدلاسه دواړه شېر راشي.
- څو ځلې دوه تاسه واچول شي چې د شمېرو مجموعه يې له 7 څخه کوچنی شي.
- له يوې جعبې څخه څو ځلې د يوې مرۍ (مهره) اخېستل چې د تورو او سپينو مرۍ لرونکي ده.
- له يوې جعبې څخه چې د تورو او سپينو مريو لرونکې ده څو ځلې يوه مرۍ واخېستل شي چې اخېستل شوی مرۍ سپينه وي (چې اخېستل شوي مرۍ بيا په جعبه کې واچول شي)
- که چېرې m بريالیتوب له n آزمايښت څخه ($m < n$) چې ترتيب په کې مهم نه دی دا ټاکنه د څه په نامه يادېږي او فورمول يې وليکئ.
- که د m شکلونو د بريالیتوب احتمال د n ازمايښت څخه په P او $n-m$ شکلونو د ناکامې احتمال د n له آزمايښت څخه په q وښودل شي، نو د m له کاميابي احتمال د آزمايښت د n له شکلونو څخه به څو وي؟
- زده‌کوونکي له پنځو خلور ځوابه آزموينې له پوښتنو سره مخامخ کېږي. هغوی په ناخاپه ډول پوښتنو ته ځوابونه ورکوي، فرض کړئ که د (سم ځواب) بريالیتوب په T او (ناسم ځواب) نه بريالیتوب د F په توری وښودل شي په دې صورت کې د هر يوه سم او ناسم ځواب احتمال به څومره وي؟

له پورتنې فعاليت څخه څرګندېږي چې د برنولي آزمايښت يو ناڅاپه ازمايښت دی چې کولای شو پايله يې په دوو حالتونو بريالیتوب او نابريالیتوب دسته بندي کړو.

د برنولي توزيع کولای شو چې په $P(x=m)=P^m(1-P)^{1-m}=P^m\cdot q^{1-m}$ په بڼه وښيو پـه داسې حال کې چې P د بریالیتوب احتمال او $q=1-p$ د نابریالیتوب احتمال دی.

که چېرې يو ازمايښت n ځلې تکرار کړو، يو ترادف په لاس راځي، داسې چې کـه د هـر آزمايـښت د بريـاليتوب احتمال P او نابریالیتوب احتمال q وي، په دې صورت کې د n ځلې آزمايښت څخه د m ځلې بریـالیتوب احتمال عبارت دی له: $0\le m\le n$ $\qquad P(X\le m)=\binom{n}{m}P^m q^{n-m}$

پورتني اړيکه کولای شو چې په دې ډول $B(m,n,p)$ هم وښيو.

د پورتني فورمول په پام کې نيولو سره کـولای شـو، د دوه جملـه‌يي د توزيـع اوسـط پـه $\overline{x}=np$ او د دوی د توزيع معياري انحراف د $S=\sqrt{n\,p\,q}$ په بڼه وښيو.

مثال: د يوه ناروغ د ښه کېدو احتمال د شـکرې لـه نـاروغۍ څخـه 0.4 دی، کـه چېـرې 15 تنـه پـه دې نـاروغۍ اخته وي، ددې ځومره احتمال شته چې پنځه تنه ښه شي او همدا شان پيدا کړئ چې له 3 څخه تر 4 تنو پورې جوړ شي.

حل: ځرنګه چې $n=15$, $m=5$, $q=0.6$, $P=0.4$ دی نو:

$$P(m=5)=\binom{n}{m}P^m\cdot q^{n-m}=\binom{15}{5}(0.4)^5(0.6)^{10}$$

$$=\frac{15!}{5!(15-5)!}\cdot 0.01024\cdot 0.00604661760=\frac{360360}{120}\cdot 0.00006191$$

$$=\frac{22.3098876}{120}=0.1859$$

$$P(3\le m\le 4)=\sum_{i=3}^{4}\binom{15}{i}(0.4)^i(0.6)^{15-i}=(3^{15})(0.4)^3(0.6)^{15-3}+(4^{15})(0.4)^4(0.6)^{15-4}$$

$$=\frac{15!}{3!(15-3)!}(0.064)(0.6)^{12}+\frac{15!}{4!(15-4)!}(0.0256)(0.6)^{11}$$

$$=\frac{2730}{6}(0.000139264)+\frac{3270}{24}(0.0000928512)$$

$$=\frac{0.38019072}{6}+\frac{0.3036}{24}=0.063365+0.012650$$

$$P(3\le m\le 4)=0.076015$$

پوښتنې

په يوه کلي کې 200 کورنۍ اوسېږي که هره کورنۍ 4 ماشومان ولري ددې احتمال پيدا کړئ چې هره کورنۍ

- حد اقل يو زوی لري.
- يوازې دوه زامن لري.
- يوه يا دوې لوڼې ولري.

د پواسن د احتمال توزیع

که چېرې د برنولي دوه جملهيي توزيع فورمول په پام کې ونيسو، ايا ويلای شئ که چېرې د برنولي په دوه جملهيي توزيع کې د P قیمت صفر ته تقرب وکړي او د n قیمت لایتناهي ته تقرب وکړي، نو د برنولي دوه جملهيي توزيع څه سره مساوي کېږي.

$$1)\ b(x,n,p)=\binom{x}{n}p^{x}q^{n-x}$$

$$2)\ \lim_{n\to\infty} b(x,n,p)=\frac{\lambda^{x}\cdot e^{-\lambda}}{x!}$$

$$3)\ P(x,\lambda)=\frac{\lambda^{x}\cdot e^{-\lambda}}{x!}$$

که $n=5$, $p=0.1$ او $m=2$ وي د $P(x=m)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{m}}{m!}$ قیمتونه په داسې حال کې چې $P(X=m)=\binom{n}{m}P^{m}q^{n-m}$ او $\lambda=np$ وي محاسبه کړئ او د پاسنيو توابعو له قیمتونو سره يې پرتله کړئ، ويلای شئ چې د کوم فورمول په کار وړل، ساده دی؟

د پواسن فورمول کولای شي چې د m شکلونو د کاميابئ احتمال د n آزمايښتونو څخه کله چې n لوی او د کاميابي احتمال P کوچنی وي، د تقريبي محاسبې لپاره کارول کېږي.

دا فورمول عبارت دی له: $$P(X=m)=\frac{e^{-x}\lambda^{m}}{m!}$$

چې $\lambda=np$ او $e=2.71828$ دی.

په ياد ولرئ چې د پواسن په توزيع کې اوسط او هم وريانس له λ سره برابر دی.

مثال: 200 تنو مسافرينو د يوې الوتکې ټکټ اخيستلی دی د مخکنيو تجاربو په اساس که د هغه مسافرينو چې ټکټ يې رانيولی دی د نه راتګ احتمال 0.01 وي. ددې احتمال چې 3 تنه مسافرين بېرته را نه شي څومره دی.

حل: په دې مسئله کې د(نه راتلل) کاميابي ده او همدارنګه ليدل کېږي چې $n = 200$ ډېر لوی او $P = 0.01$ يعنې د کاميابی احتمال کوچنی دی، نو لرو:

$$P(X = m) = \frac{e^{-\lambda}\,\lambda^m}{m!} \qquad \lambda = n\,p = 200 \cdot 0.01 = 2$$

$$P(3) = \frac{(2.71828)^{-2} \cdot 2^3}{3!} = \frac{\frac{1}{(2.71828)^2} \cdot 8}{6} = \frac{\frac{1}{7.3890461584} \cdot 8}{6}$$

$$= \frac{0.13533 \cdot 8}{6} = \frac{1.08268}{6} = 0.1804$$

اوس که چېرې دا احتمال د دو جمله‌يي په فورمول محاسبه کړو،لرو چې:

$$P(X = m) = \binom{n}{m} P^m \; q^{n-m}$$

$$\left.\begin{matrix} n = 200 \\ p = 0.01 \end{matrix}\right\} \Rightarrow q = 0.99$$

$$P(3) = P(X = 3) = \binom{200}{3} (0.01)^3 (0.099)^{200-3}$$

$$= \frac{200!}{3! \cdot 197!} (0.01)^3 (0.099)^{197} = 0.1814$$

څرنګه چې ليدل کېږي دواړه ځوابونه سره معادل دي، نو واضح ده چې د پواسن د فورمول له لارې احتمال محاسبه ساده ده.

يادونه:

د پواسن د فورمول په واسطه کولای شو چې په يوه ټاکلي وخت کې د ورتللو د شمېر احتمال په لاندې ډول وښيو:

$$P(X=m)=\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^m}{m!}$$

په پورتني فورمول کې t د ښودل شوی وخت نسبت پر ټول وخت چې اوسط هغې ته ورکړل شوی وي m د ورتللو شمېر د t په واحد وخت کې د λ د ورتګ شمېر اوسط په واحد د وخت کې دی.

مثال: که په يوه ساعت کې د يوه بانک د مراجعينو شمېر په متوسط ډول 60 تنه وي، ددې احتمال چې څلور تنه په لومړيو دريو دقيقو کې راغلی وي، څومره دی.

حل:

$$\lambda=60 \qquad , \qquad t=\frac{3}{60}=\frac{1}{20}$$

$$m=4 \qquad , \qquad \lambda t=60\cdot\frac{1}{20}=3$$

$$P(m=4)=\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^m}{m!}=\frac{e^{-3}(3)^4}{4!}=\frac{(2.71828)^{-3}(3)^4}{4!}=\frac{\frac{1}{(2.71828)^3}\cdot 81}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}$$

$$=\frac{\frac{1}{20.0854}\cdot 81}{24}=\frac{4.03278}{24}=0.168032$$

پوښتنې

د چاپ د یوه ماشین د جوړولو لپاره په یوه کال کې په متوسط ډول ورتګ دوه ځلې ده، فرض کړو چې د پواسن توزیع په دې اړه صدق کوي.

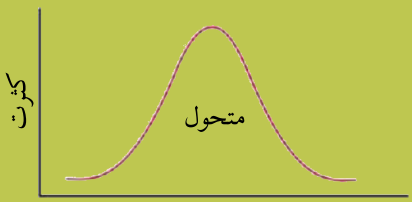
الف: د ماشین د جوړولو لپاره د ورتګ د احتمال توزیع په یوه کال کې حساب کړئ.

ب: د توزیع اوسط او معیاري انحراف څومره دی؟

ج: فرض کړئ که د هر ورتګ مصرف 100 افغانۍ وي، د هر ماشین د جوړولو مصرف پیدا کړئ؟

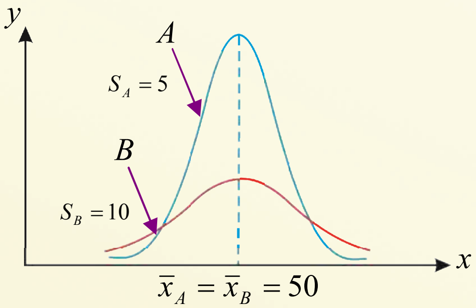
د: ددې احتمال چې په هر کال کې دیوه ماشین د جوړولو مصرف له 300 افغانیو څخه زیات وي، څومره دی؟

د نورمال توزیع

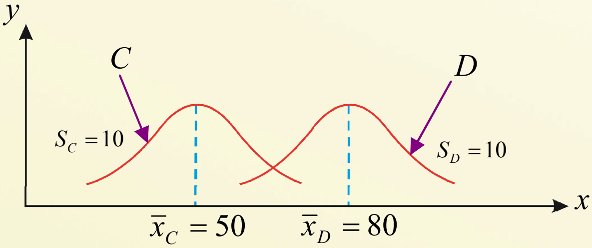


پوهېږو چې د نورمالي منحني شکل مشابه او متناظر له زانګولی سره ده، په نورماله منحني کې د پراګندګی د مرکزي شاخصونه(معیاري انحراف او اوسط) څخه ډول ځایونه(موقعیتونه) نیولی شي.

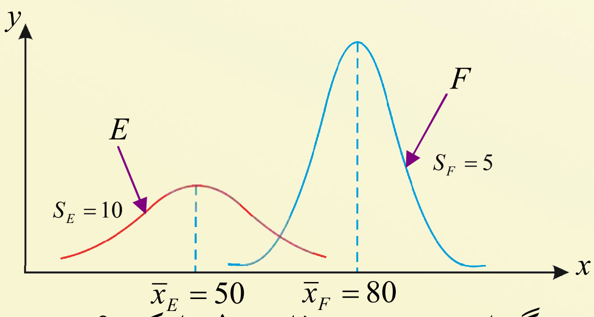
څو نورمالې توزیع ګانې له بېلابېلو سطحو او معیاري انحرافونو سره په لاندې شکلونو کې ورکړل شوي دي.



الف شکل



ب شکل



ج شکل

لاندینی فعالیت له پورتنیو شکلونو څخه په ګټه اخېستني سره په شفاهي ډول بیان کړئ؟

- د الف په شکل کې د A او B د تصادفي متحول توزيع د څه ډول معياري انحراف او اوسط لرونکې ده؟
- د ب په شکل کې C او D توزيع د څه ډول معياري انحراف او اوسط لرونکی دی؟
- د ج په شکل کې د E او F توزيع د څه ډول معياري انحراف اوسط لرونکی دی؟
- د نورمال منحني شکل دواړو خواوو ته تر کوم ځایه غزیدلی دی؟

د پورتني فعالیت له سرته رسولو څخه داسې پایله په لاس راځي چې:

د نورمال منحني توزیع کېدای شي چې په څلورو طریقو یو له بل سره توپیر ولري. د نورمال توزیع ریاضیکي معادله چې د $f(x)$ احتمال توزیع تابع ښودونکی ده، په لاندې ډول ښوول کېږي.

$$f(x) = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\bar{x}}{s}\right)^2}$$

او یا

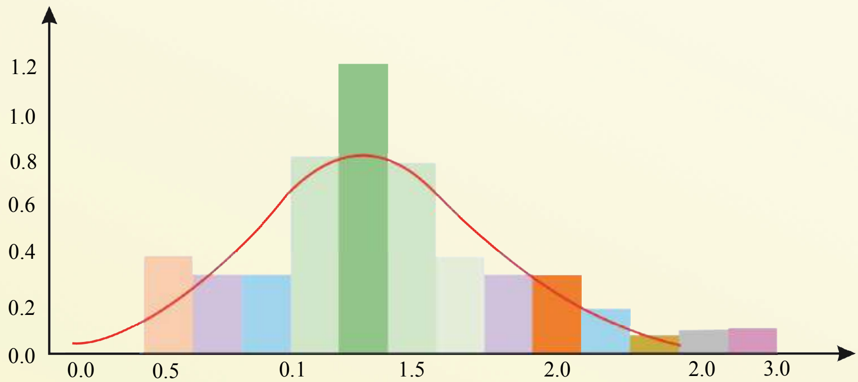
$$f(x) = N(x, \bar{x}, s)$$

په داسې حال کې چې $e = 2.71828$ او π هم ثابت عدد 3.14189 دی $\bar{x}$ اوسط، s معیاري انحراف، x متمادی تصادفي مقدار او $f(x)$ د منحني جګوالی راښیي.

د نورمالې توزیع له متمادی توزیعګانو څخه ده. د نورمالي توزیع په واسطه کولای شو، د اندازه کولو توپیر په ښه توګه سره نژدې کړو.

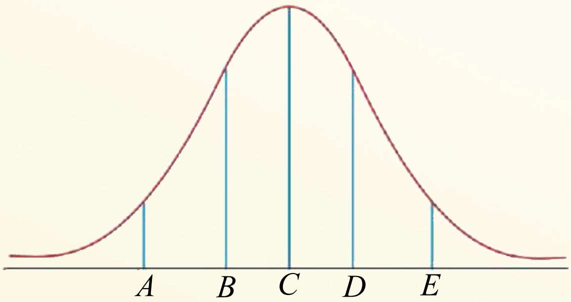
مثال: د موټرونو ماشین د تیلو سوزولو په وخت کې یوه اندازه مضر لوګي تولیدوي، د هغه مضر لوګي مقدار چې له 46 موټرونو تولیدیږي، د یوه تن په واسطه چې لورنزن نومیده په 1980 کال کې وڅیړل شو.یوه اندازه لوګی د نایتروجن اوکسایدونه لري. لاندې مستطیلي ګراف د نایتروجن اوکساید میزان د $(\frac{gr}{mil})$ د 46 موټرونو د نورمال احتمال توزیع اوسط او وریانس چې د نوموړی کس له خوا تر څېړنې لاندې نیول شوی. ددې مستطیلي ګراف د ستونونو مساحت متناسب دی له هغو 46 نمونهیي شمیر له اندازهګیري سره چې ددې ستون د افقي ټکو تر منځ قرار لري.

د مثال په ډول په څلورم ستون کې(چې له 1 څخه تر 1.2 پورې په افقي محور قرار لري) د $0.870\cdot0.2=0.174$ مساحت لرونکی دی چې د $\frac{4}{46}$ سره برابر دی، ځکه 8 دیتا له 1 څخه تر 1.2 پورې پراته دي.

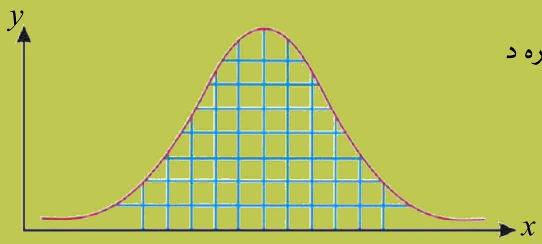


پوښتنه

لاندېنی شکل په پام کې ونیسئ د A, B, C, D او E ټکو موقعیت د معیاري انحراف د اوسط له جنسه پیدا کړئ.



د نورمال توزیع منحني لاندې مساحت او د هغې سټنډرډ کول

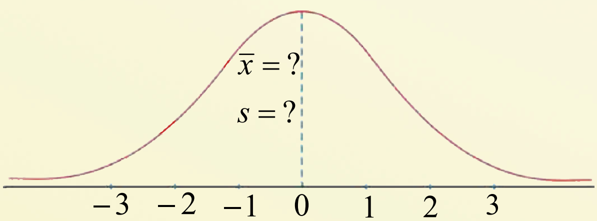


مخامخ شکل په پام کې ونیسئ:

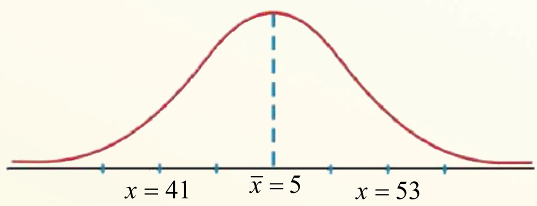
د $y = f(x)$ د منحني لاندې مساحت د محاسبې لپاره د

څه ډول لارو وړاندیز کوئ.

- که چیرې د x تصادفي متمادي متحول د احتمال نورمال توزیع چې اوسط یې $\overline{x}$ او معیاري انحراف یې s وي، ددې احتمال چې دا تصادفي متحول د x_1 او x_2 تر منځ کمیت غوره کړي د انتیګرال په بڼه یې ولیکئ.
- سوچ کولای شئ چې د احتمال نورمال توزیع د ریاضي شکل انتیګرال محاسبه په ساده کار وي.
- که چیرې د نورمال تصادفي متحول په $z = \dfrac{x - \overline{x}}{s}$ ډول ولیکو، د $f(x)$ د احتمال توزیع تابع له څه سره برابره ده؟
- ویلای شئ چې اوسط او معیاري انحراف په لاندې شکل کې له کومو عددونو سره برابر دی؟



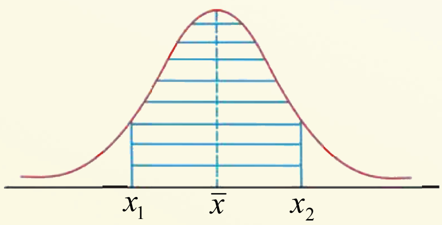
• كه په لاندې شكل كې چې د $x=41$ او $x=53$ قيمتونه په نورمال ډول د $\bar{x}=50$ اوسط او $S=5$ معيار انحراف ښودل شوي دي، نو د $z=\dfrac{x-\bar{x}}{s}$ مقدار په لاس راوړئ.



له پورتني فعاليت څخه دا پايله په لاس راځي چې د احتمال د محاسبې لپاره داسې چې د x پيوسته تصادفي متحول د x_1 او x_2 تر منځ يو كميت ونيسئ، نو بايد د x د احتمال د توزيع له تابع څخه انتگرال ونيسو او د منحنې لاندې سطحه د x_1 او x_2 فاصلو ترمنځ په لاندې ډول محاسبه كړو:

$$f(x_1<x<x_2)=\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx=\int_{x_1}^{x_2}\frac{1}{s\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\bar{x}}{s})^2}$$

$$=\int_{x_1}^{x_2} N(x,\bar{x},s)dx$$



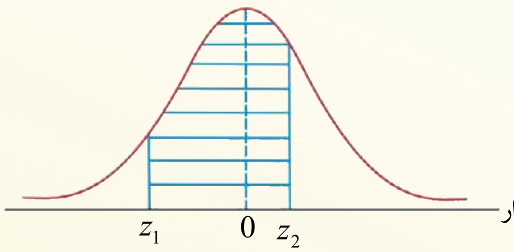
د نورمال توزيع احتمال محاسبه ساده كار نه دی، د نورمال توزيعگانو د منحنې لاندې مساحت محاسبه اوږدو جدولونو ته اړتيا لري چې عملاً دا كار گران دی، كولای شو چې د جدول د جوړولو شكل د احصائيوي data د سټنډرډ كولو په واسطه حل كړو.

په دې معنا چې كولای شو په x پورې اړوند تصادفي متحول چې د نورمال توزيع لرونكی دی، د لاندې اړيكې په واسطه سټنډرډ كړو.
$$z=\frac{x-\bar{x}}{s}$$

دلته z د سټنډرډ نورمال متحول په نامه او منحني ته د سټنډرډ نورمال منحني په نامه يا د نورمال احتمال منحني نومول كېږي، په ياد ولرئ چې د z سټنډرډ وي، متحول تل د صفر اوسط لرونكی او يو معيار انحراف يې دی، همدرانگه د نورمال منحني او افقي محور ترمنځ مساحت له ټاكل شوي واحد سره برابر وي.

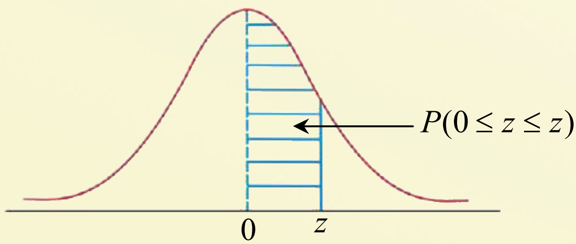
لاندې مساحت د یوه منحني یوه برخه د نورمال احتمال چې له احتمال سره مستقیم تناسب لري او کولای شو چې د $z=\dfrac{x-\bar{x}}{s}$ بدلولو سره یې په لاندې ډول وښیو.

$$f(z_1<z<z_2)=\int_{z_1}^{z_2}\frac{1}{s\sqrt{2\pi}}\,e^{\frac{-z^2}{2}}dz=\int_{z_1}^{z_2}N(z,0,1)\,dz$$

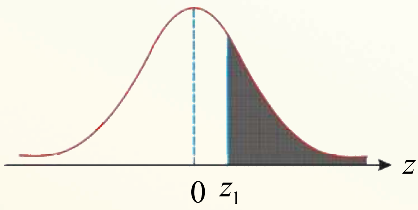


د x متحول منحني لاندې مساحت چې د $x=x_1$ او $x=x_2$ ترمنځ واقع دی، د z متحول له منحني مساحت سره چې د $z=z_1$ او $z=z_2$ ترمنځ پراته مساوي دي. په پایله کې کولای شو چې د نورمال د توزیع سټنډرډ د جدول په لرلو سره د نورمال توزیع احتمال د ناڅاپه متحول د هر ممکنه قیمت لپاره په لاس راوړای شو.

د سټنډرډ نورمال د توزیع احتمال د جدول د استعمال له لارې کولای شو، په لنډ ډول توضیح کړو. هغه جدول چې ددې لوست په پای کې راغلی دی، د سټنډرډ نورمال توزیع اړوند په احتمالاتو کې ګډون لري. لاندې جدول ددې لوست یوه برخه د جدول پای راښیي، هغه ارقام چې د جدول دپاسه لیکل شوی دی، راښیي چې z د مثبتو مقدارونو لپاره تنظیم شوی دی چې د منحني لاندې مساحت له صفر ټکي څخه تر z پورې راښیي.

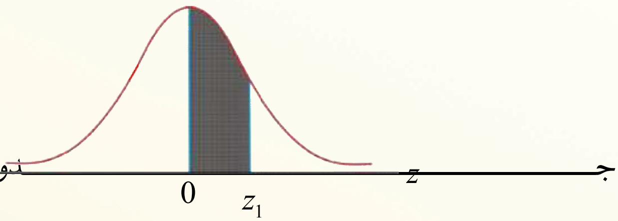


جدول(1)



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9278	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9268	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997

جدول (2)



Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	00239	0.0279	00311	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0754
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0978	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2226
0.6	0.2258	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2454	0.2486	0.2549
0.7	0.2580	0.2612	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2996	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4409	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4727	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0/4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4966
3.0	0.4987	04987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990
3.1	0.4990	0.4991	0.4991	0.4991	0.4992	0.4992	0.4992	0.4992	0.4993	0.4993
3.2	0.4993	0.4993	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4995	0.4995	0.4995
3.3	0.4995	0.4995	0.4995	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4997
3.4	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4998
3.5	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998
3.6	0.4998	0.4998	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.7	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.8	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.9	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000

د مثال په ډول که چېرې $z=1.56$ وي لومړی هغه سطر پیداکړئ چې په هغه کې z د 1.5 معادل دی، که چېرې ددې کرښې په اوږدوالي پرمخ لاړ شو، تر څو هغه ستون ته ورسېږي چې له پاسه 0.06 لیکل شوی دی لـه 0.9406 عـدد سره مخامخ کېږو چـې د منحنـي د لانـدې اړونـدې سـطحې لـه $z=0$ څخـه تـر $z=1.56$ پورې دی، نو لیکلای شو چې: $P(0 \le Z \le 1.56) = 0.9406$

لومړی مثال: د څښلو(نوشابې) د بوتلونو د ډکولو دستگاه داسې تنظیم شوې ده، که 952 مليلیتره نوشابه په بوتل کې واچوي ددې نوشابې میزان چې د نورمال توزیع اوسط یې 952 مليلیتره او معیاري انحراف یې 4 مليلیتره دی. ددې احتمال چې بوتل د 952 او 956 مليلیترو ترمنځ نوشابه ولري، څومره دی.

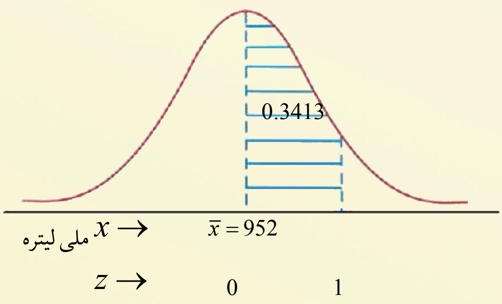
حل: لومړی z د x له جنسه پیداکوو:

$$z_1 = \frac{x-\bar{x}}{s} = \frac{952-952}{4} = \frac{0}{4} = 0$$

$$z_2 = \frac{956-952}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

نو پر دې اساس د x د تعریف ناحیه له 952 څخه تر 956 د z تعریف د ناحیې له صفر څخه تر 1 بدلېږي.

د لوست د پیل له جدول(2) څخه په ګټه اخیستنې سره لرو $P(0 \le z \le 1) = 0.3413$ احتمال داسې دی چې هغه بوتل چې له 952 څخه تر 956 مليلیترو نوشابه ولري، یا په بل عبارت 34.13 فیصده ډک شوي بوتلونه له 952 څخه تر 956 مليلیتره نوشابه لري؛ یعنې:



$$\begin{aligned} P(0 \le z \le 1) &= P(z_2) - P(z_1) \\ &= P(1) - P(0) \\ &= 0.3413 - 0 \\ &= 0.3413 \end{aligned}$$

دویم مثال: پـه یـوه خـاص مـضمون کـې د زدهکوونکـو د نمبـرو د نورمـال توزیـع اوسـط 70 او معیـاري انحراف یې 8 دی له نورمال سټنډرډ جدول څخه په ګټه اخیستنې سره له 54 څخـه تـر 84 نمبـرو تـرمنځ فیصدي پیداکړئ.

حل: د مسألې حل په لاندې ډول په ترسیمي بڼه ښودل شوی دی.

د $x = 54$ لپاره لرو: $z_1 = \dfrac{54-70}{8} = -2$

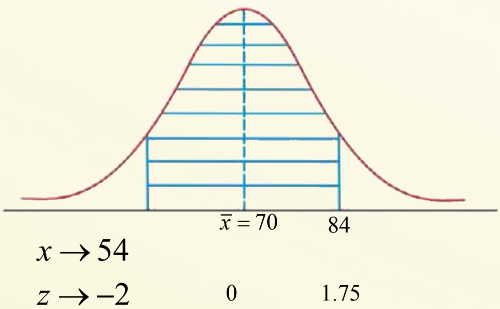
د $x = 84$ لپاره لرو: $z_2 = \dfrac{84-70}{8} = 1.75$

څرنګه چې د سټنډرډ نورمال منحني لاندې مساحت په یو محدود انټروال کې په پام کې نیول شوی دی، نو له نورمال سټنډرډ جدول(2) څخه لرو:

$$P(-2 \le z \le 0) = P(0 \le z \le 2) = 0.9772$$
$$P(0 \le z \le 1.75) = 0.9599$$

د ټاکل شوي مساحت د پام وړ احتمال دی.

$$P(-2 \le z \le 0) + P(0 \le z \le 1.75) = 0.4772 + 0.4599$$
$$= 0.9371$$

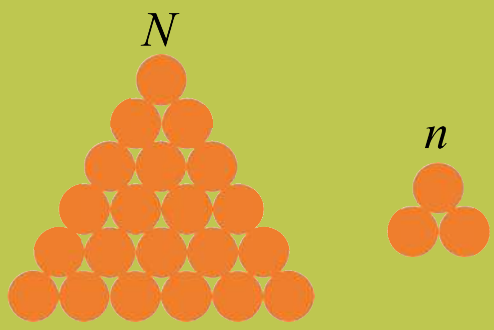


پوښتنې

د لومړي مثال په پام کې نیولو سره محاسبه کړئ چې د بوتلونو څو فیصده له 948 څخه تر 956 ملي‌لیټرو پورې نوشابه لري.

نمونه اخېستل

په دې متل کې((موټی د خروارو نمونه ده)) څرنګه تحلیلوئ.



$N =$ جامعه $\Rightarrow n = ?$

فعالیت

- که چېرې وغواړئ چې د افغانستان د 12 ټولګي د زده‌کوونکو ونې(قد) اندازه کړئ ددې کار لپاره څه ډول لارې وړاندیز کوئ.
- نمونه په دوو ډولونو وېشل کېږي، ساده نمونه او ناڅاپه نمونه، تاسې ددې نمونو کومې یوې ته غوره‌والی ورکوئ؟ ولې؟
- د نمونه ګیرۍ لپاره ښکاره خپل دلایل شته آیا کولای شئ یو یا دوه دلیلونه یې ووایئ.
- سوچ کولای شي چې د اوسط او معیاري انحراف عددي ځانګړنې چې د ټولنې د توزیع او د نمونې د توزیع لپاره ورڅخه ګټه اخېستل کېږي، یو شان وي.
- آیا د نمونه‌ګیرې او لېدل شویو ناڅاپه متحولینو د مقدارونو ترمنځ توپیر شته؟

له پورتنې فعالیت څخه پوهېږو چې د نمونه اخېستنې بېلې بېلې لارې شته دی.

_ ناڅاپه نمونه اخېستنه: د ټولنې ټول عناصر په ټاکل کېدو کې هم چانس دی.

_ سیستماتیک نمونه اخېستنه: د ټولنې عناصر په منظم ډول کود وهل شوی دی.

_ طبقه‌یي نمونه اخېستنه: ټولنه په بېلابېلو متجانسو ډلو وېشل شوی وي.

_ خوشه‌یي نمونه اخېستنه: که ټولنه ډېره لویه وي، هغه په بېلابېلو ځانګو وېشو او له هرې ځانګې څخه یوه نمونه ټاکو.

_ د هرې ټولنې عددي ځانګړنې(اوسط، معیاري انحراف) ته د ټولنې پارامتر وایي.

_ د هرې ټولنې د عددي نمونه‌ګیرې ځانګړنې(اوسط، معیار انحراف) ته آماره وایي.

_ د نمونې پایلې د مشاهدې د مقدارونو په عنوان د ناڅاپه متحولینو په بڼه په پام کې نیسو.

_ د $x_1, x_2, \dots, x_n$ ناڅاپه متحولونو یوه ناڅاپه نمونه د x تصادفي متحول ویل کېږي.

که چېرې تابع یې په دې ډول تعریف شوی وي.

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1)\cdot f(x_2)\ldots f(x_n)$$

مثال: فرض کوو چې په یوه قطۍ کې 5 سپینې او 7 تورې ګلولې وي، د قطۍ له منځ څخه 5 ګلولې یوه یوه ځای په ځای کول(د یوه عنصر دویم ځل ټاکل مجاز) ټاکو.

د ټاکل شوی ناڅاپه نمونې تصادفي متحولین په ژبه بیان کړئ او اړونده توزیع یې پیدا کړئ.

حل: د x_1, x_2 او x_3 ناڅاپه متحولونه په پام کې ونیسئ په لومړی پړاو کې د x_1 ناڅاپه متحول لپاره د صفر عدد د تورې ګلولې لپاره او د (1) عدد د سپینې ګلولې د ټاکلو په لومړي پړاو کې ځانته غوره کړئ او د x_2 متحول هم د صفر عدد د تورې ګلولې لپاره او د (1) عدد د سپینې ګلولې د ټاکلو لپاره په دویم پړاو کې ځانته غوره کړي په همدې بڼه د x_3 ناڅاپه متحول په دویم پړاو کې هم د صفر عدد د تورې ګلولې لپاره ټاکو چې په دې پړاو کې (1) عدد سپینه ګلوله ځانته غوره کوي، په دې حالت کې د x_1, x_2 او x_3 ناڅاپي متحولونه د برنولي ناڅاپه متحولین دي. د $p = \frac{5}{12}$ له پارامتر او د $i = 1, 2, 3$ مقدارونو څخه لرو:

$$f(x_i) = (\frac{5}{12})^{x_i}\ (1 - \frac{5}{12})^{1-x_i}$$

څرنګه چې نمونه اخېستن ناڅاپه ده، نو د x_1, x_2 او x_3 ناڅاپه متحولین یو له بل څخه بېل دي، نو تابع یې عبارت دی له:

$$f(x_1, x_2, x_3) = P(x_1 = x_1 \ \ ,\ \ x_2 = x_2 \ \ ,\ \ x_3 = x_3)$$

په یاد ولرئ چې د عناصرو هره ناڅاپه نمونې له مجهول پارامترونو سره تړلې نه دي، هغې ته آماره وایي.

پوښتنې

1. که $N = 25$ د یوې ټولنې حجم وي که وغواړو چې پنځه ګونه ناڅاپه نمونه یې پیدا کړو، د هغو نمونو شمېر چې په لاس راځي څومره ده؟
2. ساده او ناڅاپه نمونې سره له مثاله بیان کړئ؟
3. فرض کوو چې له یوې ټولنې څخه مو ناڅاپه نمونه رانیولې ده څه فکر کوئ چې له ددې نمونې سره به څه وکړو؟

د نمونې د اوسط توزیع

دولت غواړي وپوهېږي چې د یوه ښار د وګړو متوسطه

ګټه(سیما) څومره ده؟

ددې کار لپاره ناڅاپه نمونه ټاکي او د نمونې اوسط محاسبه کوي.

اوس باید ددې محاسبه شوي مقدار څخه کوم کمیت تخمین کړئ؟

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = ?$$

فعالیت

- د لاندې data د دریو زده‌کوونکو د ورزشي لوبو د نمبرو پایله راښیي:

نوم	پژواک	سلیمان	داود
نمبرې	4	3	2

- د نمبرو د احتمال توزیع یې ولیکئ.
- د زده‌کوونکو د نمبرو اوسط او معیاري انحراف حساب کړئ.
- راکړل شوی نمبرې د مرتبو جوړو په مرسته(ممکنې دوه ګونې نمونې د ځای په نیولو) ارایه او د هرې نمونې اوسط د جدول په بڼه وښیئ.
- د نمونو د اوسط د احتمال توزیع جدول(د $\bar{x}$ د کثرت د تو زیع جدول) ولیکئ.
- د $\bar{x}$ د کثرت توزیع جدول مستطیلي ګراف رسم کړئ.
- د اوسط د $\bar{x}$ متحول د زده‌کوونکو د نمبرو له اوسط سره پرتله کړئ.

له پورتني فعالیت څخه دا پایله په لاس راځي:

که $x_1, x_2, ..., x_n$ د یوې ټولنې د $f(x)$ احتمال تابع ناخاپه نمونه وي، په دې صورت کې د ناخاپه نمونې احتمال توزیع عبارت دی له:

x	x_1	x_2	$\dots$	x_n
$f(x)$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\dots$	

د $\bar{x}_n$ متحول اوسط، $E(\bar{x}_n) = \mu$

د $\bar{x}_n$ متحول وریانس، $U(\bar{x}_n) = \frac{1}{n}\delta$

د نمونې وریانس $S_n{}^2 = S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$

د نمونه‌یي وریانس اوسط، $E(S^2) = \delta^2$

په داسې حال کې چې $\bar{x}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ نمونه‌یي اوسط، μ د ټولنې اوسط δ^2 د ټولنې وریانس S^2 د نمونې وریانس دی.

مثال: د لاندې ټولنې، ټولې دوه ګونې ممکنه ناخاپه نمونې د ځای په ځای کولو سره ټاکو:

$$f(x) = \frac{1}{3} \quad , \quad x = 1, 2, 3$$

الف: د x د احتمال توزیع ولیکئ.

ب: د ټولنې اوسط او وریانس حساب کړئ.

ج: د $\bar{x}$ د توزیع جدول تشکیل او مستطیلي ګراف یې رسم کړي.

د: $E(\bar{x})$ او $V(\bar{x})$ حساب کړئ.

حل:

الف:

x	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

ب:

$$\mu = E(x) = \sum_{x=1}^{3} x\, f(x) = \frac{1}{3}(1+2+3) = 2$$

$$E(x^2) = \sum_{x=1}^{3} x^2 f(x) = \frac{1}{3}(1^2+2^2+3^3) = \frac{14}{3}$$

$$\delta_x^2 = E(x^2) - (E(x))^2 = \frac{14}{3} - 2^2 = \frac{2}{3}$$

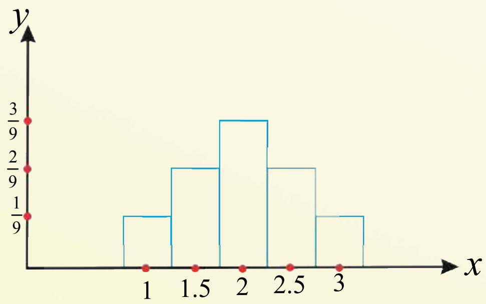
ج: د لاندې جدول ټولې دوه‌ګوني ممکنو نمونو د ځای نیول، د هر یوه اوسط راښیي:

نمونه	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(3,1)	(3,2)	(3,3)
$\overline{x}$	1	1.5	2	1.5	2	2.5	2	2.5	3

د $\overline{x}$ د توزیع د کثرت جدول په لاندې ډول شودل کیږي:

$\overline{x}$	1	1.5	2	2.5	3
$f(\overline{x})$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

د $\overline{x}$ مستطیلي ګراف په لاندې ډول رسمیږي:



د:

$$\mu_{\overline{x}} = E(\overline{x}) = \sum \overline{x} f(\overline{x}) = 1\cdot\frac{1}{9} + 1.5\cdot\frac{2}{9} + 2\cdot\frac{3}{9} + 2.5\cdot\frac{2}{9} + 3\cdot\frac{1}{9} = \frac{18}{9} = 2$$

$$E(\overline{x}^2) = \sum \overline{x}^2 f(\overline{x}) = 1^2\cdot\frac{1}{9} + (1.5)^2\cdot\frac{2}{9} + 2^2\cdot\frac{3}{9} + (2.5)^2\cdot\frac{2}{9} + 3^2\cdot\frac{1}{9} = \frac{13}{3}$$

$$\delta_{\overline{x}}^2 = V(\overline{x}) = E(\overline{x}^2) - (E(\overline{x}))^2 = \frac{13}{3} - 4 = \frac{1}{3}$$

$$E(x) = E(\overline{x}) = 2$$

نو لیدل کېږي چې:

$$V(\bar{x}) = \frac{\delta_x^{\ 2}}{n} = \frac{\frac{2}{3}}{2} = \frac{1}{3}$$

پوښتنه

1. فرض کوو چې یوه ټولنه د $6,4,2$ او 8 څلورو عددونو څخه جوړه شوې وي، په دې صورت کې توزیع، اوسط او وریانس ددې ټولنې محاسبه او وروسته له دې ټولنې څخه دوه ګونې ناڅاپه نمونه د ځای په نیولو سره وټاکئ او د نمونې توزیع اوسط یعنې $\bar{x}$ په لاس راوړئ. د کثرت څو ضلعي ګراف یې رسم کړئ، د $\bar{x}$ اوسط او وریانس حساب کړي.

د مرکزي لیمیټ قضیه

پوهیږو چې د ټولنې کمیت ته د ټولنې پارامتر او د نمونې کمیت ته نمونه یي اوسط ویل کیږي د $S_{\bar{x}}$ او $\bar{x}$ د نمونو احصائیه د کوم پارامتر په اړه اطلاعات زموږ په اختیار کې ږدي.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}=?$$

- که د لویې ټولنې حجم $\frac{S}{\sqrt{n}}$ وي، د کوچنۍ ټولنې حجم په $\frac{S}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$ (چې N د ټولنې د عناصرو شمېر، n د نمونه عناصرو شمېر او S معیاري انحراف دی) وښیو څه وخت کېدای شي چې د لویې ټولنې حجم له کوچنۍ ټولنې سره برابر شي؟
- که د $x_1, x_2, \ldots, x_n$ نورمال توزیع یو له بل څخه بیل وي آیا د هغوی د جمع حاصل د نورمال توزیع لرونکی ده؟
- که $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ناخاپه ځانګړي متحولونه په یو شان توزیع شوي وي او د μ اوسط لرونکی وي او ς^2 وریانس وي ویلای شو چې د $S_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ د توزیع وریانس او اوسط څو دی؟

له پورتنې فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

که چېرې N د یوې لویې ټولنې اوسط μ متناهي اوسط او δ^2 متناهي وریانس لرونکی یوه ناخاپه n ګونه نمونه وټاکو، په دې صورت کې د نمونې اوسط یعنې $\bar{x}$ د تقریبي نورمال توزیع د $\mu_{\bar{x}} = \mu$ اوسط $\delta_{\bar{x}}^2 = \frac{\delta^2}{n}$ وریانس دی او $Z = \frac{\bar{x} - M}{\frac{\delta}{\sqrt{n}}}$ ناخاپه متحول د نورمال سټنډرډ توزیع دی. په داسې حال کې چې $\frac{N-n}{N-1}$ ضریب د N د لویو قیمتونو لپاره (1) ته نژدې کیږي. په حقیقت کې یې لیمیټ هغه وخت چې $n \to \infty$ وکړی، برابر له (1) سره دی.

مثال: له یوه لوی ټولګي څخه چې د زده‌کوونکو د ریاضي مضمون نمبرو نورماله توزیع د 71 اوسط او معیاري انحراف یې 9 دی. یوه 9 تایي نمونه ټاکو، ددې احتمال چې ددې نمونې د نمبرو اوسط له 80 څخه زیات وي حساب کړئ. همدارنګه که چېرې په تصادفي ډول یو زده‌کوونکی وټاکو، په دې صورت کې احتمال ددې چې نمبرې یې له 80 څخه زیاتې وي، محاسبه کړئ.

حل: څرنګه چې $\bar{x}$ د نورمال توزیع د μ په اوسط او معیاري انحراف لرونکی دی، نولرو:

$$P(z>80)=P(z=\frac{\bar{x}-\mu}{\frac{\delta}{\sqrt{n}}}>\frac{80-71}{\frac{9}{\sqrt{n}}}=P(z>3)$$

$$=1-P(z)\leq 3=1-0.9987=0.0013$$

همدارنګه د $n=1$ لپاره لرو:

$$P(z>80)=P(z=\frac{\bar{x}-\mu}{\delta}>\frac{80-71}{9}=P(z>1)$$

$$=1-P(z)\leq 1=1-0.8413=0.1587$$

پاملرنه:

د $P(z)$ قیمت له (2) جدول څخه په لاس راوړو.

پوښتنه

1- د هغو جعبو وزن چې د يوه ماشين په واسطه ترل کېږي، د نورمال توزيع اوسط يې $\mu = 250gr$ او معياري انحراف يې $\delta = 20gr$ وي مطلوب دی، د هغه احتمال محاسبه چې د ناخاپه نمونې د اوسط وزن $n = 16$ تايي د جعبو کوچنی له $240gr$ وي.

د نمونه‌یي توزیع نسبت

د A په یوه ښار کې n کسان غواړي د B یو کس د ښاروال په صفت وټاکي، که دا کسان تر پوښتنې لاندې راشي او x د موافقو کسانو شمېر وښیئ، ددې کسانو نسبي کثرت مساوي په څه دي.

فعالیت

- که چېرې x د دوو جملو توزیع لرونکی وي، کولای شو ولیکو چې:

$$f(x)=\binom{n}{x}P^{x}(1-p)^{n-x}\qquad x=0,1,2,\ ....$$

که چېرې $x=n\overset{\frown}{P} \Rightarrow \overset{\frown}{P}=\dfrac{x}{n}$ وي د x قیمت په تعویض سره په پورتنی فورمول کې $f(\overset{\frown}{P})$ ولیکئ.

- د $\overset{\frown}{P}=\dfrac{x}{n}$ په فورمول کې که د x تصادفي متحول د n ناخاپه متحولینو د $x_1,x_2,...,x_n$ له مجموع څخه تشکیل شوی وي، $\overset{\frown}{P}$ د نمونې اوسط سره څه اړیکه لري؟

که چېرې x ناخاپه متحول، n د برنولي د آزمایښتونو مجموعه، P د هر آزمایښت بریالیتوب احتمال وي، په دې صورت کې $\overset{\frown}{P}$ د نمونې د نسبت آماره $E(x)=n\,p$ اوسط $V(x)=n\,p\,q$ د x ناخاپه متحول وریانس وي. د دوه جمله‌یي د توزیع په پاملرنې سره د $\overset{\frown}{P}$ توزیع په دې فورمول سره کولای شو.

$$f(n\overset{\frown}{P})=\binom{n}{n\overset{\frown}{P}}p^{n\overset{\frown}{p}}(1-p)^{n(1-\overset{\frown}{p})}\qquad\qquad \overset{\frown}{P}=0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},.....,1$$

د $\overset{\frown}{P}$ ناخاپه متحولینو اوسط $(Expected\ Value)$ او وریانس په لاندې صورت لیکلای شو:

$$\mu_p=E(\overset{\frown}{P})=P$$

$$\delta^2\,\overset{\frown}{P}=V(\overset{\frown}{P})=\frac{p\,q}{n}=\frac{p(1-p)}{n}$$

د نورمال سټنډرډ توزیع یې عبارت دی له:

$$z=\frac{x-n\,p}{\sqrt{n\,p\,q}}=\frac{\overset{\frown}{p}-p}{\sqrt{\dfrac{p\,q}{n}}}$$

مثال: د کاليو د ښه والي احتمال $P=0.3$ دی، يوه ساده ناڅاپه نمونه $n=6$ گونه ټاکو. که چېرې x د ناقصو کاليو ښودونکی وي، د x او $\overset{\frown}{P}$ احتمال توزيع وليکئ.

حل: د x ناڅاپه متحول د دوه جمله‌يي توزيع د $P=0.3$ او $n=6$ پارامترونه وي.

$$f(x)=P(X=x)=B(x,6,0.3) \qquad x=0,1,...,6$$

د دوه جمله‌يي توزيع جدول څخه په گټه اخېستنې سره لاندې احتمالونه محاسبه او د توزيع د جدول احتمال يې ليکو:

x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	0.1176	0.3025	0.3241	0.1852	0.0595	0.0102	0.0007

د $\overset{\frown}{P}$ ناڅاپه متحول د $0,\frac{1}{6},\frac{2}{6},\frac{3}{6},\frac{4}{6},\frac{5}{6}$ او 1 قيمتونه نيسي:

$$P(\overset{\frown}{P}=0)=P(X=0)=0.1176$$

$$P(\overset{\frown}{P}=\frac{1}{6})=P(X=1)=0.3025$$

او پاتې نور په مشابه ډول محاسبه کېږي، پام وکړئ چې:

$$P(\overset{\frown}{P}=\frac{x}{n})=P(X=x)$$

او د $\overset{\frown}{P}$ د احتمال توزيع عبارت دی:

$\overset{\frown}{P}$	0	1.6	2.6	3.6	5.6	1
$f(\overset{\frown}{P})$	0.1176	0.3025	0.3241	0.0595	0.0102	0.0007

په پورتني مثال کې:

$$P(\overset{\frown}{P}\le 0.6)=P(x\le 3.6)=P(x\le 3)=\sum_{x=0}^{3}B(x,6,0,3)=0.9294$$

اويا:

$$P(\overset{\frown}{P}\le 0.27)=P(x\le 1.62)=P(x\le 3)=0.1176+0.3025=0.4201$$

پوښتنې

1. ددې احتمال چې د يوه تن د غوښتنليک فرم په پوره ډول پرته له غلطی(تېروتنې) څخه ډک کړي $P=0.7$ وي، يوه نمونه د $n=200$ گونه د استخدام ډک شوي فارمونه مو ټاکلي وي.

- ددې احتمال محاسبه کړئ چې $\overset{\frown}{P}$ د ± 00.05 داخلي فاصله کې د ټولنې له بنسټ څخه ولوېږي.
- ددې احتمال محاسبه کړې چې $\overset{\frown}{P}$ د 0.6 څخه زيات وي.

د خپرکي مهم ټکي

- ناخاپه متحول هغه اصطلاح ده چې د يوې تابع په عنوان په احصائيه او احتمالاتوکې ترې ګټه اخېستل کېږي.
- د يوه غير متمادی ناخاپه متحول د احتمال تابع هغه تابع ده چې د تعريف ناحيه يې هغه عددونه دي چې ناخاپه متحول کولای شي هغه غوره کړي او د قيمتونو له ناحيې سره د تعريف د ناحيې د عناصرو اړونده احتمالونه ګډون لري.
- د تجمعي احتمال تابع هغه تابع ده چې د تعريف ناحيه کې يې هغه عددونه ګډون ولري چې د x ناخاپه متحول يې ځانته غوره کوي او د قيمتونو ناحيه يې د $f(x)$ ټول تصويرونه موجود دي.
- د يوه متمادي متحول د احتمال تابع هغه تابع ده چې د تعريف ناحيه يې د x ټول متمادي مقدارونه غوره کړي او دقيمتونو ناحيه يې $F(x)$ ټول تصويرونه وي.
- د x غير متمادي ناخاپه متحول اوسط Expected value او وريانس په وار سره عبارت دي له:

$$E(x)=\sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i)=\bar{x}$$

$$V(x)=S^2=\sum_{i=1}^{n}(x_i-E(x_i))^2 f(x_i)$$

- د برنولي توزيع، $P(X=m)=P^m(1-P)^{1-m}$
- د دوه جملهيي توزيع، $P(X=m)=\binom{n}{m}P^m\ q^{n-m}$
- د دوه جملهيي توزيع اوسط او معياري انحراف عبارت له: $\bar{x}=n\,p\quad,\quad S=\sqrt{n\,p\,q}$
- د پواسن د احتمال توزيع يوه غيرمتمادي احتمال توزيع ده چې فورمول يې عبارت دی له:

$$P(x=m)=\frac{e^{-\lambda}\ \lambda^m}{m!}$$

- که N له يوې نورمالې جامعې څخه د n ځلي(تايي) ناخاپه نمونه وټاکو د $\bar{x}$ د نمونهيي اوسط آماره د نورمال توزيع لرونکی له $\mu_{(\bar{x})}=\mu$ اوسط سره او $\delta_{\bar{x}}^2=\frac{\delta^2}{n}$ او $z=\frac{\bar{x}-\mu}{\frac{\delta}{\sqrt{n}}}$ د سټنډرډ نورمال توزيع سره ده.
- نورماله توزيع: د نورمال توزيع شکل له زنګولی سره مشابه او متناظر دی، په نورمال توزيع کې مرکزي شاخصونه يو له بل سره برابر دي او د پيوسته ناخاپه متحولونو د ناحيې تعريف محدود دی چې د احتمال توزيع يې عبارت ده له:

$$f(x)=\frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\bar{x}}{\delta})^2}$$

چې μ د ټولنې اوسط او δ د ټولنې معياري انحراف دی.

- د $f(x)$ تابع د منحني لاندې مساحت د محاسبې لپاره د a او b په فاصلو کې کولای شو له دې انتيګرال څخه ګټه واخلو:
$$P(a \le x \le b)=\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\delta})^2}$$
- که چېرې x د دوه جملهيي توزيع د n شمېرد برنولي پر له پسې ازمايښتونه، P د کاميابۍ احتمال او $q=1-p$ د هر ازمايښت د نابرياليتوب احتمال وي، په دې صورت کې د احصائيې د اوسط نمونه او د x ناخاپه متحول وريانس په ترتيب سره عبارت دی له: $\overset{\frown}{P}=\frac{x}{n}$ ، $E(x)=n\,p$ او $V(x)=n\,p\,q$

همدارنګه د دوه جملهيي توزيع، اوسط، وريانس او د سټنډرډ توزيع او $\overset{\frown}{P}$ ناخاپه متحول په ترتيب سره عبارت دی له:

$$E(\overset{\frown}{P})=P \quad , \quad f(\overset{\frown}{P})=\binom{n}{n\overset{\frown}{P}}P^{n\overset{\frown}{P}}\,q^{(1-P)}$$

$$z=\frac{\overset{\frown}{P}-P}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} \quad , \quad V(\overset{\frown}{P})=\frac{pq}{n}$$

- د دې $z=\frac{x-\mu}{\delta}$ اړيکې په واسطه کولای شو چې هره احصائيوي مجموعه د نورمال توزيع لرونکې وي هغه په سټنډرډ نورمال بدل کړو.
- نمونه په دوو برخو وېشل کېږي، ساده نمونه او ناخاپه نمونه.
- د نمونه ګيرۍ طريقې په عمومي ډول عبارت دي له: ناخاپه نمونه‌ګيري، منظمه نمونه‌ګيري، ګروپي نمونه‌ګيري، خوشه‌يي نمونه ګيري.
- د x نمونې ناخاپه متحولينو اړوند تابع په دې صورت تعريفېږي.

$$f(x_1,x_2,x_3,\ \ldots\ldots\ldots\ ,x_n)=f(x_1),f(x_2),\ \ldots\ldots\ldots\ ,f(x_n)$$

- که چېرې x د ټولنې يوه ناخاپه نمونه د $f(x)$ د احتمال تابع په لرلو سره وي $E(\overline{x}_n)=\mu$ اوسط، $V(\overline{x}_n)=\frac{1}{n}\delta$ د اوسط وريانس، δ^2 د ټولنې وريانس او S^2 ته د نمونو وريانس وايي.

د څېرکي پوښتنې

1. دوه سکې څلور ځلې پورته واچوئ او د خط راتللو شمېر په پام کې ونيسئ:

- ناڅاپه متحولونه د تابع په بڼه وښيئ.
- د هر ځل د پورته اچونې احتمال نمونه‌يي فضا سره نسبت ورکړئ.
- د تابع د تجمعي او مجزا احتمال وليکئ.

2. که چېرې د يوې جوړې بوټونو د نقيصي احتمال $P = 0.1$ وي، د ناقصو بوټونو اوسط او معياري انحراف په يوه نمونه کې $n = 400$ جوړو بوټونو پيدا کړئ.

3. د يوه شرکت په گدام کې 500 پايې کمپيوټرونه شته چې د هغې له جملې څخه يې 50 پايې نقص لري، يو اخيستونکی له هغې څخه 10 پايې کمپيوټرونه اخلي، ددې احتمال څومره دی چې هغه 8 پايې جوړ اخيستی وي؟

4. لاندې اطلاعات چې اوسط او معياري انحراف د دوو پارامترونو په اړوند دی د نورمال توزيع د رسمولو لپاره ترې گټه واخلئ. لومړی يو افقي محور رسم کړئ او د $\bar{x}$, $\bar{x}+s$, $\bar{x}-s$, $\bar{x}+2s$ او $\bar{x}-2s$ ټکي پرې وټاکئ وروسته يو ټکی د h اختياري جگوالي په اندازه د $\bar{x}$ له پاسه په پام کې ونيسئ او $\bar{x}+s$ له پاسه يو ټکی د $0.6h$ په جگوالي وټاکئ، يعنې يو ټکی چې مختصات يې $(\bar{x}+s, 0.6h)$ وي، څرنگه چې د نورمال منحني متناظر دی، همدا عمل په ځانگړې توگه په $\bar{x}-s$ هم سرته ورسوئ. اوس د $\bar{x}-2s$, $\bar{x}+2s$ د پاسه دوه ټکې د h او $0.15h$ په جگوالي په پام کې ونيسئ، پام وکړئ چې د نورمال منحني د دقيق رسمولو لپاره د $0.6067h$ او $0.1354h$ په ځای له $0.6h$ او $0.15h$ څخه گټه واخلئ. په پايله کې دا ټکي د يوه منحني په واسطه وصل او ووايئ چې دا منحني په کومو فاصلو کې محدب او په کومو فاصلو کې مقعره ده.

5. په يوه روغتون يوه څېړنه راښيي چې د مراجعينو شمېر د شنبې په ورځ وروسته له وخت څخه د 6 او 8 ترمنځ 25 تنه دی. فرض کړئ چې د پواسن د احتمال توزيع په دې حالت کې صدق وکړي.

- د روغتون د مراجعينو د احتمال توزيع د دوشنبې له ورځې، وروسته له وخت څخه د 6 او 8 ساعتونو تر منځ پيدا او گراف يې رسم کړئ؟ آيا دا توزيع خمېده ده؟
- ددې توزيع د اوسط او معياري انحراف مقدار په لاس راوړئ.
- آيا دا ممکنه ده چې د دوشنبې په ورځ وروسته له وخت څخه د 6 او 8 ساعتونو ترمنځ به له 7 تنو څخه زيات روغتون ته مراجعه کړې وي؟ ولې؟

6. فرض کوو چې د يوه کتاب د يوه مخ د تېروتنو شمېر د پواسن د توزيع يا $\lambda = \frac{1}{2}$ پارامتر لرونکی دی د محاسبې احتمال يې مطلوب دی داسې چې:

- حد اقل یوه ټایپي تېروتنه په هغه مخ کې وي.
- دقیقاً 5 ټایپي تېروتنې په هغه مخ کې دي.
- د 3 او 6 ترمنځ ټایپي تیروتنې په هغه کې وي.

7. فرض کوو چې د هغه پستون قطر چې د یوه اتوماتیکي ماشین په واسطه جوړېږي په نورمال یا اوسط ډول 25 ملي متر او معیاري انحراف یې 0.5 ملي متره توزیع شوی وي.
   - کله چې د پستون قطر د 25.2 او 25.9 ترمنځ وي احتمال یې څومره دی.
   - د پستونونو کوم نسبت د 25 ملي قطر لرونکی او له هغې څخه کم دی.
   - که چېرې 1000 پستونه جوړ شي، له هغوی څخه څو دانې ددې وړ دی چې 24.07 ملي مترو څخه کم قطر ولري.
   - د تولید شویو پستونونو څو فیصده د 24.56 ملي متره معادل قطر یا له هغه څخه زیات لري.

8. که چېرې $x_1, x_2, \ldots, x_n$ د x ناڅاپه متحول یوه تصادفي نمونه وي ایا د $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$ ، $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$ ، $\frac{x_1+x_2}{x_4}$ او $x_1+3x_2-x_3$ تابع آماره دی.

9. که چېرې x یو ناڅاپه متحول او د μ او δ^2 پارامترونه وي آیا د $\frac{3x_1-2x_3-\delta}{8\mu+x_2}$ ، $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)$ او $x_1+x_3-\mu$ توابع μ او δ^2 مجهول وي آیا پورتنیو تابعګانو ته احصائیه ویلی شو؟

10. ټولنه د برق په څلورو ډلو کې ګډون لري، که د عمرونو اوږدوالی یې د ساعتونو په حساب سره عبارت له 108 104 112 103 دي یوه ډله ناڅاپه ټاکو، فرض کوو چې د x ناڅاپه متحول ټاکل شوی د ډلو د عمر اوږدوالی راوښیئ:
    - د x د احتمال توزیع ولیکئ.
    - $E(x)$ او $V(x)$ محاسبه کړئ.

11. د یوه ښار د وګړو د ګټې اندازه چې د غیرنورمال توزیع $\mu = 90$ افغانی اوسط او د 25 افغانی معیاري انحراف سره دی که چېرې د 225 کسیز د وګړو د یوې نمونې د ګټې مجموعه له 2100 افغانیو څخه زیاته وي، احتمال یې څومره دی؟

12. پوهېږو چې 56% وګړي د A نوماند طرف دار دی، څومره ددې احتمال شته چې $n = 50$ دوه‌ګونې یوه نمونه کې حداقل 60% وګړي د A نوماند طرفدار وي.

13. په 12 مثال کې که چېرې $P = 0.4$ وي، یعنې ددې احتمال چې یو وګړی د A کاندید طرفدار وي 0.4 دی، یوه $n = 200$ ګونه نمونه وټاکو، نو څومره ددې احتمال شته چې لااقل 100 وګړي د A کاندید طرفدار وي.

اتم ڇپر کی
احتمالات

بېلې شوې(غیرمتمادي) او نښتې(متمادي) فضاګانې

په مخامخ شکلونو کې د لومړي او دویم نل څخه په وار سره اوبه په څمکه توییږي ویلای شئ چې له دې نلونو څخه په څمکه د اوبو د څاڅکو د توییدو توپیر په څه کې دی؟

فعالیت

- د یو رمل په اچولو سره ویلای شي چې د نمونه یي فضا ټولې ممکنې پایلې کومې دي؟
- آیا له ونې څخه د یوې پخې منې د لویدلو د وخت وړاندوینه کولای شئ چې وروسته له څو ثانیو، دقیقو او یا ساعتونو څخه پر ځمکه ولوېږي؟
- نظر وخت ته د منې د لویدلو نمونه یي فضا ولیکې.
- د رمل دانې د اچولو تجربې نمونه یي فضا د عناصرو شمېر او له ونې څخه د منې د لوېدلو وخت ځنګه پرتله کولای شي.

د پورتني فعالیت له سرته رسولو څخه لاندې پایله په لاس راځي:

د یوې ناڅاپه تجربې نمونه یې فضا عبارت له هغه ټاکلې او یا نا ټاکلي سټ یا مجموعې څخه ده چې ځینې عناصریې د شمېر وړ او ځینې یې د شمېر وړ نه وي.

هغه نمونه یې فضاګانې چې عناصر یې د شمېر(countable) او تشخیص وړ وي د غیرمتمادي نمونه یې فضا په نامه یادېږي او هغه نمونه یي فضاګانې چې عناصر یې د شمېر وړ نه وي د نښتې(متصلې) یا متمادي نمونه یې فضا په نامه یادېږي.

لومړی مثال: له لاندې نمونه یې فضاګانو څخه کومه یوه نښتی(متمادی) او کومه یوه غیرمتمادی ده.

الف: د دوو رمل دانو اچول

ب: د 8 او 12 ترمنځ د یوه حقیقي عدد ټاکل.

ج: له 30 زده کوونکو څخه د 3 تنو ټاکل

د: د یوې کُرې د حرارت د یوې درجې لوړېدل د 100 درجو د سانتي ګرېډ څخه تـر 1000 درجـود سـانتي ګرېـډ پورې.

هـ : د 30° او 45° زاویو ترمنځ یوه زاویه ټاکل.

حل: څرنګه چې (الف او ج) نمونه‌یي فضاګانې د محدودو غړو له شمېر څخه جوړې شوې، نو غیرمتمـادي فـضا ولې (ب، د او هـ) له نامحدود حقیقي عددونو څخه تـشکیل(جـوړ) چـې د شـمېر وړ نـه دي، نـو نـبنتي یـا متمـادی فضاګانې دي.

دویم مثال: خیبر د کور د ګلانو د اوبولو لپاره یو واټرپمپ اخیستی دی.

که چېرې د واټرپمپ عمرد ساعت له مخې په پام کې ونیسو، په دې حالت کې د واټرپمپ د عمر د اوږدوالی نمونه-یي فضا چې کېدای شي هر مثبت حقیقي عدد د واټرپمپ د ورانېدو په صورت کې د کار د مودې قیمت شـي، پـه دې ډول د داسې ناڅاپه حادثې پیښېدل هر حقیقي عدد کېدای شي چې دا نمونه‌یي فضا یوه غیـر متمـادي، یـا نـبنتي نمونه یې فضا د، یعنې { t د واټرپمپ د ورانېدو وخت، $S = \{t \in IR : t \geq 0$ چې په پورتنۍ نمونه یې فـضا کـې t د واټرپمپ د عمر اوږدوالي راښيي.

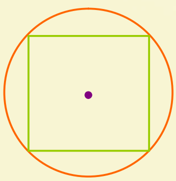
یادونه:

1- د لومړي مثال الف او ج جزونو کې محدودې نمونه‌یي فضاګانو څخه بحث شوی چې عناصـر یـې د شـمېر وړ دي، د ب او د جزونو کې نامحدودې نمونه‌یي فضاګانې ذکر شوې چې عناصر یې د شمېر وړ نه دي، نـو څـکه ټول مثبت حقیقي عددونه اخېستلای شي.

2- په دویم مثال کې نمونه‌یي فضا متصله یا غیر محدوده ده چې د حقیقي عددونو د انټروال په توګه ښودل کېږي.

پوښتنې

1- یو غشي وېشتونکی د یوه دایروي د سك په دننه چې وړانګه یې r ده، په پام کې ونیسي. د غشي د لګېدو ځای د دایرې په دننه کې چې مرکز ته نژدې ولګېږي، د هغې نمونه یې فضا ارایه کړې. وواياست چې دا څنګـه یـوه نمونه یې فضا ده.



2- په مخامخ شکل کې په ناڅـاپي یـا تـصادفي ډول د دایـرې پـه دننه کې یو ټکـې و ټـاکئ، احتمــال ددې شـته چـې مطلوب ټکې د مربع په دننه کې وي.

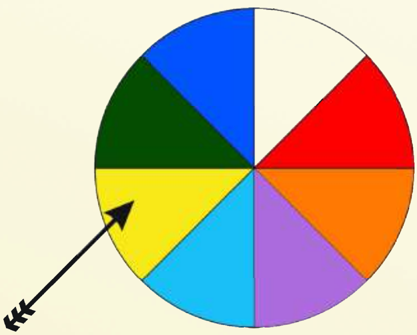
3- یو طبیعي دوه رقمی عدد و ټاکئ، هغه احتمـال پیدا کړئ چې عدد د 4 مضرب وي.

هم چانسه پېښې

د یوې نورمال رمل دانې په اچولو کې د (1) او یا (5) شمېرې مخ ته راتللو لپاره شرط څه دی؟

د 2 او 5 شمېرې د راتللو چانس یو له بل سره څه اړیکه لري؟

د مخامخ شکل په څېر یوه دایره په پام کې ونیسئ، که چېرې په راکړې شوې دایره کې یو ښکاري غشي وولي لاندې پوښتنو ته ځواب ورکړئ.



- په سور رنګه ناحیه او شین رنګه ناحیه کې د غشي لګېدل یو له بل سره څه اړیکه لري؟
- د غشي د لګېدو چانس د کچې په اړه د نارنجي او سپینو رنګونو سره په پرتله باندې څه ویلای شي؟
- په تور رنګ د غشي د لګېدو چانس څومره ده؟
- د تجربې، نمونه‌یي فضا ولیکئ.
- لومړني ناڅاپه پېښې لست کړې او د هر یوه احتمال پیدا کړئ ؟
- د لومړنیو پېښو د احتمالونو د مجموع په برخه کې څه ویلای شي؟

د پورتني فعالیت له اجرا کولو څخه لاندې پایله په لاس راوړو:

هغه لومړنۍ ساده پېښې چې د هغوی د پېښېدلو چانس د یوې تجربې په اجرا کولو کې سره برابر وي، د هم چانسه پېښو په نامه یادېږي، لکه:

که چېرې $S=\{e_1, e_2\ ,\dots e_n\}$ یوه نمونه یي فضا وي، نو $\{e_i\}$ د هر $i=1,2\dots n$ لپاره یوه ناڅاپه لومړني پېښه ده که $0\le P(\{e_i\})\le 1 \quad , \quad i=1\ ,\ 2\ ,\dots n$ دي.

سربېره پر دې د لومړنیو پېښو د احتمالونو مجموع مساوي له یوه سره ده.

$$P(\{e_1\})+P(\{e_2\})+\dots+P(\{e_n\})=\sum_{i=1}^{n}P(e_i)=1$$

مثال: څلور تنه په یوه لوبه کې ګډون کوي. تاسې د هر یوه د ګټلو احتمال پیدا کړئ په داسې حال کې چې نمونه‌یي فضا هم چانسه وي.

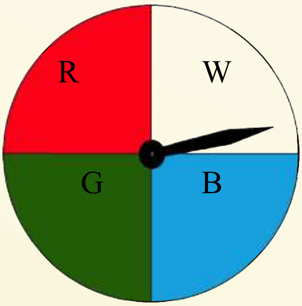
حل: که چېرې $S=\{a,b,c,d\}$ نمونه یي فضا وي، نو د هرې ناځاپه لومړنۍ پېښې احتمال $\frac{1}{4}$ دی.

لرو چې: $$P(a)=P(b)=P(c)=P(d)=\frac{1}{4}$$

پاسنۍ لومړنۍ پیښې سره هم چانسه دي.

پوښتنې

1- مخامخ شکل په پام کې ونیسي ، که چېرې د عقربې(ستنې) د دربدلو احتمال په آسماني او سپین رنګ 0.30 او د سره رنګ پرمخ 0.26 وي، د شنه رنګ پرمخ د دربدلو احتمال به څومره وي؟



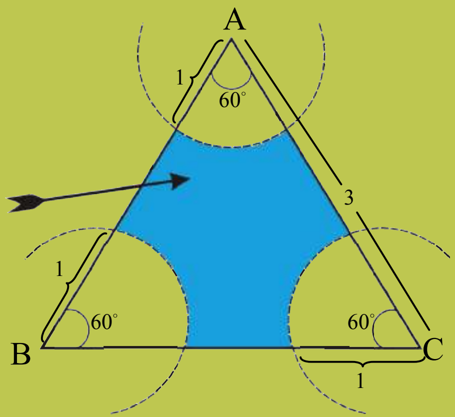
2- لاندې د کثرت جدول د رمل یوې دانې د اچولو لپاره په پام کې ونیسي. هغه احتمال پیدا کړئ چې د رمل دانه (5) شمېره راشي.

د رمل شمېره	1	2	3	4	5	6
کثرت	7	9	8	7	3	10

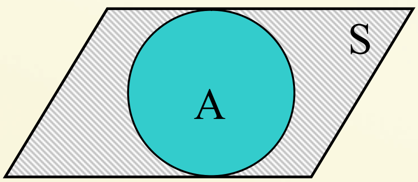
3- د رمل یوه دانه داسې ډکه شوې چې د جفت شمېرو د راتللو احتمال د طاق شمېرو دوه برابره وي، که یو چا په شرط وهلو کې(5) شمېره ټاکلې وي، د هغې احتمال پیدا کړئ.

د نښتي يا پیوسته(متمادي) فضاګانو احتمال

د یوه متساوي الاضلاع مثلث دننه چې هره ضلعه یې 3 واحده ده، یو غشي ولو، ددې احتمال چې د غشي د لګېدلو ټکې د مثلث د هر رأس نه د یو واحد په اندازه لوی وي، څو دی؟



- آیا ویلای شي چې د یوې ټوټه کرښې، د یوې مستوي د یوې برخې او یا د فضا د حجم څو ټکي یو پر بل پسې موجود دی؟
- د هغو ټکو د پېښېدلو احتمال چې د A په برخه کې چې د S د لویې برخې فرعي مساحت دی، لکه څرنګه چې په شکل کې لیدل کېږي د A او د S ساحو د مساحتونو له نسبت سره څه اړیکه لري؟



- آیا کولای شئ دا مسئله په فضاکې د یوه جسم حجم د یوې برخې د احتمال د محاسبې لپاره عمومیت ورکړئ؟

د پورتني فعالیت له سرته رسولو څخه لاندې پایله لاسته راځي.

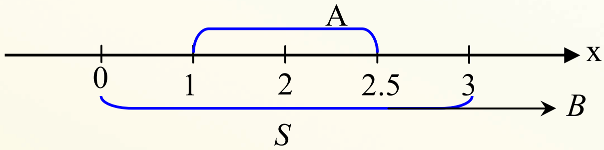
پیوسته(متمادي) نمونه‌یي فضا د نامعینو ټکو مجموعه ده چې شکل یې د عددونو په محور ، په مستوي کې لکه سطح او یا په فضاکې لکه حجمونه دی، څرنګه چې ددې ټکو ښوونه ممکن نه ده، نو د احتمال د نسبت پیدا کولو لپاره د ټوټه کرښو د اوږدوالي، د اشکالو سطحو او یا د جسمونو له حجم څخه استفاده کوو.

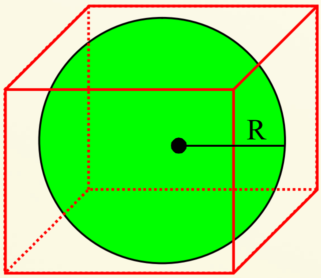
معمولاً د عددونو له محور څخه په ګټه اخیستنې سره د x یو متحول، د یوه مساحت د یوې برخې لپاره د دوو متحولینو لکه x او y او په همدې ترتیب د حجمونو لپاره له دریو متحولونو ، لکه: x, y او z څخه ګټه اخلو.

لومړی مثال: د عددونو په محور د $(0,3)$ په انټروال کې د x یو ټکی په ناخاپي یا اتفاقي ډول ټاکو ددې احتمال پیدا کړئ چې $1 < x < 2.5$ وي؟

حل: د حقيقي عددونو محور رسم کړئ د S او A فاصلې د هغه پر مخ ټاکو، د شکل په پام کې نيولو سره د A پيښې د پېښېدو احتمال څخه لرو:

$$P(A)=\frac{\text{د A ټوټه کرښې اوږدوالي}}{\text{د B ټوټه کرښې اوږدوالي}}=\frac{2.5-1}{3-0}=\frac{1.5}{3}=\frac{1}{2}$$





دويم مثال: په ناڅاپه ډول يو ټکی د يوه مکعب په دننه کې چې ضلعه يې 2 واحده وي ټاکو ددې احتمال پيدا کړئ چې نوموړي ټکې د مکعب د محاطي کُرې په دننه کې وي.

حل: که چېرې کره د هغه مکعب په دننه کې چې ضلعه يې a واحده ده، محاطه وي، نو د کرې شعاع $r=\frac{a}{2}$ کېدای شي:

A ناڅاپه پېښه د کرې د حجم او S نمونه يي فضا سره مساوي چې د مکعب حجم دی، نو لرو:

$$r=\frac{a}{2}=\frac{2}{2}=1$$

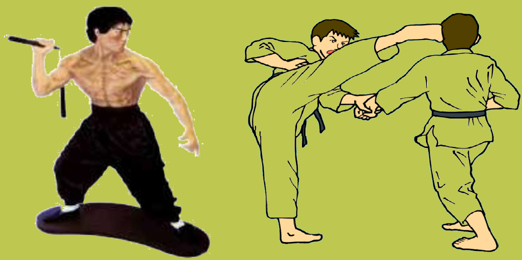
$$P(A)=\frac{\text{د کرې حجم}}{\text{د مکعب حجم}}=\frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{a^3}=\frac{\frac{4}{3}\pi(1)^3}{2^3}=\frac{\pi}{6}$$

پوښتني

1- د حقيقي عددونو په محور د A او B دوه ټکي په ناڅاپي يا تصادفي ډول داسې ټاکو چې $0\le A\le 3$ او $-2\le B\le 0$ وي، ددې احتمال پيدا کړئ چې د d واټن د A او B ترمنځ وي او له 3 واحدو څخه لوی وي.

2- که چېرې يو ټکی په ناڅاپي يا تصادفي ډول د دايرې د سطحې پرمخ وټاکو، ددې احتمال پيدا کړې چې نوموړي ټکي نظر د دايرې محيط ته د دايرې مرکز ته نژدې وي.

مشروط احتمال



له یوه ولایت څخه (20) تنه نارینه او ښځینه زده کوونکی د کانکور په آزموینه کې د طب پوهنځي ته بریالي شوي دي، د هغوی له جملې څخه یې 5 تنه ښه کاراته بازان دي: که په 15 تنو بریالیو نارینه وو کې 4 تنه یې ښه کارته بازان وی. د نومړو محصلینو له مینځ څخه په اتفاقي ډول یو تن ټاکو احتمال د دې پیدا کړئ چې:

- ټاکل شوی محصل یوه کارټه بازه نجلی وي؟
- په پورتني سوال کې هغه نجلی په کوم شرط سره د طب پوهنځي ته بریالی شوي ده؟

فعالیت

له 2500 زده‌کوونکو څخه 1600 تنه یې په مطالعه کولو عادت لري.

چې له 80% زده‌کوونکو څخه یې 70% نارینه زده‌کوونکي وي او په مطالعه کولو عادت ولري، که د ټولو زده‌کوونکو لپاره احتمال یو شان وي، د لاندې پېښو په پام کې نیولو سره د یوه تن زده‌کوونکی ټاکل د ښوونځی له زده‌کوونکو څخه:

R: له مطالعې سره عادت لري.

M : نارینه زده‌کوونکي دی.

F: یوه ښځینه زده‌کوونکې ده.

د لاندې پوښتنو په حل فکر وکړئ:

- ددې احتمال پیدا کړئ چې د مطالعه کوونکو له منځ څخه ټاکل شوي زده‌کوونکی نارینه وي؟
- ددې احتمال پیدا کړئ چې د مطالعه کوونکو له منځ څخه ټاکل شوی تن یوه ښځینه وي؟
- ددې احتمال پیدا کړئ چې ټاکل شوي زده‌کوونکي یو نارینه وي په دې شرط چې په مطالعه عادت وي.

د پورته فعالیت د سرته رسولو څخه لاندې پایله په لاس راوړو:

په حقیقت کې د هغه نارینه زده‌کوونکي د ټاکلو احتمال په دې شرط چې په مطالعه عادت ولري.

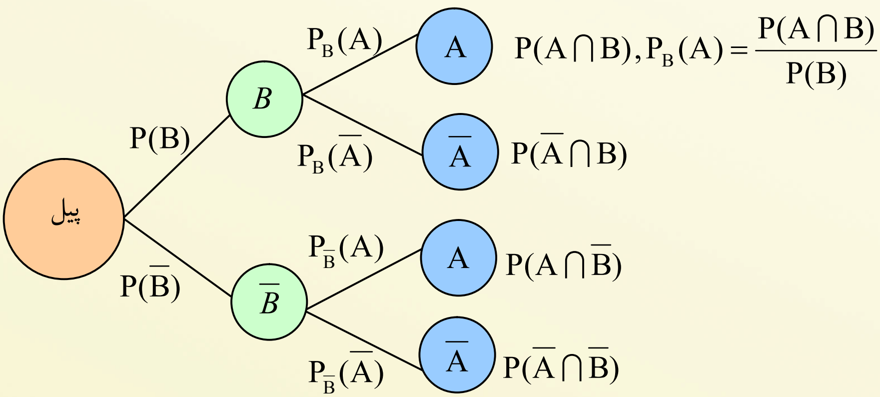
د لاندې احتمالات ویش له حاصل څخه عبارت دی که چېرې Ω ټوله نمونه‌یي فضا او $|\Omega|$ نمونه‌یي فضا د عناصرو شمیر وي، نو لرو:

$$P_R(M)=\frac{P(M\cap R)}{P(R)}=\frac{\frac{|M\cap R|}{|\Omega|}}{\frac{|R|}{|\Omega|}}=\frac{|M\cap R|}{|R|}=$$ د هغه نارینه زده‌کوونکو د ټاکلو احتمال چې په مطالعه عادت وي.

$P_R(M)$ د هغې پیښې له احتمال څخه عبارت دی چې ټاکلی زده‌کوونکی نارینه وي، په دې شرط چې هغه په مطالعه عادت وي.

تعریف: که چېرې S نمونه‌یي فضا A او B د نمونه‌یي فضا دوې ناخاپي پیښې وي، په داسې حال کې چې $P(B)\neq 0$ وي. په دې حالت کې نوموړی احتمال یعنې $P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ چې د A ناخاپي پېښې احتمال نظر د B ناخاپي پېښې ته مشروط احتمال بلل کېږي.

د پورته تعریف په پام کې نیولو سره نظر د مسیر لومړي قاعدې ته د ونه‌ییز دیاګرام په مرسته هم په لاس راوړای شو.



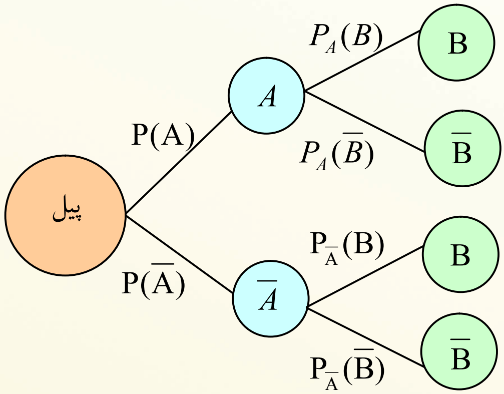
د مشروط احتمال له فورمول څخه لاندې مهمې پایلې په لاس راځي:

1- د مسیر له لومړۍ قاعدې څخه لرو: $P(A\cap B)=P(B)\cdot P_B(A)$

د مسیر له دویمې قاعدې څخه په ګټه اخیستنې سره لرو: $P(A\cap\overline{B})=P(\overline{B})\cdot P_{\overline{B}}(A)$

$$P(A)=P(B)\cdot P_B(A)+P(\overline{B})\cdot P_{\overline{B}}(A)$$

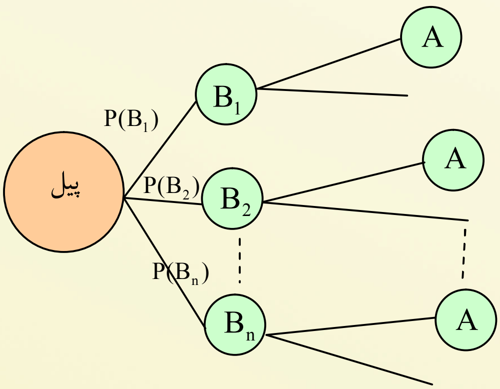
2- ونه‌ییزه(درختي) دیاګرام له مخې $P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$



له لومړي پايلې څخه په لاس راځي چې: $P_A(B) = \dfrac{P_B(A) \cdot P(B)}{P(B) \cdot P_B(A) + P(\overline{B}) \cdot P_{\overline{B}}(A)}$

3- که چېرې نومورې حالت د Ω نمونه يي فضا ناځاپي پيښو د $B_1, B_2, \ldots, B_n$ اختياري وېش لپاره عموميت ورکړو. د ونې په ډول د دياګرام په پام کې نيولو سره کولای شو، لاندې فورمول په لاس راوړو.

$$P_A(B_i) = \frac{P_{B_i}(A) \cdot P(B_i)}{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + \ldots + P(B_n) \cdot P_{B_n}(A)} = \frac{P(A \cap B_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(B_k) \cdot P_{B_k}(A)} \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$



لومړی مثال: يو زده کوونکی ښوونځي ته د تللو لپاره %50 هره ورځ د موټر څخه ګټه اخلي چې %70 په ټاکلي وخت ښوونځي ته رسېږي. په منځني ډول نومورې %60 په ټاکلي وخت ښوونځي ته حاضرېږي که چېرې پيښې:

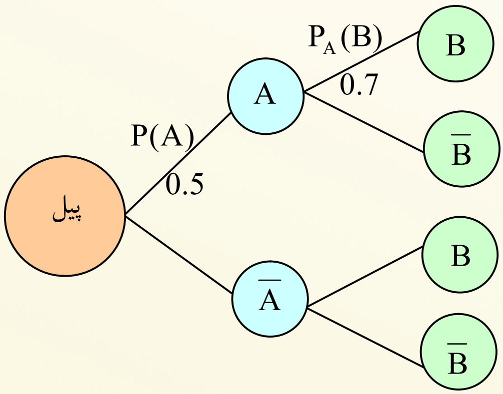
A: د موټر په واسطه راتلل B: په ټاکلي وخت رسېدل

وي په دې صورت کې د A مشروط احتمال نظر B ته يعنې $P_B(A)$ مطلوب دی؟

حل: د نوموړي احتمال د پیدا کولو لپاره د ونه‌ییز یا درختي دیاګرام په پام کې نیولو سره نظر فورمول ته په لاندې ډول په لاس راځي:

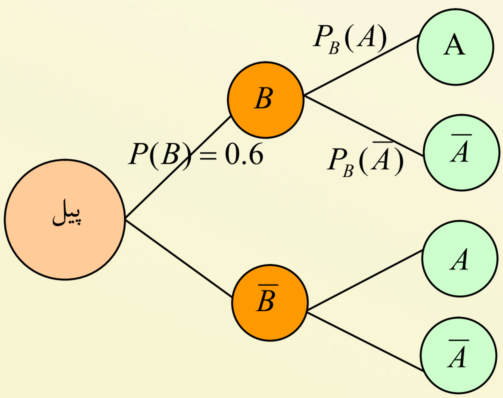
$$P_B(A)=\frac{P(A)\cdot P_A(B)}{P(B)}=\frac{0.5\cdot 0.7}{0.6}=0.5833=58.33\%$$

نو په دې اساس د موټر په واسطه د رسېدلو احتمال په دې شرط چې په ټاکلي وخت په شوونځي کې وي 58.33% سلنې سره برابر دی.



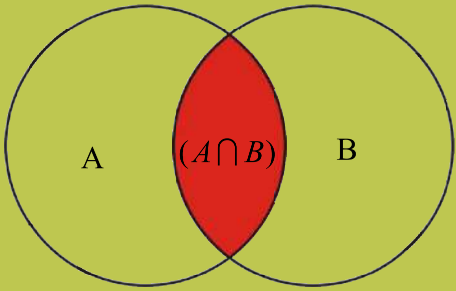
پوښتنې

له لاندې دیاګرام څخه په ګټه اخیستنې سره د مشروط احتمال په ټاکلي وخت رسېدل ښوونځي ته په دې شرط چې د موټر په واسطه سرته رسیدلي وي، یعنې $P_A(B)$ د ناڅاپه پیښې احتمال ښوونځي ته په ټاکلي وخت رسیدل، په دې شرط چې د موټر په واسطه نه وي راغلي یعنې $P_{\bar{A}}(B)$ مطلوب دی.



د حاصل ضرب اصل

د A ناخاپه پیښې مشروط احتمال په B ، د A او B ناخاپه پیښې احتمال یو له بل سره څه اړیکه لري؟

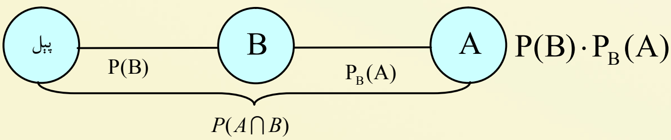


- که چېرې A او B دوې ناخاپه پیښې د S په نمونه يي فضا کې وي.
- د A ناخاپه پیښې مشروط احتمال B ته ولیکئ.
- د ونه‌ییز دیاګرام څخه په ګټه اخېستنې سره د $P(B) \cdot P_B(A)$ قیمت په لاس راوړئ.
- د $(A \cap B)$ ناخاپه پیښو احتمال د A او B ناخاپه پیښو څخه او یا د A مشروط له B څخه په ګټه اخیستنې سره ولیکئ.
- د فعالیت د دوو پورتنیو بندونو د محاسبې پایلې یو له بل سره پرتله کړئ.
- آیا کولای شو چې موضوع د ډېرو ناخاپه پیښو لپاره عمومیت ورکړو.

د پورتني فعالیت له سرته رسولو څخه لاندې پایله په لاس راوړو.

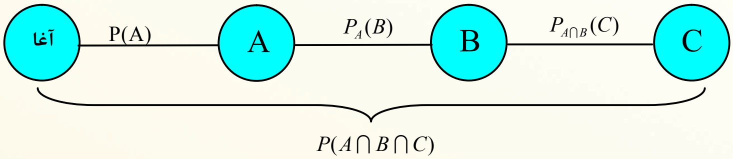
د S په یوه نمونه يي فضا کې د A او B د دوو ناخاپه پیښو لپاره د مشروط احتمال د تعریف په پام کې نیولو سره لرو: $P(A \cap B) = P(B) \cdot P_B(A)$

دا مسئله کولای شو چې د ونه‌ییز دیاګرام په مرسته هم په لاس راوړو:



$$\Rightarrow P(A \cap B) = P(B) \cdot P_B(A)$$

دا مطلب د دريو A، B او C پيښنو لپاره په لاندې ډول پراخوو.



$$\Rightarrow P(A\cap B\cap C)=P(A)\cdot P_A(B)\cdot P_{A\cap B}(C)$$

پورتنۍ قاعده د حاصل ضرب په نامه يادېږي او کولای شو، هغه د يو شمېر اختياري ناخاپي پيښنو لپاره هم په لاس راوړو.

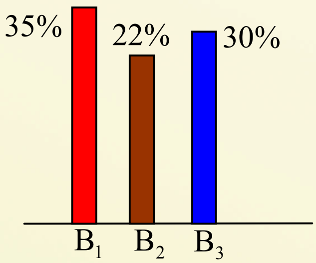
مثال: د B_1, B_2 او B_3 دريو ولايتونو په پارلماني ټاکنو کې چې د هر يوه لپاره د ټاکنو د ګډون کوونکو فيصدي او د جمهوري ګوند برخه فيصدي ورکړل شوې ده؟

په کوم احتمال د ټاکنو ګډون کوونکي او يا رايې اچوونکي جمهوري ګوند ټاکلي وي.

حل: په لاندې ډول ناخاپي پيښې تعريف او نوموو:

V : هغه رايې ورکوونکي چې جمهوري ګوند يې ټاکلی دی.

B_i : د ولايت رايې ورکوونکي B_i – (i-ام) ... i=1,2,3 لاندې ارقام ورکړل شوي وي.



ولايت	د راي ورکوونکو فيصدي	جمهوري ګوند ته رايې ورکوونکي
B_1	33.2%	35
B_2	46.5%	22
B_3	20.3%	30

د $B_i\ (i=1,2,3)$ ناخاپه پيښې په حقيقت کې يې د S نمونه يي فضا يو ويش جوړ کړی چې د هغوی لپاره صورت نيسي.

1- B_i يو له بل سره دوه په دوه مستقل او ګډ عناصر نه لري.

2- د S نمونه يي فضا لپاره $S=B_1\cup B_2\cup B_3=\bigcup_{i=1}^{3}B_i$ دی، نو $(i=1,2,3)$ $B_i\cap V$ پيښنه يو له بل سره يو په يو مستقل د هغوی لپاره صورت نيسي. $V=\bigcup_{i=1}^{3}(B_i\cap V)$

له دي اړيکي څخه کولای شو، د دواړو خواوو د احتمال لپاره وليکو:

$$P(V) = P\left(\bigcup_{i=1}^{3}(B_i \cap V)\right) = \sum_{i=1}^{3} P(B_i \cap V) = \sum_{i=1}^{3} P(B_i)\cdot P_{B_i}(V)$$
$$= P(B_1)\cdot P_{B_1}(V) + P(B_2)\cdot P_{B_2}(V) + P(B_3)\cdot P_{B_3}(V)$$
$$= 0.332\cdot 0.35 + 0.465\cdot 0.22 + 0.203\cdot 0.3 = 0.1162 + 0.1023 + 0.0609$$
$$= 0.2794 = 27.94\%$$

تعريف: که چېرې د $B_1, B_2, ..., B_n$ خرنگه چې $P(B_i) \neq 0$ وي $i = 1,...n$ پېښو عمومي حالت د S په نمونه‌يي فضا کې يوه پېښه وي، نو $P(A)$ د کامل احتمال په نامه ياد او د A اختياري ناڅاپې پېښې لپاره لرو:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)\cdot P_{B_i}(A)$$

د مشروط احتمال د تعريف، د اصل حاصل ضرب له قضيې څخه د کامل احتمال د مسئلې په پام کې نيولو څخه لاندې فورمول چې د بائيز(Baye's) د فورمول په نامه ياديږي، په آسانی سره په لاس راځي، داسې چې B_i چې $i = 1,...n$ د S نمونه يي فضا يوی پېښې لپاره چې $P(B_i) \neq 0$، $i = 1,...n$ د A د ناڅاپه پېښې احتمال چې $P(A) \neq 0$ سره وي، لرو:

د بائيز (Bayes)فورمول:

$$P_A(B_i) = \frac{P(A \cap B_i)}{P(A)} = \frac{P(B_i)\cdot P_{B_i}(A)}{\sum_{k=1}^{n} P(B_k)\cdot P_{B_k}(A)}$$

د بائيز فورمول ډېر استعمال لري لکه د $n = 2$ لپاره $B_1 = \overline{B}, B_2 = \overline{B}$ په پام کې ونيسو، په حقيقت کې B_1 او B_2 د S نمونه يي فضا پېښې وي لرو:

$$P_A(B) = \frac{P(B)\cdot P_B(A)}{P(B)\cdot P_B(A) + P(\overline{B})\cdot P_{\overline{B}}(A)}$$

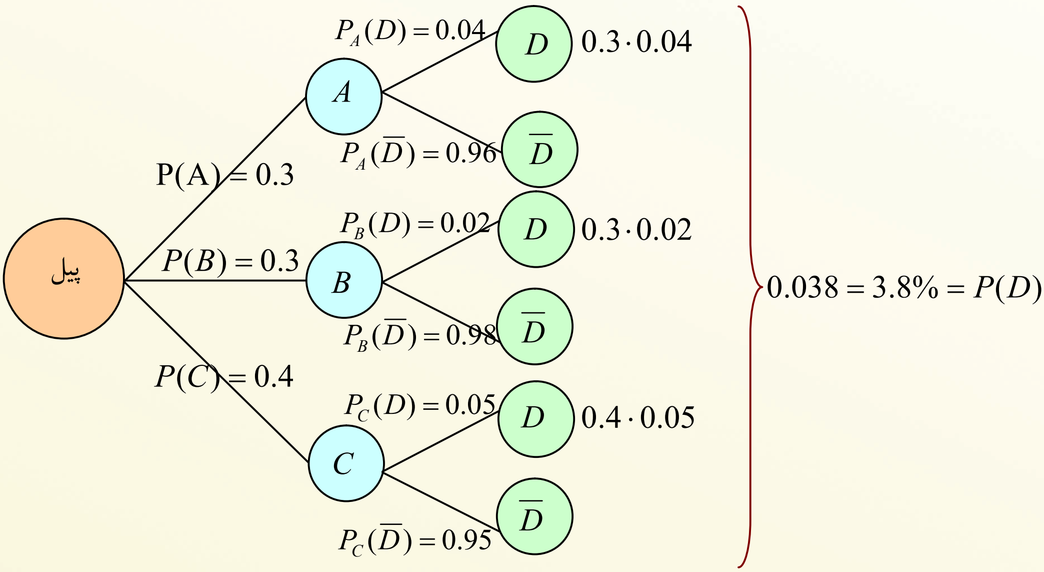
پورتنی فورمول د $n = 2$ د بائيز له فورمول څخه عبارت دي.

مثال: په يوه فابريکه کې د A، B او C درې ماشينونه په ترتيب سره 30%، 30% او 40% برخه د برق گروپونه توليدوي. که چېرې په ماشينونو کې د گروپونو د خرابيدو کچه په ترتيب سره 4%، 2% او 5% وي او نوموړي گروپونه په گډه سره خرڅ شي، مطلوب دي:

a) ددې احتمال چې يو اخېستل شوی گروپ وران يا خراب وي.

b) په کوم احتمال خراب خرڅ شوی ګروپ د C ماشین پورې اړه لري.

c) یو نوی تولید شوی ګروپ لرو، په کوم احتمـال سره به د B په ماشین پورې مربوط وي.



د b جز:

$$P_D(C)=\frac{P(D\cap C)}{P(D)}=\frac{P(C)\cdot P_C(D)}{P(D)}=\frac{0.4\cdot 0.05}{0.038}=\frac{0.02}{0.038}=0.526=52.6\%$$

د c جز:

$$P_{\overline{D}}(B)=\frac{P(\overline{D}\cap B)}{P(\overline{D})}=\frac{P(B)\cdot P_B(\overline{D})}{P(\overline{D})}=\frac{0.3\cdot 0.98}{0.3\cdot 0.96+0.3\cdot 0.98+0.4\cdot 0.95}$$

$$=\frac{0.294}{0.288+0.294+0.38}=\frac{0.294}{0.962}=0.3056=30.56\%$$

پوښتنې

1- د 1000 دانو رملونو په منځ کې د یوې دانې په شپږ واړه مخونه یوازې د 6 شمېره وهل شـوې ده. د هغوی لـه منځ څخه یوه ناڅاپه د رمل دانه ټاکل شوې او درې ځلې اچول شوې ده. درې ځلې 6 راغلي. پیداکړئ، هغه احتمـال چې په ټاکل شوې دانه په سم ډول شمېرې وهل شوې وي؟

د ناخاپه پېښو استقلالیت

لـه مـشروط احتمـال څخـه پـوهیږو چـې د A او B دوو ناخاپو پېښو یـا حـادثو د B د پېښې پېښدل د A پـه پېښه تـاثیر اچـوي پـه دې سـبب لازمـه ده چـې د احتمــال د محاسبې په وخت کې د A او B پېښه په پام کې ونیسو.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

د هغه حالت لپاره چې د A ناخاپه پېښې پېښدل پر B ناخاپه پېښې اغېزه ونه لري او بر عکس.

د A او B د ضرب د حاصل احتمال د $A \cap B$ پېښې له احتمال سره څه اړیکه لري.

تعریف: د A او B دوې ناخاپه پېښې چې یوه پر بله اغېزه لرونکې نه وي د ناخاپه مستقلو پېښو په نامه یادیږي.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

- د S نمونه یي فضا او د A او B دوې یوه له بلې څخه مستقلې پېښې چې د S نمونه یي فضا کې شامل وي، په پام کې ونیسئ.
- د مشروط احتمـال فورمول څخه په هغه صورت کې چې A او B یوه له بلې څخه مستقلې دوې پېـښې وي د $P(A)$ او $P_B(A)$ احتمـالونه یو له بل څخه څه توپیر لري؟
- د $P(A \cap B)$ ناخاپه پېښې احتمـال له څه سره مساوي دی؟
- د $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ د پېښو د احتمـال له فورمول څخـه پـه هغـه صـورت کـې چې A او B ګډ ټکی ونه لري، څه پایله اخلې؟

د پورتني فعالیت له سرته رسولو څخه لاندې پایله په لاس راځي:

1: د A او B دوې پېښې مستقلې بلل کېږي، که چېرې:

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ (د ضرب د حاصل اصل)

2: که چېرې A او B پېښې د ګډو ټکو لرونکې نه وي، نو

$A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cap B) = 0$

$\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (د جمع د حاصل اصل)

لومړی مثال: که چېرې د یوه ښوونځي د زده کوونکو د سترګو رنګ او ذکاوت یـو پـر بـل پرتـه لـه اغېـزې فـرض شوي وي. د لاندې پېښو په پام کې نیولو سره په ناخاپه ډول د یوه زده کوونکي ټاکلو لپاره:

H: ټاکل شوی تن یو هوښیار ذکي زده کوونکی وي.

B: ټاکل شوی زده کوونکی توري سترګې ولري.

هغه احتمـال پیدا کړئ چې ټاکل شوی زده کوونکی په ناخاپه توګه هوښیار ذکي او توري سترګې ولري.

حل: ددې لپاره چې ټاکل شوی زده کوونکی هوښیار او توري سترګې ولري لیکلای شو:

خرنگه چې $P_B(H)=P(H)$ سربېره پردې $P_B(H)=\dfrac{P(B\cap H)}{P(B)}$ نو:

$P(B\cap H)=P(H)\cdot P(B)$

عمومي حالت: د A_1 , A_2 , $A_n.....$, $(n\geq 2)$ ناځاپه پېښې احتمالاً یو له بلې څخه مستقلې بلل کېږي که چېرې د هرو دوو یا څو پېښو په ترکیب کې د ضرب د حاصل قاعده صدق وکړي پرته له هغې پېښې احتمالاً یوه له بلې سره تړلې نومول کېږي.

پایله:

1: پاملرنه باید وشي چې د ضرب د حاصل له قاعدې څخه په ګټه اخیستنې سره په لاندې متقاطع جدول کې هم کولای شو چې $A\cap B$, $A\cap\overline{B}$, $\overline{A}\cap\overline{B}$ او $A\cap\overline{B}$ ناځاپه پېښو احتمالي پایلې د A اوB پیښو لپاره چې احتمالونه یې a او b وي، په آسانۍ په لاس راوړو. د A او B د مستقل والي څخه پوهېږو چې د A او $\overline{B}$ ، $\overline{A}$ اوB په پای کې $\overline{A}$ او $\overline{B}$ هم یوه له بلې څخه مستقلې دي، نو لرو:

	B	$\overline{B}$	
A	$P(A\cap B)=a\cdot b$	$P(A\cap\overline{B})=a(1-b)$	a
$\overline{A}$	$P(\overline{A}\cap B)=b(1-a)$	$P(\overline{A}\cap\overline{B})=(1-a)(1-b)$	$1-a$
	b	$1-b$	1

2: د A ، B او C درې ناځاپه پېښې چې یوه له بلې څخه مستقلې دي، لرو:

$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$

$P(A\cap C)=P(A)\cdot P(C)$

$P(B\cap C)=P(B)\cdot P(C)$

$P(A\cap B\cap C)=P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)$

دویم مثال: په یوه کڅوړه کې دوې سپینې او دوې تورې مرۍ پرتې دي. دوې مرۍ یوه په بلې پسې له کڅوړې څخه پورته کوو، په داسې حال کې چې:

a- د لومړۍ مرۍ د پورته کولو نه وروسته هغه بېرته په کڅوړه کې ږدو.

b- پرته له دې چې مرۍ واپس کېښودل شي.

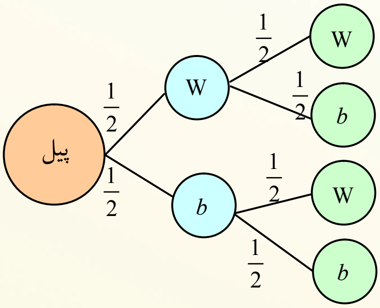
د A پیښه: په لومړي ځل سپینه مرۍ راووزي. B: دویم ځل مرۍ سپینه وي.

له یوې بلې څخه مستقلې یا تړلې (وابسته) دي.

حل:

a) خرنگه چې $P(A)=\dfrac{1}{2}$ او $P(B)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$ وي او

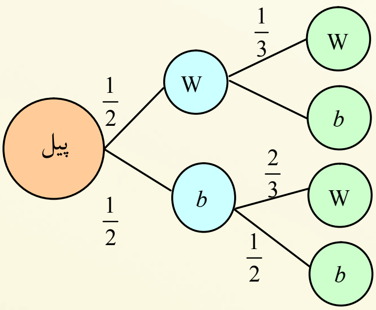
$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)=\dfrac{1}{4}$ دي، نو A او B یوه له بلې څخه مستقلې دي.



b) خرنگه چې:

$$P(B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{2}\ ,\ P(A)=\frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow P(A\cap B)\neq P(A)\cdot P(B)$$

نو A او B يوه له بلې څخه تړلی يا وابسته دي.



دريم مثال: د لاندې متقاطع جدول خالي ځايونه چې په نښه شوي دي، ډک يې کړئ:

	B	$\overline{B}$	
A	0.12	$P(A\cap\overline{B})=?$	?
$\overline{A}$	$P(\overline{A}\cap B)=?$	$P(\overline{A}\cap\overline{B})=?$	?
	?	0.6	

حل: خرنګه چې $P(\overline{B})=0.6$ دي، نو لرو:

$$P(B)=1-P(\overline{B})=1-0.6=0.4$$
$$P(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0.12}{0.4}=0.30$$
$$\Rightarrow P(\overline{A})=1-P(A)=1-0.3=0.70$$

او د پېښو د تقاطع څخه لرو چې:

$$P(A\cap\overline{B})=P(A)\cdot P(\overline{B})=0.3\cdot 0.6=0.18$$
$$P(\overline{A}\cap B)=P(\overline{A})\cdot P(B)=0.7\cdot 0.4=0.28$$
$$P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A})\cdot P(\overline{B})=0.7\cdot 0.6=0.42$$

په همدې ترتيب په جدول کې د قيمتونو په وضع کولو سره مسئله تکميلېږي.

پوښتنې

یو سټ چې عناصر یې $5,3,2$ او 30 دی د یوه رقم د انتخاب احتمال یې 0.25 دی په ناڅاپي ډول لـه نوموړی سټ څخه یو رقم انتخابوو، که چېرې A_k ناڅاپه پېښه د هغه رقم چې انتخاب شوی او د تقسیم قابلیت پـه k ولري، آیا A_2 ,A_3 او A_5 ناڅاپي پېښې دوه په دوه مستقل دي او که نه؟

د څپرکي مهم ټکي

بېلې شوې(غیرمتمادي) نمونه یي فضا:

هغه نمونه یي فضا چې عناصر یې د شمېر او تشخیص وړ وي، د غیرمتمادی نمونهیي فضا پـه نامـه یادېږي، لکـه د رمل یا د سکې اچولو تجربې نمونهیي فضا.

نښتي(متمادي) نمونه یي فضا:

هغه نمونه یي فضا چې عناصر یې د شمېر وړ نه وي د پیوسته یا متمادي نمونهیي فضا په نامه یادېږي چې د حقیقي عددونو پر محور د فاصلې په بڼه او یا په فضاکې د هندسي شکلونو یا حجمونو په ډول څرګندېږي.

هم چانس پېښې:

د یوې نمونه یي فضا لومړني پېښې چې د هغوی پېښې د تجربې په پای کې پـه برابـر احتمــال پېښېږي، هـم چانسه پېښې بلل کېږي. د هم چانس پېښو د احتمـال مجموع له یوه سره مساوي ده.

د نښتي(پیوسته) فضا احتمـال:

د ټوټه کرښو، سطحو او حجمونو مساعد حالتونه د یوې پام وړ ناڅاپي پېښې لپاره په یـوه تجربـي نمونـهیي فـضاکې شامل ټوټه کرښو، سطحو او حجمونه عبارت دي د متصلې فضا له احتمال څخه.

مشروط احتمـال:

کـه چېـرې A او B د S، د نمونـهیـي فـضا دوې ناڅاپـه پـېښې چـې $P(B)\neq 0$ وي پـه دې حالـت کـې $P_B(A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$ ته د A ناڅاپه پېښې د مشروط احتمـال په نامـه یـادېږي پـه دې شـرط چې د B پېښـه له مخکې پېښه شوې وي.

یوه له بلې څخه مستقلې پېښې:

د A او B دوه ناڅاپه پېښې یوه له بلې څخه مستقلې بلل کېږي که چېرې:

$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$ (د ضرب د حاصل اصل)

د څپرکي پوښتنې

1. د لاندې نمونه يي فضاګانو څخه کومه يوه سره نښتې يا پيوسته او کومه يوه غيرمتمادي ده؟

الف: د يوې رمل دانې اچولو تجربه

ب: د يوې سکې د اچولو تجربه

ج: د يو غشي لګېدل په يوه دايره

د: د يوې فلزي ميلې د اوږدوالي زياتېدلو تجربه نظر حرارت ته

2. د يو چارتراش چې اوږدوالی يې L دی په ناڅاپه ډول په سور اره کوو، تر څو دوه برخې شي څومره احتمال شته چې د کينې اړخ اره شوې برخه د ښي اړخ له درې برابره څخه کوچنی وي.

3. د يوه خصوصي شرکت يو کارګر هره ورځ د 8 او 8:50 ساعتونو په منځ کې کورته نژدې تم ځاي کې چې د مامورينو په موټر کې کارته د تګ لپاره ګډون وکړي او په 8:15 ، 8:30 او 8:45 وختونو تم ځای ته رسېږي څومره احتمال ددې شته چې نوموړې تن له 5 دقيقو څخه لږ منتظر پاتې شي.

4. د $[0.3]$ تړلي فاصلې څخه په ناڅاپه ډول دوه عددونه ټاکو، ددې احتمال پيدا کړئ چې د عددونو مجموعه د 5 څخه کوچنی او له 2 څخه لويه وي.

5. په ناڅاپه ډول يو ټکی د مخروط دننه چې د قاعدې شعاع يې R او جګوالی $R\sqrt{3}$ دی ټاکو، پيدا کړئ ددې احتمال چې ټکی د محاطي کرې دننه په دې مخروط کې قرار لري.

6. د يو خودکار قلم خرابېدل دوه دليلونه لري:

1- د ميخانيکيت خرابېدل

2- د خودکار د نيچې خرابېدل

که چېرې د يو خودکار قلم د خرابېدو احتمال 0.088 او ددې احتمال چې د خرابېدو دليل (1) ، شمېره وي مساوي په 0.05 او د دويم نقص احتمال مساوي په 0.002 وي وڅېړئ: چې دوه پورتني دلايل مستقلې او يا غير مستقلې پېښې دي؟

7. خيبر غواړي هغه څلور کلي‌ګانې چې په جيب کې يې لري او سره يو شان دي د کورد دروازې قلف خلاص کړي په کوم احتمال سره وروسته د دريمې کلي له آزمويلو سره چې له جيب څخه يې را باسي د قلف اړوند کلي وي، په هغه صورت کې چې:

a) هره آزمويل شوې کلي په هغه صورت کې چې اصلي کلي نه وي دوباره په همغه جيب کې اچوي.

b) هره آزمويل شوې کلي په هغه صورت کې چې اصلي کلي نه وي په بل جيب کې اچوي.